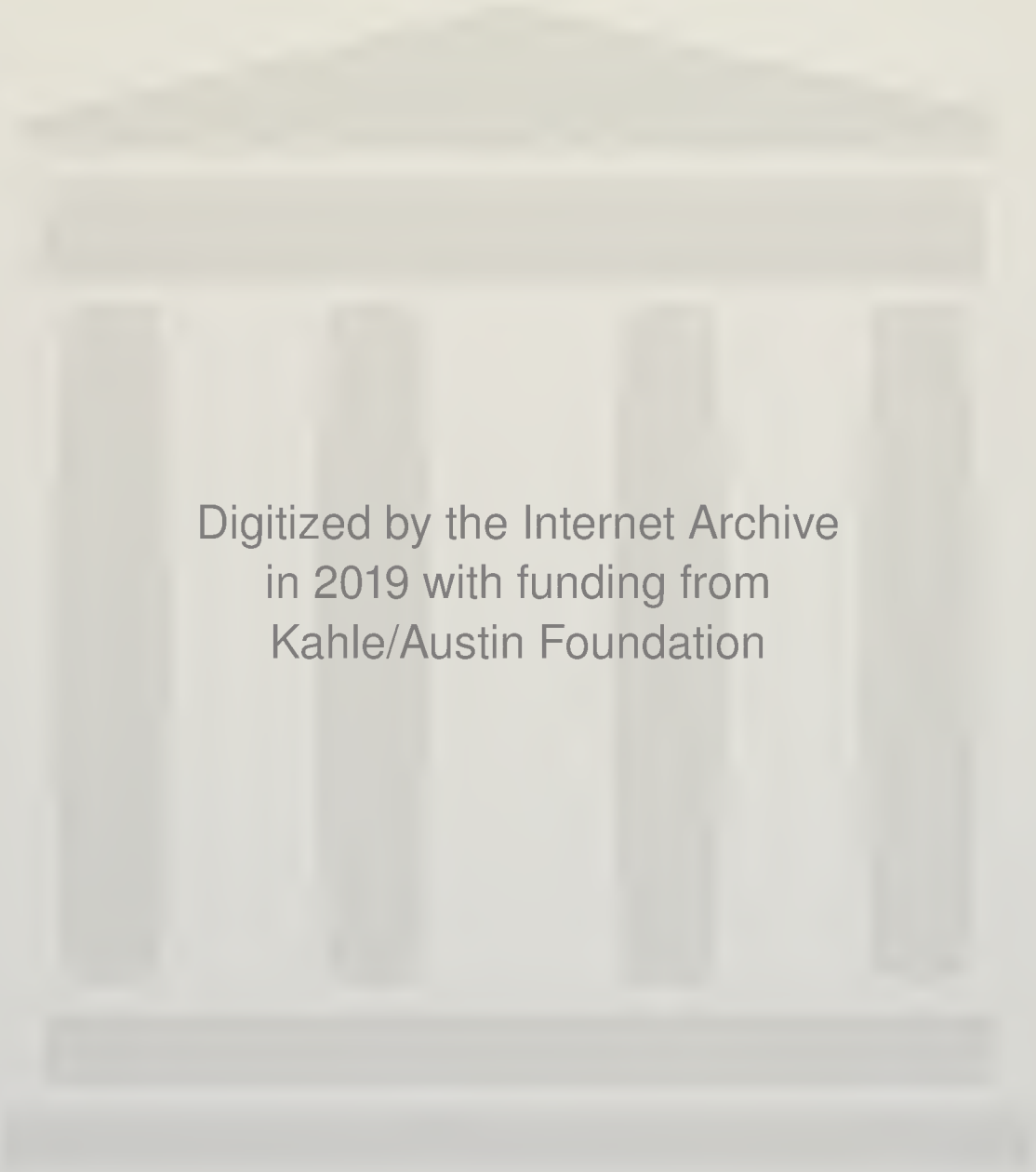
GOTTFRIED WILHELM

LEIBNIZ

SIEBENTE REIHE · FÜNFTER BAND

AKADEMIE VERLAG


Digitized by the Internet Archive
in 2019 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/samtlicheschrift0000leib_q8f9

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

SÄMTLICHE SCHRIFTEN UND BRIEFE

GOTTFRIED WILHELM

LEIBNIZ

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

FÜNFTER BAND

2008

AKADEMIE VERLAG

GOTTFRIED WILHELM

LEIBNIZ

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN
VON DER

LEIBNIZ-FORSCHUNGSSTELLE HANNOVER
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN
BEIM LEIBNIZ-ARCHIV DER
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
HANNOVER

FÜNFTER BAND
1674–1676

INFINITESIMALMATHEMATIK

TRENT UNIVERSITY LIBRARY PETERBOROUGH, ONTARIO

2008

AKADEMIE VERLAG

Ba 534. D47 7th Berl 5th Bd

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS HERBERT BREGER

BEARBEITER DIESES BANDES
UWE MAYER · SIEGMUND PROBST · HEIKE SEFRIN-WEIS

BIBLIOGRAFISCHE INFORMATION DER DEUTSCHEN NATIONALBIBLIOTHEK

DIE DEUTSCHE NATIONALBIBLIOTHEK VERZEICHNET DIESE PUBLIKATION IN DER DEUTSCHEN NATIONALBIBLIOGRAFIE; DETAILLIERTE BIBLIOGRAFISCHE DATEN SIND IM INTERNET ÜBER http://dnb.d-nb.de ABRUFBAR.

ISBN 978-3-05-004578-8

© AKADEMIE VERLAG GMBH, BERLIN 2008

DAS EINGESETZTE PAPIER IST ALTERUNGSBESTÄNDIG NACH DIN/ISO 9706. DAS EINBANDMATERIAL ENTSPRICHT DEN GÜTEBESTIMMUNGEN FÜR BIBLIOTHEKSEINBÄNDE NACH RAL-RG 495.

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DIE DER ÜBERSETZUNG IN ANDERE SPRACHEN, VORBEHALTEN. KEIN TEIL DIESES BUCHES DARF OHNE SCHRIFTLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES IN IRGENDEINER FORM – DURCH PHOTOKOPIE, MIKROVERFILMUNG ODER IRGENDEIN ANDERES VERFAHREN – REPRODUZIERT ODER IN EINE VON MASCHINEN, INSBESONDERE VON DATENVERARBEITUNGSMASCHINEN, VERWENDBARE SPRACHE ÜBERTRAGEN ODER ÜBERSETZT WERDEN.

DRUCK: DRUCKHAUS „THOMAS MÜNTZER“, BAD LANGENSALZA
BINDUNG: NORBERT KLOTZ, JETTINGEN-SCHEPPACH
PRINTED IN THE FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT XIII

EINLEITUNG XVII

ZUR TEXT- UND VARIANTENGESTALTUNG XXXIX

INFINITESIMALMATHEMATIK 1674–1676

1. De figura ad altiorem semper atque altiorem aequationem ascendente [Sommer 1674] 3
2. De curvis homologis. De Quadratrice Hyperbolae [Sommer 1674] 6
3. Methodus tangentium inversa, ignota [Sommer 1674] 14
4. Problema Cartesii methodi tangentium inversae [Sommer 1674] 16
5. Differentiae seu elementa figurarum [Sommer 1674] 24
6. Schediasma de superficiebus conoeidum 3. Oktober 1674 und Januar 1676 ... 31
7. Schediasma de Methodo Tangentium inversa ad Circulum applicata Oktober 1674 43
   - 7_1. Plagula prima 43
   - 7_2. Pars secunda 66
   - 7_3. Plagula tertia 69
   - 7_4. Plagula quarta 83
8. De Methodo Tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium [Oktober 1674] 96
9. Annotatio ad methodum tangentium inversam [Oktober 1674] 107
10. Methodo tangentium flexus curvarum contrarii facile deprehenduntur [September – Oktober 1674] 109
11. De variis curvis notae [September – November 1674] 112
12. De inscriptorum et circumscriptorum usus November 1674 113
13. Curva analytica sensibiliter non differens a quadratrice quadam [Anfang (?) Dezember 1674] 115

14. Ad schedam inquisitionis in methodum tangentium inversam Ovalis exemplo [Spätsommer – 24. Dezember 1674] ... 117
15. De Methodo Tangentium inversa exemplum [1. – 24.] Dezember 1674 ... 120
16. Problemata Methodi Tangentium inversae [1. – 24.] Dezember 1674 ... 131
17. Methodi Tangentium inversae exemplum seu inquisitio in Methodum qua Cartesius invenit proprietates suarum ovalium lib. 2. Geom. [1. – 24.] Dezember 1674 ... 140
18. De Trochoeidibus et Relationibus Reductarum ad ordinatas 24. Dezember 1674 ... 159
19. Appendix schediasmatis de Trochoeidibus et relatione Reductarum ad ordinatas [24. – 31.] Dezember 1674 ... 169
20. De problematis quadraturarum reducendis [24. – 31.] Dezember 1674 ... 174
21. Methodus tangentium inversa [Dezember 1674 – Januar 1675] ... 180
22. De Triangulo Curvarum characteristico Januar 1675 ... 184
23. De Trochoeidibus generis compositi Januar 1675 ... 192
24. Momenta Curvae Parabolicae. De maximis et minimis [Januar 1675] ... 195
25. De meis figuris segmentorum [Januar 1675] ... 200
26. De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus Januar 1675 .. 202
27. Methodus Tangentium inversa nunc tandem explicata Januar 1675 ... 208
27_1. Methodus Tangentium inversa nunc tandem explicata ... 208
27_2. Appendix methodi Tangentium inversae nunc tandem explicatae ... 213
27_3. De Methodo tangentium inversa. Januar. 1675. pars II^{da} ... 215
27_4. De Methodo tangentium inversa pars III^{tia} ... 217
28. Ordinatarum in partes resolutio ad quadraturas [Dezember 1674 – Januar 1675] ... 229
29. De quadraturis per summis ordinatarum [Dezember 1674 – Januar 1675] ... 232
30. Curvae mensurabiles Heuratianae [Mitte 1674 – 1676 (?)] ... 234
31. Figura segmentorum [März – Dezember 1675] ... 236
32. Metiri frustum Coni recti 10. Oktober 1675 ... 239
33. Triangulum Characteristicum 11. Oktober 1675 ... 243
34. Theoremata tetragonistica generalia ex tangentibus 19. Oktober 1675 ... 248
35. Theorema tetragonisticum ex spatii sectione 24. Oktober 1675 ... 256
36. Dimensio curvae Ellipsis 24. Oktober 1675 ... 258
37. Logarithmi in Hyperbola demonstrati 24. Oktober 1675 ... 260

38. Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis 25. und 26. (?) Oktober 1675 263
39. Inquisitio de dimensione Curvarum Ellipseos et Hyperbolae 26. Oktober 1675 270
40. Analyseos Tetragonisticae pars secunda 29. Oktober 1675 288
41. Historia Tetragonisticae Conicae [31. Oktober 1675] 296
42. Varia ad tangentes et quadraturas [Oktober (?) 1675] 298
43. Marginalien in Barrows Lectiones geometricae [Ende Januar 1673 – 1716 (?)] 301
44. Analyseos Tetragonisticae pars tertia 1. November 1675 310
45. Linea Berthetiana 3. November 1675 317
46. Methodi tangentium inversae exempla 11. November 1675 321
47. Marginalien in Gregorys Exercitationes geometricae [Ende Januar 1673 bis 1716 (?)] 332
48. Methodi tangentium directae compendium 22. November 1675 341
49. De curva lineae hastariae simili. De transmutatione figurarum curvilinearum. De methodis tangentes inveniendi [Am oder kurz vor dem 23. November 1675] 345
50. Polygonorum usus ad Tetragonistica et methodum Tangentium inversam 23. November 1675 349
51. Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa 356
51_1. Notae [Am oder kurz vor dem 27. November 1675] 356
51_2. Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa 27. November 1675 361
52. Curvarum dimensio evolutio expansio. Speciatim curvae Hyperbolae 8. Dezember 1675 372
53. De expansione superficierum cylindriformium pro dimensione curvarum 14. Dezember 1675 390
54. De additione ordinatarum ad quadraturas 21. Dezember 1675 398
54_1. De additione ordinatarum ad quadraturas 398
54_2. De additione ordinatarum ad quadraturas. Pars II 403
55. De Momentis, aequationes Tetragonisticae 22. Dezember 1675 406
56. Curva Ellipseos vel Hyperbolae [22. – 31.] Dezember 1675 413
57. De problematibus irregularibus [November 1675 – Januar 1676] 420
58. Curvarum dimensio 2. Januar 1676 423
59. Tetragonistica ex triangulo characteristico 2. Januar 1676 426
60. Aequationes tetragonisticae per calculum differentialem Januar 1676 428
61. Theorema tetragonisticum memorabile ex natura evolutionis Januar 1676 432

62. De progressionibus et figura segmentorum. De aequilibrio ponderum. De lunula. De conchoide [Januar 1676] 434
63. De la beauté des théorèmes [Januar 1676] 439
64. L'antiparabole de Bertet [Januar 1676] 441
65. Summa reciprocorum parabolae Januar 1676 443
66. De perpendicularibus et tangentibus curvarum Januar 1676 444
67. Tangentium calculus [8. – 29.] Februar 1676 445
67_1. Notae 445
67_2. Tangentium calculus 447
68. De Tangentibus et speciatim figurarum simplicium [Februar – Juni 1676] 449
69. De tangentibus paraboloeidum [Februar – Juni 1676] 481
70. Quadratrix April 1676 496
71. De quadrabilitate quadratricis [Mitte 1674 – 1676 (?)] 507
72. De centro gravitatis semicirculi [April – Ende 1676 (?)] 508
73. De figuris syllogis [2. Hälfte (?) April 1676] 509
74. Quadratura Cycloidis. Figurae sinuum [Ende April – Anfang Mai 1676] 510
75. Propositiones duae de ordinatis ad arcus extensos applicatis [Ende April bis Anfang Mai 1676] 515
76. Triangulum characteristicum obliquum, et motus centri gravitatis 18. Mai 1676 518
77. De via centri gravitatis nova 18. Mai 1676 527
78. Superficies Coni Scaleni 24. Mai 1676 536
79. Analysis Tetragonistica 26. Mai 1676 537
80. Quadratura Hyperbolae per Logarithmos. Tentamentum de quadratura Circuli 27. Mai 1676 549
81. Theoremata centrobaryca plane nova 1. Juni 1676 552
82. Quadratura circuli ex centro gravitatis descripti 4. Juni 1676 553
83. Centrum gravitatis arcus circuli [4. Juni – August 1676] 557
84. Nova methodus tangentium 26. Juni 1676 559
85. Quadraturae ex summis ordinatarum [28. Juni 1676] 562
86. De quadratrice Juni 1676 563
87. Nova Centrobaryca Juni 1676 575
88. De exponentibus et indicibus ad quadraturas applicatis. De Maximis et Minimis. Curva Hastaria. Methodus tangentium inversa Juni 1676 577
89. De summis per calculum inversum ex differentiis, deque Methodo tangentium inversa; et quadraturae Circuli impossibilitate Juli 1676 593

90. Methodus tangentium inversa Juli 1676 598
91. Solutio problematis Cartesii inversarum [Juli 1676] 603
92. Via probandae impossibilitatis quadraturarum [Juli 1676] 606
93. Calculus differentialis transcendens [Juli 1676] 607
94. Differentiae convergentium [Ende Juni – August 1676] 609
95. De circuli differentiis et descriptionibus [März – August 1676] 611
96. Calculus Tangentium differentialis November 1676 612
97. Reductio plurium aequationum ad unam seu sublatio incognitarum [Kurz vor dem 28. November 1676] 619
98. Figura quadranda comparatur cum alterius differentiis Dezember 1676 622

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS 627

SCHRIFTENVERZEICHNIS 629

SACHVERZEICHNIS 637

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS 657
Fundstellen 657
Cc_2-Konkordanz 658
Erwähnte Leibniz-Handschriften 660

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN 661

VORWORT

Der fünfte Band von Leibniz' mathematischen Schriften enthält die Aufzeichnungen aus den Jahren 1674 bis 1676 zur Infinitesimalrechnung. In diesem Band werden also die Stücke, in denen Leibniz die Infinitesimalrechnung entwickelt, zum größten Teil erstmals veröffentlicht. Wenn Leibniz — nach einem Prioritätsstreit von zweieinhalb Jahrhunderten — uneingeschränkt die selbständige und unabhängige Formulierung der Infinitesimalrechnung zuerkannt wird, so beruht dieses Urteil letztlich auf den hier gedruckten Dokumenten.

Von Dr. Heike Sefrin-Weis (August 2003 bis September 2004) wurden die Stücke N. 4, 6, 8, 10, 14, 17, 20, 21, 26, 27, 46, 48, 51_2 und 58 bearbeitet. Dr. Uwe Mayer (ab Oktober 2004) bearbeitete die Stücke N. 1, 2, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 47, 49, 50, 51_1, 53, 59, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 79, 82, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 96, 97 und 98. Während der Einarbeitungszeit stand Dr. Siegmund Probst, der seinerseits alle übrigen Stücke bearbeitete, jeweils Dr. Heike Sefrin-Weis und Dr. Uwe Mayer beratend zur Seite. Die Schlussredaktion (einschließlich Datierungen und Verzeichnissen) wurde von Dr. Uwe Mayer und Dr. Siegmund Probst gemeinsam durchgeführt. Für die elektronische Erfassung der Stücke ist Susanne Bawah zu danken.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle.

Dem Ltd. Direktor und den Mitarbeitern der Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek Niedersächsische Landesbibliothek Hannover ist für Unterstützung und gute Zusammenarbeit zu danken. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts verglichen werden.

Seit November 2004 standen Teile des Bandes in unkorrigierter Fassung im Internet. Auf die Konkordanzen und Kumulierungen im Internet (http://www.leibniz-edition.de) sei verwiesen.

Prof. Dr. Manfred Breger hat freundlicherweisen die unter Linux laufenden Programme und Datenbanken betreut. Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino (Massachusetts) und Dominik Wujastyk (London) entwickelten TEX-Macropakets EDMAC und eigener Macros erstellt worden. Die Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in TEX weiter bearbeitet. Der Verlag hat wieder eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten.

Hannover, Juni 2008 Herbert Breger

EINLEITUNG

Der vorliegende Band umfasst die Studien, Entwürfe und Aufzeichnungen des Zeitraums von 1674 bis 1676 zur Infinitesimalmathematik, die mit wenigen Ausnahmen bisher unveröffentlicht waren. Die Marginalien in nur teilweise einschlägigen Werken, die von Leibniz herangezogen wurden, sowie die umfangreichen Studien zur arithmetischen Kreisquadratur, das heißt zur Berechnung der Kreisfläche mittels unendlicher konvergenter Reihen von rationalen Zahlen, werden in späteren Bänden dieser Reihe veröffentlicht.

Die Texte des Bandes wurden zu 98 Hauptnummern zusammengefasst, deren Länge zwischen zwei Zeilen (N. 72) und 53 Druckseiten (N. 7) schwankt. Die Bedeutung, die Leibniz diesen Studien beigemessen hat, lässt sich auch daran erkennen, dass er ungewöhnlich viele, nämlich 56, mit einem Datum versehen hat.

Zehn Stücke (N. 38, 40, 44, 46, 48, 51_2, 72, 84, 90, 96) waren bisher ganz oder teilweise im Druck zugänglich: mit 61 Druckseiten knapp ein Zehntel des Bandes.

Das Spektrum der Texte reicht von Marginalien in von Leibniz studierten Schriften (N. 43, 47) über kurze Notizen (N. 72) und wissenschaftshistorische Aufzeichnungen (N. 41) zu längeren theoretischen Untersuchungen und Darstellungen. Manche wurden von Leibniz wohl in direkter Abfolge verfasst (N. 7, 27), andere bilden eher lockere Gruppen (N. 38, 40, 44; 68, 69). Hinzu kommen sechs gemeinsam mit E. W. v. Tschirnhaus angefertigte Gesprächsnotizen (N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1, 80). Berichte über Unterhaltungen mit verschiedenen Wissenschaftlern finden sich in N. 3, 6, 32, 40, 52, 57, 64, 73.

Quellen

Leibniz verwendet in den Jahren 1674–1676 für seine Forschungen zur Infinitesimalmathematik mit wenigen Ausnahmen dieselbe Literatur, die er bereits 1673 zur Verfügung hatte.

Die beiden Marginalexemplare von I. Barrow, *Lectiones geometricae* (N. 43), und J. Gregory, *Exercitationes geometricae* (N. 47), hat Leibniz 1673 erworben, aber überwiegend in den Jahren 1674–1676 studiert, vereinzelt zieht er diese Werke auch für weitere Studien zu Rate (N. 86) oder erwähnt sie kurz (N. 44). Eingehender setzt er sich vor allem mit Schriften auseinander, die 1659–1661 in der zweiten Auflage der lateinischen

Übersetzung von R. Descartes' *Géométrie* von Fr. van Schooten publiziert worden waren: Zwischen Mitte 1674 und Januar 1675 befasst sich Leibniz bei dem Versuch, aus der Normalenmethode von Descartes eine Lösungsmethode für das umgekehrte Tangentenproblem abzuleiten, naturgemäß häufig mit dem Text von Descartes (N. 4, 7, 8, 14, 17, 20, 26, 27) und mit dem Kommentar von Schooten (N. 7, 8, 15, 26), die später nur noch vereinzelt genannt werden (N. 93 bzw. N. 39). Letzterer dürfte in dieser Phase auch die hauptsächliche Quelle für die Tangentenmethode von Fermat gewesen sein (N. 7, 27). Hinzu kommen Ansätze mit der Tangentenmethode von Hudde aus den *Epistolae duae* (z. B. N. 7, 17, 27), gelegentlich werden Debeaune (N. 4) und De Witt (N. 15) erwähnt. Aus diesem Sammelband zieht Leibniz außerdem die Schrift von Heuraet über die Kurvenrektifikation heran (N. 2, 16, 30, 41).

Auch die folgenden Titel hat Leibniz bereits 1673 studiert: Die in den *Philosophical Transactions* publizierte Tangentenmethode von Sluse wird im Zusammenhang mit den oben genannten Untersuchungen zum inversen Tangentenproblem (N. 7, 10, 26, 27) und danach noch öfters erwähnt (N. 46, 48, 62, 68, 88, 93, 96, 97), ebenso die Methode von Hudde (N. 48, 88, 96, 97). Eine größere Rolle hinsichtlich der Infinitesimalmathematik erhält nun der dritte Band der *Lettres* von Descartes, in dem sich Leibniz hauptsächlich über die Diskussionen um Fermats Tangentenmethode sowie über das 2. Debeaunesche Problem informiert (N. 51_2, 68, 90, 91). Das *Mesolabum* von Sluse wird im Zusammenhang mit speziellen Kurven, Tangentenbestimmung und Wendepunkten genannt (N. 54, 62, 68), Gregorys *Vera quadratura* (N. 13, 41, 44, 50) und Huygens' *De circuli magnitudine* (N. 13, 41) im Zusammenhang mit der Kreis- und Kegelschnittquadratur. Aus Huygens' *Horologium oscillatorium* (N. 6, 13, 16, 39, 41, 77) erwähnt Leibniz hauptsächlich die Sätze zu Sphäroiden und Konoiden. Das *Opus geometricum* von Saint-Vincent (N. 37, 40, 41, 44, 50) und die Schriften von Wallis (vor allem *Mechanica*, N. 24, 41, 44, 74; *Tractatus duo*, N. 39, 41, 74; *Arithmetica infinitorum*, N. 41, 44, 46, 54, 56, 64) zitiert Leibniz zu diversen Methoden und Ergebnissen bei Quadraturen. Nur noch selten herangezogen werden die 1673 von Leibniz eingehend studierten Schriften von Fabri (*Synopsis geometrica*, N. 74), Pascal (*Lettres de Dettonville*, N. 74, 82) sowie Mercator (*Logarithmotechnia*, N. 41, 57) und Ricci (*Exercitatio geometrica*, N. 68). Vereinzelt erwähnt werden auch Snell (N. 13, 41) und Viète (N. 13) zum Thema der Kreisapproximation, R. White (N. 41) zum schiefen Kegel. Die zahlreichen Verweise auf die Guldinschen Sätze (N. 41, 62, 75, 76, 77, 82) dürften auf indirekter Rezeption beruhen. Auch im Fall von Torricelli (N. 41) und Cavalieri (N. 41, 44), dessen Werk Leibniz schon früher kennengelernt hatte, spielt eine aktuelle Lektüre vermutlich keine Rolle. Dasselbe gilt wohl in der Regel

für die antiken Autoren, von denen Euklid (N. 41), Apollonius (N. 15) und Pappus (N. 26) nur einmal erwähnt werden. Eine Ausnahme bildet Archimedes, auf den mehrfach Bezug genommen wird (N. 6, 41, 57, 62, 74, 82, 83).

Gegenüber dem Jahr 1673 kommen nur wenige einschlägige Titel neu hinzu: Gregorys *Geometriae pars universalis* findet Leibniz bei Barrow (N. 43) und in Gregorys *Exercitationes geometricae* (N. 47) erwähnt, Tschirnhaus bezieht sich auf einen Transmutationssatz von Gregory (N. 49). Leibniz selbst nennt einige Ergebnisse zu Sphäroiden und Konoiden aus dieser Schrift (N. 39, 41, 50), die er wohl spätestens seit Dezember 1674 aus eigener Lektüre kennt (vgl. VII, 1 N. 13 S. 130 f.). Bei den Resultaten mit der Schwerpunktmethode kommen als Quelle Tacquets *Cylindricorum et annularium libri V* hinzu (N. 41, 82, 83). Einer Schrift von Mersenne, *L'Optique*, verdankt Leibniz den Hinweis auf Forschungen Robervals zu gekrümmten Oberflächen (N. 7).

Die Lektüre der *Philosophical Transactions* macht sich hauptsächlich bezüglich der Tangentenmethode von Sluse bemerkbar (s. o.), vereinzelt auch in der Rezeption von Newton (N. 17) und möglicherweise Wren (N. 77).

In der wissenschaftsgeschichtlichen Aufzeichnung *Historia Tetragonisticae Conicae* (N. 41) stellt Leibniz Ende Oktober 1675 eine Liste der ihm bekannten Autoren zusammen, die jeweils als Erste Erfolge bei der Quadratur, Rektifikation etc. der Kegelschnitte bzw. der aus ihnen gebildeten Rotationskörper, Zylinderhufe u. ä. erzielt haben.

Einzelne Bemerkungen in den Studien setzen eine direkte oder indirekte Kenntnis damals noch nicht gedruckter Handschriften von Huygens (N. 7, 68) und Roberval (N. 70) voraus, beruhen auf Briefen (Oldenburg, N. 41) oder mündlichen Mitteilungen von Bertet (N. 64), Rømer (N. 57) und Tschirnhaus (N. 38, 52, 73). Hinzu kommen Erörterungen von Themen, die in Gesprächen mit Boulliau (N. 6), Dechales (N. 32) und Huygens (N. 3) aufgeworfen wurden. Einige Gespräche mit Tschirnhaus sind darüber hinaus durch sechs Handschriften mit gemeinsamen Notizen dokumentiert (N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1, 80; s. u. den Abschnitt Tschirnhaus-Stücke). Nicht zuletzt kann Leibniz sich mittlerweile auf eigene Vorarbeiten stützen, vor allem zum charakteristischen Dreieck (z. B. N. 22, 33, 59, 76; vgl. dazu VII, 4 N. 26 u. 27), zum Transmutationssatz (z. B. N. 21, 25, 31, 34, 35, 40, 44, 73; vgl. dazu VII, 4 N. 39 u. VII, 3 N. 39), zur Behandlung des inversen Tangentenproblems mittels der Differenzenmethode (z. B. N. 8, 15, 16, 26, 50, 53; vgl. VII, 4 N. 40 u. VII, 3 N. 39) sowie zu seinen Ergebnissen bei der Reihensummierung und den Rollkurven (z. B. N. 8, 16, 17, 20, 44; vgl. VII, 3 N. 38 u. 39).

Themenschwerpunkte

Nur einige wenige Briefe oder andere Schriftstücke von Leibniz sind mit Sicherheit auf die erste Hälfte des Jahres 1674 zu datieren. Insbesondere bei den Studien zur Infinitesimalmathematik ist im Vergleich zu 1673 ein deutlicher Rückgang zu verzeichnen. Erst ab Mitte 1674 ist wieder eine intensivere Beschäftigung mit dieser Thematik feststellbar. Die Studien aus der Zeit bis Frühjahr 1675 machen etwa 40 % des vorliegenden Bandes aus. Danach ist in der Infinitesimalmathematik einschließlich der Folgen und Reihen (vgl. VII, 3) eine fast völlige Unterbrechung der Forschungen bis zum Herbst 1675 zu verzeichnen, während es aus diesem Zeitraum zahlreiche algebraische und physikalische Studien gibt. (Eine von Leibniz erwähnte Handschrift vom 19. Juni 1675 zur Rektifikation der Ellipse konnte bisher nicht aufgefunden werden. Die daraus zitierte Formel verwendet er jedoch bereits am 3. Oktober 1674 in N. 6.) Seit den ersten Gesprächen mit Tschirnhaus (s. u. den Abschnitt Tschirnhaus-Stücke) nimmt Leibniz ab Oktober 1675 die Untersuchungen wieder auf. Diese Phase intensiver Beschäftigung mit der Infinitesimalmathematik erfährt ab August 1676 wieder eine Unterbrechung, vermutlich wegen der Arbeiten an der Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur. Erst nach den Anregungen auf der Reise nach England und in die Niederlande sind in den letzten Wochen vor der Ankunft in Hannover im Dezember 1676 wieder neue Studien zu verzeichnen (N. 96, 97, 98).

(1) Differential- und Integralrechnung

Der Zusammenhang zwischen der Differenzen- und Tangentenrechnung, dem inversen Tangentenproblem und Quadraturen ist Leibniz spätestens 1673 mit seinen Untersuchungen zum charakteristischen Dreieck klar geworden. Eine allgemeine inverse Tangentenmethode würde die Quadratur aller Kurven ermöglichen (N. 7_3) und wäre so für ihn der höchste Gipfel der Geometrie (N. 17). Dass Differenzenbildung und Summierung nicht nur bei Zahlenfolgen, sondern auch bei Ordinaten von Kurven als umgekehrte Operationen aufgefasst werden können, thematisiert er immer wieder (z. B. N. 26, 60, 84, 89, 96, 98). So lassen sich die im vorliegenden Band gedruckten Untersuchungen hauptsächlich den drei genannten Bereichen zuordnen, ohne dass immer eine strikte Trennung möglich wäre. Dies kommt bereits in einer Reihe von Titeln der Studien zum Ausdruck: *Theoremata tetragonistica generalia ex tangentibus* (N. 34), *Polygonorum usus ad Tetragonistica et Tang. invers.* (N. 50), *Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa* (N. 51), *Aequationes tetragonisticae per calculum differentialem* (N. 60), *De summis per calculum inversum ex differentiis, deque methodo tangentium inversa* (N. 89), *Figura quadranda comparatur cum alterius differentiis* (N. 98).

(a) Differential- und Tangentenrechnung

Die bekannten Tangentenmethoden von Descartes (N. 3, 4, 7, 8, 14, 17, 20, 26, 27, 48, 84, 93), Hudde (N. 7, 17, 27, 88, 96, 97) und Sluse (N. 7, 10, 26, 27, 46, 48, 68, 88, 93, 96, 97) werden von Leibniz häufig verwendet und auf ihre Reichweite hin untersucht. Seltener erwähnt er die Methode von Fermat (N. 7, 27, 68), die Methode von Tschirnhaus lernt er durch diesen selbst kennen (N. 49, 67_1). In N. 48 vom 22. November 1675 modifiziert und erweitert Leibniz das Verfahren von Descartes zur Konstruktion der Normale an einen Kurvenpunkt. Am 26. Juni 1676 notiert er in Abgrenzung zur Methode von Descartes: „At vera methodus tangentium generalis est per differentias“ (N. 84). Er motiviert dies dadurch, dass so auch transzendente Kurven behandelt werden können, sofern ihre Differenzen bekannt sind, insbesondere alle, die durch die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel gegeben werden. Schon im Sommer 1674 versucht Leibniz, die Tangenten einer transzendenten Kurve zu bestimmen (N. 1). Bei der durch $y = \frac{x^x}{a^{x-1}}$ gegebenen Kurve wählt er allerdings für die Variable im Exponenten nicht x als Bezeichnung, sondern β, um formal die Gleichung einer höheren Parabel zu erhalten, weshalb die von ihm durchgeführte Tangentenrechnung nicht zum richtigen Ergebnis führt. In N. 5 stellt er sich die Frage, ob die Differenzenrechnung bei Wechsel der Bezugsachse zum selben Ergebnis führt. Im Januar 1676 untersucht er die Tangentenrechnung bei Kurven, die als Quadratrix bekannter Kurven auftreten, wie der Logarithmuskurve (N. 59); im Juli 1676 stellt er Überlegungen an, wie die bekannten Tangentenmethoden auf transzendente Kurven angewendet werden könnten (N. 93). Im Frühjahr 1676 verfasst Leibniz zwei umfangreiche Studien zu den Tangenten der Parabeln und Hyperbeln (N. 68, 69). Durch die Lektüre der Diskussion um die Fermatsche Tangentenmethode in Band 3 der *Lettres* von Descartes wird ihm bewusst, dass die Behandlung der Tangenten bzw. Normalen von einem Punkt aus an eine Kurve als Maxima bzw. Minima nur mit Einschränkungen zulässig ist (N. 68).

Kurz nach der Einführung der Symbole dx und $\int$ für die Differential- und Integralrechnung (s. u. den Abschnitt zur Notation und Rechentechnik) leitet Leibniz die Produktregel für die Differentiation am 27. November 1675 ab (N. 51_2), die Quotientenregel berechnet er im April 1676 (N. 70), eine ausführlichere Darstellung folgt im Juli 1676 (N. 89). Im November 1676 formuliert er als Regel für allgemeine Potenzen: „$\overline{dx^e} \sqcap e, x^{e-1}$ et contra $\int \overline{x^e} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$.“ (N. 96). Die Studie *Calculus tangentium differentialis* vom November 1676 (N. 96) enthält nicht nur die Regeln für die Differentiation der durch allgemeine Potenzen gegebenen einfachen Kurven, sondern auch die entsprechenden Formeln

für die Integration und zeigt den Zusammenhang mit inversen Tangentenproblemen an mehreren Beispielen auf. Außerdem versucht Leibniz, die Methode bereits auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten auszudehnen, um so z. B. die Tangenten an gekrümmte Flächen berechnen zu können. Die beiden letzten Stücke des Bandes stehen in Zusammenhang mit Leibniz' Brief an Oldenburg vom 28. November 1676 (III, 5 N. II): N. 97 ist der Entwurf für einen Abschnitt, in dem Leibniz die Tangentenrechnung für allgemeine Polynome 2. Grades behandelt, in N. 98 vom Dezember 1676 versucht er, die Überlegung auf Polynome 3. Grades zu erweitern und durch Vergleich der resultierenden Formeln mit anderen Kurvengleichungen für die Quadratur auszunützen.

Leibniz' Interesse für Wendepunkte geht vermutlich zurück auf die Untersuchung der von ihm für die Kreisquadratur verwendeten Kurve, deren Krümmungsverhalten er in seiner ersten Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur vom Herbst 1673 untersucht, noch ohne den Wendepunkt genau bestimmen zu wollen und ohne Tangentenbetrachtungen anzustellen (vgl. VII, 4 N. 42_1 S. 731–733). In der Ausarbeitung vom Oktober 1674 (N. 10) versucht er eine Bestimmung des Wendepunkts durch einen Vergleich von Abszisse und Subtangente, die er nach dem Verfahren von Sluse berechnet (vgl. III, 1 N. 39 S. 144 f. u. 147). Leibniz hat sich wohl kurz zuvor mit den in den *Philosophical Transactions* gedruckten Bemerkungen von Sluse zum Auffinden von Wendepunkten befasst, die knappen Hinweise aber nicht richtig verstanden, wie seine Verwechslung von Extremwerten und Wendepunkten zeigt. Auch im Januar 1675 unterlaufen ihm bei der Formulierung von Bedingungen für Extremwerte noch Fehler (N. 24). Tschirnhaus bestimmt im November 1675 das Maximum einer Kurve mit der Methode von Fermat (N. 49), Leibniz im Juni 1676 die maximale Breite der von ihm piqueline oder curva hastaria genannten Kurve, eines Zweiges der Konchoide (N. 88). Der Verweis auf die Tangentenmethode und die Konchoide von Sluse in einer weiteren Gesprächsaufzeichnung vom Januar 1676 steht möglicherweise in Zusammenhang mit dem Problem der Bestimmung von Wendepunkten (N. 62).

(b) Inverse Tangentenmethode

In einem Gespräch mit Leibniz äußert Huygens die Vermutung, Descartes habe eine von ihm geheim gehaltene inverse Tangentenmethode besessen (N. 3). Er stützt sich dabei auf den Umstand, dass Descartes optische Kurven, die später so genannten Cartesischen Ovale, mit bestimmten Brechungseigenschaften behandelt. Descartes gibt die Gleichung dieser Kurven an, was der Lösung einer inversen Tangentenaufgabe (in heutiger Terminologie: der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung) entspricht. Leibniz, der sich mit der Problematik bereits 1673 auseinandergesetzt hatte (VII, 4 N. 35)

und an einer allgemeinen Methode von Descartes zweifelt (N. 3), nimmt die Aussagen von Huygens wohl zum Anlass, sich seit Sommer 1674 wieder verstärkt mit den Tangentenmethoden von Descartes, Hudde und Sluse auseinanderzusetzen. Er versucht bis Januar 1675 erfolglos, das Extremwertverfahren mittels Bestimmung von Doppelwurzeln einer Gleichung für das inverse Tangentenproblem fruchtbar zu machen (N. 4, 7, 8, 9, 14, 17, 20, 21 und 27). Neben weiteren Studien zu einer allgemeinen inversen Tangentenmethode (N. 48, 51_2, 58, 88, 89) behandelt er eine Vielzahl spezieller inverser Tangentenprobleme: Im Dezember 1674 stellt er sich die Aufgabe, die Kurve zu bestimmen, deren Ordinaten umgekehrt proportional zu den Subnormalen sind, und scheitert zunächst mit dem Ansatz einer Hyperbel als Lösungskurve (N. 15). Am 11. November 1675 kann er in wenigen Zeilen die kubische Parabel als Lösung ermitteln, ein anderes Beispiel führt auf die Wurzel aus dem Logarithmus als Lösungskurve (N. 46). Die genannte Eigenschaft der kubischen Parabel erwähnt Leibniz kurz darauf in N. 53 vom 14. Dezember 1675, wo er außerdem die Parabel als Kurve mit Differenzen umgekehrt proportional zu den Ordinaten bezeichnet. Dieses Problem hatte Leibniz im Dezember 1674 gelöst (VII, 3 N. 39). Manche Beispiele für inverse Tangentenprobleme formuliert Leibniz aus bekannten Tangenten- bzw. Normaleneigenschaften bestimmter Kurven, die somit nach Voraussetzung eine Lösung darstellen: Aus der seit Descartes bekannten Eigenschaft der Rollkurven, dass ihre Normalen die Verbindungsstrecken zu den Berührungspunkten der abrollenden Kurve mit der Abszissenachse sind, folgert Leibniz, dass umgekehrt die Kurven mit bekannten Normalen als Rollkurven behandelt werden können (N. 17). (Einen Beweis der Normaleneigenschaft der Rollkurven skizziert er in N. 51_2 vom 27. November 1675.) Leibniz nennt die Zykloide als eine Lösungskurve des Problems, dass die Normalen sich zur Abszisse wie die Ordinaten der Parabel verhalten sollen (N. 17; vgl. auch N. 18 u. N. 26), im Januar 1675 die Parabel als Kurve mit konstanter Subnormale und den Kreis als Kurve mit konstanter Normale (N. 27_4), im Juli 1676 den Kreis als Kurve, deren Normalen sich in einem Punkt treffen (N. 89). Das berühmte Problem, das Debeaune seinem Briefpartner Descartes 1638 stellt, eine Kurve mit konstanter Subtangente zu finden, bereitet Leibniz im Juli 1676 keine größeren Schwierigkeiten, worin er einen wichtigen Beleg für die Leistungsfähigkeit seiner Methoden sieht: „Solutum ergo a me est unius horae spatio problema, quod Geometras primarios frustra exercuit, et ipsi Cartesio difficillimum visum est“ (N. 90, 91).

(c) Quadraturen und Rektifikationen

Leibniz geht beim Versuch, eine allgemeine Quadraturmethode zu entwickeln, meist so vor, dass er durch Transformationen gewonnene Erkenntnisse über die gegenseitige

Abhängigkeit von Quadraturen verschiedener Kurven untereinander oder von Quadraturen und Rektifikationen verschiedener Kurven (z. B. den bekannten Zusammenhang von Parabelrektifikation und Hyperbelquadratur) zu systematisieren versucht. Dazu führt er Begriffe ein wie curva homologa (N. 2), curva homogenea (N. 16, 17, 20, 38), curva sylloga, syndota, sygnota (N. 18, 53), figura sylloga (N. 73) (s. u. den Abschnitt Terminologie). Im Januar 1676 erprobt er den Begriff der figura corresolubilis und nimmt sich vor, ein Symbol dafür einzuführen (N. 6). Am 26. Mai 1676 erwägt er die Möglichkeit, Kurven nach der Gleichung ihrer Subtangenten zu klassifizieren (N. 79). Weitere Ansätze in diese Richtung zeigen seine Pläne, Kataloge zu erstellen, z. B. von algebraischen Kurven, die eine algebraische Quadratrix besitzen (N. 26), von Kurven und ihren Tangenten (N. 52) oder von allen quadrierbaren Kurven (N. 96).

Neben der von ihm bereits 1673 praktizierten Umformung von Brüchen und Wurzelausdrücken in unendliche Reihen versucht Leibniz seit Ende 1674, auch aus der Algebra übernommene Umformungen wie die Division oder Zerlegung von Kurvengleichungen für die Quadratur anzuwenden (N. 28, 29, 54, 85). Dabei befasst er sich auch gelegentlich mit imaginären Wurzeln (N. 28, 29, 52, 54, 85). Im November 1674 schlägt er außerdem vor, das geometrische Verfahren der ein- und umbeschriebenen Vielecke nicht nur zum Beweis bereits anderweitig gefundener, sondern auch für die Entdeckung neuer Quadraturen nutzbar zu machen. Dazu sei es jedoch erforderlich, dass die Flächeninhalte beliebiger Vielecke durch Regeln oder andere abgekürzte Methoden bestimmt werden könnten (N. 12). Von der Untersuchung der Rollkurven und der Evolventen erhofft er sich eine Methode, alle Quadraturen auf Rektifikationen zurückführen zu können (N. 16, 17, 20). Gelegentlich versucht er, mechanische Überlegungen als Hilfsmittel für exakte wie für angenäherte Quadraturen einzusetzen (N. 2, 58).

Ab Januar 1675 wendet sich Leibniz wieder verstärkt den bereits 1673 von ihm praktizierten Verfahren zu, die er teilweise verallgemeinern kann: dem charakteristischen Dreieck (N. 22) und speziell der Segmentbestimmung durch den Transmutationssatz (N. 25, 31) sowie den Betrachtungen statischer Momente (N. 24). Diese Ansätze verfolgt er ab Oktober 1675 weiter (N. 33, 34, 35, 36) und gelangt schließlich in den drei Studien zur *Analysis tetragonistica ex centrobarycis* (N. 38, 40, 44) und in *Methodi tangentium inversae exempla* (N. 46) zu einer gewissen Synthese, die in der Einführung der Symbole dx und $\int$ auch formalen Ausdruck findet. Leibniz geht aus von der bekannten Gleichung für die Momente eines Flächenstücks unter einer Kurve bzgl. der Abszissen- und der Ordinatenachse, die er zunächst in der Schreibweise von Cavalieri angibt: „Omn. yx. ad $x \sqcap \frac{b^2c}{2}$ – Omn. $\frac{x^2}{2}$, ad y“ (b u. c sind die Werte der größten Abszisse bzw. Ordinate).

Leibniz bezeichnet die Gleichung als höchsten Gipfel der Schwerpunktmethode. Er hält fest, dass bei gegebenen Momenten einer Figur bzgl. zweier paralleler Achsen auch die Quadratur der Figur gegeben ist. Durch Anwendung des Momentsatzes auf die Ordinatendifferenzen formuliert er den Satz über die partielle Summation (Integration), der ihm schon länger bekannt ist (vgl. VII, 4 N. 10_2 u. 16_4 Teil 3). Beim Versuch, mit diesem und ähnlichen Sätzen weiterzurechnen, erweist sich die traditionelle Notation omn. als unhandlich, so dass Leibniz sie durch $\int$ ersetzt und als Gegenstück zunächst $\frac{x}{d}$, kurz darauf dx als Bezeichnung für die Differenzen einführt (s. u. den Punkt (2) im Abschnitt zur Notation und Rechentechnik). In der zweiten Aufzeichnung stellt er fest, dass genau die Kurven, deren Gleichung als Ergebnis einer Tangentenrechnung bei einer algebraischen Kurve erhalten wird, eine algebraische Quadratrix besitzen. Er ist sich allerdings nicht sicher, ob er über ausreichende Kriterien verfügt, entscheiden zu können, zu welcher Klasse eine beliebige gegebene Kurvengleichung gehört.

Leibniz zählt außerdem eine Reihe von verschiedenen Transformationsmethoden auf, durch die bisher unbekannte Quadraturen auf bekannte zurückgeführt werden können, darunter den Transmutationssatz. In dieser Phase stellt Leibniz auch erste Rechenregeln für den neuen Kalkül auf, z. B. für die lineare Transformation von Abszissen bzw. Ordinaten und die mehrfache Ausführung der Summation (N. 39, 40). Er erkennt, dass bei der Differentiation bzw. der Summation von Produkten und Quotienten nicht die Produkte und Quotienten der Differenzen bzw. Summen der Faktoren das richtige Ergebnis liefern, kann die korrekten Regeln aber noch nicht sofort aufstellen (N. 46). Die Produktregel für die Differentiation berechnet er am 27. November 1675 (N. 51_2). In N. 54_1 vom 21. Dezember 1675 notiert er, dass bei manchen Gleichungen mit Integralen die Grenzen der Summation berücksichtigt werden müssen, und nimmt sich vor, ein Zeichen dafür einzuführen. Außerdem versucht er, die Berechnung der Integrale von Wurzelausdrücken voranzutreiben (N. 60).

Zusammen mit dem neuen Ansatz versucht Leibniz in der Folgezeit, auch die ihm schon vorher geläufigen Verfahren für Transformationen von Integralen weiter fruchtbar zu machen, z. B. den Transmutationssatz (N. 73), das charakteristische Dreieck (N. 59, 61, 76, 77) oder die Schwerpunkt- und Momentbetrachtungen (N. 55, 81, 82, 83, 87). Zu nennen ist in diesem Zusammenhang insbesondere seine Verallgemeinerung der Guldinschen Sätze über Rotationskörper hinaus vom 18. Mai 1676 (N. 76, 77). Am 23. November 1675 greift er die Methode der ein- und umbeschriebenen Polygone wieder auf und empfiehlt die Verwendung bekannter summierbarer unendlicher Reihen, speziell von konvergierenden Doppelreihen nach dem Vorbild Gregorys (N. 50; vgl. auch N. 79 vom 26. Mai 1676).

Auf die Zusammenhänge zwischen Quadraturen und Reihensummierung verweist er des Öfteren (z. B. N. 54_1, 56, 57, 92).

Von Anfang an stehen Leibniz' Untersuchungen in der Infinitesimalmathematik in engem Zusammenhang mit seinen Arbeiten an der arithmetischen Kreisquadratur. So sind seine Entdeckungen des Jahres 1673 (charakteristisches Dreieck, Transmutationssatz) zuerst am Kreis erprobt und werden dann erst verallgemeinert. Generell versucht Leibniz, seine Ergebnisse schrittweise auf immer allgemeinere Klassen von Kurven auszudehnen. Insgesamt hofft Leibniz, alle Quadraturen auf die Kreis- und die Hyperbelquadratur zurückführen zu können (N. 52, 84). Im vorliegenden Band hängen besonders N. 7, 13, 82, 83 mit der Kreisquadratur, N. 2 mit der Quadratur der Kegelschnitte zusammen. Die N. 68, 69 und 74 behandeln zwar die höheren Parabeln und Hyperbeln sowie die Zykloide, stehen aber in direkter Verbindung mit der Abfassung der Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur. N. 89 und 92 erörtern Wege, zu einem Beweis der Unmöglichkeit einer Lösung des klassischen Problems der Kreisquadratur zu gelangen. Da die Quadratur der Parabeln und Hyperbeln grundsätzlich schon gelöst ist, befasst sich Leibniz bei ihnen hauptsächlich mit der Suche nach vereinheitlichenden Verfahren (N. 56, 79). Die Rektifikation der Hyperbel (N. 5, 39, 52, 56) bzw. Ellipse (N. 39, 56), damit zusammenhängend die Komplanation der Konoide (N. 6) bzw. allgemeiner Rotationskörper (N. 75) und die Rektifikation der höheren Parabeln bzw. Hyperbeln (N. 30, 58) behandelt er in zahlreichen Untersuchungen. Am 10. Oktober 1675 befasst er sich mit der Kubatur eines Kreiskegelstücks, einer Aufgabe, die ihm Dechales stellte (N. 32). Ab Dezember 1675 folgen weitere Studien zu Rektifikationen und Komplanationen (N. 52, 53, 56, 58, 75), sowie zu Rotationskörpern (N. 76, 77, 78). Das Verfahren von Bertet für die Quadratur der höheren Hyperbeln (vgl. III, 1 N. 76) erwähnt Leibniz im Januar 1676 (N. 64). Bei der Quadratur transzendenter Kurven oder den ungelösten Problemen der Rektifikation von Hyperbel und Ellipse versucht er, auch die inzwischen gewonnenen Erkenntnisse zu Evoluten und Evolventen und zu Rollkurven anzuwenden (N. 15, 16, 17, 18, 19, 23, 27_4, 52, 66, 76, 77).

(2) Transzendente Kurven

Leibniz sieht eine der wichtigsten Errungenschaften der zeitgenössischen Mathematik in der Erweiterung des Bereichs der Geometrie über die von Descartes gesteckten Grenzen hinaus. Besonders die Forderung nach der Beschränkung auf diejenigen Kurven, die durch eine algebraische Funktionsgleichung beschrieben werden können (von Descartes als „geometrisch", von Leibniz im Zeitraum dieses Bandes als „analytisch" bezeichnet), lehnt Leibniz ab. Er verweist auf die theoretische und praktische Bedeutung vieler Kur-

ven, welche diesem Kriterium nicht genügen, darunter die trigonometrischen und die Logarithmus- bzw. Exponentialkurven (N. 26). Leibniz forscht intensiv an einer exakten Behandlung dieser Kurven, die er seit Herbst 1673 als „transzendent“ bezeichnet (VII, 3 N. 23). So befassen sich bereits die beiden ersten Stücke des Bandes vom Sommer 1674 mit solchen transzendenten Kurven: In N. 1 untersucht er die durch $y = \frac{x^x}{a^{x-1}}$ gegebene Kurve, in N. 2 setzt er sich u. a. mit der Logarithmuskurve auseinander (später auch in N. 57, 59, 88). Gegen Ende des Jahres entwickelt er den Gedanken, die geometrischen Konstruktionen zur Approximation des Kreises dafür zu verwenden, vom Kreis abhängige transzendente Kurven, speziell die Zykloide, durch eine algebraische Kurve zu approximieren (N. 13). Neben den bereits erwähnten Beispielen widmet Leibniz noch weiteren transzendenten Kurven Untersuchungen, die nicht selten durch seine wissenschaftlichen Kontakte veranlasst sind: Im Herbst 1673 hatte Leibniz durch Ozanam von einer Kurve erfahren, die sich Bertet ausgedacht hatte. Leibniz untersuchte diese Kurve, deren Radiusvektor durch die Summe aus dem Radius und dem abgewickelten Bogen eines gegebenen Kreises definiert wird, und bestimmte ihre wichtigsten Eigenschaften (VII, 4 N. 50). Als er Anfang November 1675 einen Brief an Bertet entwirft (III, 1 N. 68), setzt er sich wieder mit der Kurve auseinander (N. 45), die er auch später noch erwähnt (N. 63, 64). Bei der ersten Studie zur Quadratrix vom April 1676 (N. 70) verwendet er die Figur und die Tangentenkonstruktion aus Robervals Manuskript *Observations sur la composition des mouvemens*, bei der zweiten vom Juni 1676 (N. 86) die Figur und zwei Gleichungen aus Barrows *Lectiones geometricae*. In N. 70 verallgemeinert Leibniz die Konstruktionsvorschrift für die Quadratrix, in N. 86 versucht er, durch Einbeziehung der Zykloide und der Kreisevolvente weitere Einsichten über die Quadratrix zu gewinnen. Häufig setzt sich Leibniz mit der Zykloide auseinander, bei der ihm schon 1673 die Quadratur eines Segments geglückt war (VII, 4 N. 17), die er mehrfach als Beispiel heranzieht (N. 11, 31, 42). Ende April bis Anfang Mai 1676 entwirft er eine zusammenfassende Studie zur Quadratur der Zykloide (N. 74) und behandelt kurze Zeit später auch noch weitere Einzelfragen (N. 77, 86, 87).

(3) Andere Themen

Am Rande der Thematik des vorliegenden Bandes liegen Überlegungen zum Unendlichen. In einer Anmerkung zu N. 1 formuliert Leibniz den Satz, dass die Anzahl der Einheiten in allen Zahlen kleiner ist als die Anzahl der Punkte in einer beliebigen Linie, ist sich aber nicht sicher, wie das beigefügte Symbol ℜ für „deliberetur“anzeigt: „In omnibus unitatibus seu Numeris non sunt tot unitates quot in aliqua linea puncta“. Statt des von Wallis

eingeführten Symbols ∞ für unendlich schlägt Leibniz den Ausdruck $\frac{a^2}{0}$ vor, wobei 0 für ein unendlich kleines Geradenstück steht: „Infinitum ita exprimit Wallisius ∞. sed rectius divisione finiti spatii per rectam infinite parvam 0. v. g. $\frac{a^2}{0}$“ (N. 24). Leibniz weist an verschiedenen Stellen auf die Bedeutung von Koordinatentransformationen hin und versucht, sie als Hilfsmittel einzusetzen (N. 15, 20, 26, 37, 39, 51_2, 84, 88, 93, 94, 95, 96). Eine Notiz zur Analysis situs am Ende von N. 76 enthält eine Definition der Relation „zwischen“ für drei Punkte auf einer Geraden. In N. 7_1 und N. 7_2 versucht Leibniz, die Anwendung der Neunerprobe auf Brüche auszuweiten. In einem weiteren Exkurs formuliert er Sätze über Operationen mit Gleichungen in zwei Unbekannten und merkt an, dass es sich hier nicht um Aussagen über Quantitäten, sondern über Qualitäten handle, die ebenfalls streng behandelt werden könnten (N. 7_3). Bei anderer Gelegenheit notiert er Überlegungen zu verschiedenen Arten mathematischer Sätze (N. 55). Beziehungen zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften werden behandelt in Überlegungen zur Mechanik (N. 2, 24, 46, 58, 76), Optik (N. 17), Statik (Beweis des Hebelgesetzes, N. 57, 62) und Hydraulik (N. 64). N. 63 enthält Gedanken zur Zeichentheorie.

Tschirnhaus-Stücke

Tschirnhaus ist Ende September 1675 in Paris eingetroffen und hat sich vermutlich am 1. Oktober Leibniz vorgestellt (s. III, 1 S. LXII). In der Folgezeit kam es bis zu Leibniz' Abreise aus Paris im Oktober 1676 zu häufigen Zusammentreffen und Gesprächen zu vorwiegend mathematischen Themen, die durch zahlreiche Gesprächsaufzeichnungen dokumentiert sind. Allem Anschein nach war die Begegnung mit Tschirnhaus für Leibniz von nicht geringer Bedeutung. Unter anderem dürfte darin auch der Anstoß für die Wiederaufnahme der Studien zur Infinitesimalmathematik im Oktober 1675 zu sehen sein. Im vorliegenden Band sind diejenigen Gesprächsaufzeichnungen abgedruckt, die sich schwerpunktmäßig mit diesem Bereich beschäftigen. Es handelt sich um die sechs gemeinsamen Aufzeichnungen N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1 und 80. Weitere Inhalte aus gemeinsamen Unterredungen erschließen sich zudem aus Erwähnungen in Studien von Leibniz (N. 38, 51_2, 52 und 73).

Im Oktober 1675 führt Leibniz Tschirnhaus seine Quadratur des Zykloidensegments und seine Kreisquadratur mittels der Kreisreihe vor. Er zeigt außerdem die Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division am Beispiel der Hyperbelquadratur (N. 42). Ähnliche Reihenentwicklungen berechnet Tschirnhaus in N. 62 vom Januar 1676.

Die später so genannte Maclaurinsche Trisektrix wird von Tschirnhaus im November 1675 als die Kurve definiert, deren Fläche gleich dem statischen Moment der Ordinate des Halbkreises bzgl. der Ordinatenachse ist. Tschirnhaus stellt die Kurve sowohl durch ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten wie durch eine Verhältnisgleichung einfacher geometrischer Größen dar (N. 49). Im selben Gespräch führt Tschirnhaus eine Extremwertberechnung nach der Methode von Fermat durch, er verwendet die Transmutationsmethode von Gregory und zeigt außerdem eine Tangentenrechnung nach seiner eigenen Methode. Eine solche findet sich auch in N. 67_1. In einem anderen Beispiel behandeln Leibniz und Tschirnhaus die inverse Tangentenmethode durch Umkehrung der Normalenmethode von Descartes (N. 51_1). Daneben wird auch in diesen Stücken immer wieder auf die Kreis- und die Hyperbelquadratur Bezug genommen, besonders in N. 80. Außerhalb des eigentlichen Themenspektrums des Bandes fallende Inhalte der Gespräche sind imaginäre Größen (Darstellung in der Ebene, N. 52) und Statik (Hebelgesetz, N. 62).

Terminologie

(1) Quadraturen, Rektifikationen und Differenzen

Neben quadratura verwendet Leibniz auch dimensio oder tetragonismus, eine Gleichung mit einem Integralausdruck nennt er aequatio tetragonistica (N. 40, 54_1, 55, 56, 60). Rektifikation bezeichnet er meist mit dimensio curvae oder extensio, Rektifikation oder Komplanation auch mit expansio, vereinzelt verwendet er curva mensurabilis (N. 30) und curva rectificabilis (N. 38, 87).

Mit quadratrix wird in der Regel die Stammfunktion einer Kurve bezeichnet, manchmal aber auch eine Kurve, deren Quadratur die Quadratur der gegebenen Kurve liefert, z. B. die durch den Transmutationssatz erzeugte Kurve. Ihr Gegenstück ist die figura differentiarum, deren Quadratur die Ausgangskurve ergibt (N. 2).

Leibniz verwendet verschiedene Begriffe, um Kurven zu bezeichnen, deren Quadraturen bzw. Rektifikationen ineinander übergeführt werden können: homogenea (N. 7_4, 8, 17, 22, 33, 34, 40, 50, 86), commensurabilis (N. 34, 35, 39), sylloga, syndota, sygnota (N. 18, 53, 73). Im Januar 1676 erprobt er die Bezeichnung corresolubilis und nimmt sich vor, ein Symbol dafür einzuführen (N. 6). Er bezeichnet speziell eine Kurve $f(x)$ als homolog (oder homogen) zu einer Figur $g(x)$, wenn gilt: $g(x) = \sqrt{f'(x)^2 + 1}$ und damit die Bogenlänge der Kurve gleich der Fläche der Figur ist (N. 2, 16, 17, 20, 38); z. B. ist die Kurve der Parabel einer Hyperbelfläche homolog (N. 2).

Die Differenzen benachbarter Kurvenordinaten bezeichnet Leibniz meist mit differentia, vereinzelt verwendet er differentiola (N. 77, 86). Das Adjektiv differentialis hat Leibniz bereits 1673 einschlägig gebraucht (VII, 4 N. 17), es wird aber im vorliegenden Band in der Grundstufe der Texte nur in N. 96 vom November 1676 benutzt, sonst tritt es in einer späteren Anmerkung (N. 44) bzw. in ergänzten Überschriften auf (N. 60, 93, 96).

(2) unendlich klein

Gegenüber den Schriften des Jahres 1673 ist die Varianz der Bezeichnungen für unendlich klein deutlich zurückgegangen: Der Ausdruck infinitesima wird von Leibniz im vorliegenden Band nur selten verwendet (N. 2, 50, 51_2), dies gilt auch für das vorher häufige minor assignabili (N. 40, 50, 68). In der Regel bezeichnet er eine unendlich kleine Größe mit infinite parva. Eine solche Größe setzt er auch vereinzelt gleich 0 (N. 24) oder sagt, dass Größen, die nur eine unendlich kleine Differenz aufweisen, gleich sind (N. 27_4). Gelegentlich spricht er auch von einer infinita parvitas (N. 16). Den Begriff indivisibilis verwendet Leibniz in diesem Zusammenhang fast nur mehr für die Bezeichnung der Indivisibilienlehre (N. 44, 46, 50, 51_2, 76), nur einmal nennt er eine unendlich kleine Größe minima seu indivisibilis (N. 88).

Zur Notation und Rechentechnik

(1) Vorzeichen:

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz seit dem Sommer 1673 Doppelvorzeichen (signa ambigua). Ihre Bildung erfolgt überwiegend paarweise. Offenbar bevorzugt Leibniz bis etwa Mitte 1674 die Form $\doteqdot$, $\Doteqdot$; danach bis Ende 1674 $\dagger$, $\ddagger$ (N. 6, aber auch noch in N. 22, 24); später hauptsächlich $\dagger$, $\dagger$ (N. 27, 33 etc.). 1676 verwendet er auch die gebräuchlichen $\pm$, $\mp$ (z. B. N. 68). Es treten auch zusammengesetzte Zeichen auf, die Unterscheidungen in mehr als zwei Fälle signalisieren (N. 18, 21, 22); vgl. *De la méthode de l'universalité* (gedr. in Couturat, *Opusc. et fragm.*, S. 97–143). Vereinzelt verwendet Leibniz auch griechische Buchstaben als Symbole für Vorzeichen (N. 29). Beispiele:

$$\begin{array}{lll} (1)D, \text{ dat:} & TD \sqcap -TA + AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (2)D \ \ldots & TD \sqcap +TA - AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (3)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap -EC + CL \\ (4)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap +EC - CL \end{array}$$

Generaliter ergo TD ita exprimemus:

$$TD \sqcap \ddagger TA \ddagger AD\,, \quad EL \sqcap \ddagger EC \ddagger CL. \text{ (N. 18)}$$

$\frac{+\ddagger x\ +\ddagger b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. (...) Sic clarius: $\frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. (N. 29)

(2) Operationen:

Bei den arithmetischen Grundoperationen, vor allem mit Brüchen, verzichtet Leibniz manchmal auf die sonst von ihm gebrauchten Zeichen +; −; ⌢; ⌣ sowie auf ein Gleichheitszeichen und setzt das Ergebnis lediglich durch einen größeren Zwischenraum von den Operationen ab. Häufiger werden aber die Verbindungen von Zählern und Nennern durch Striche angezeigt, bei Addition, Subtraktion und Division dementsprechend meist durch liegende Kreuze und zusätzliche Zeichen (N. 88). Zeitgemäß sind die Überwärtsdivision (N. 7_1) und das Überwärtswurzelziehen (N. 24) mit ihren charakteristischen Streichungsschemata.

Zu Beginn seines Parisaufenthalts verwendet Leibniz für Gleichheit manchmal ein *f.* oder *f* für facit, das er auch später in stilisierter Form $\int$ noch bei Nebenrechnungen gebraucht (N. 4, 7_1), meist aber unser heutiges Gleichheitszeichen. Dies gilt für alle datierten mathematischen Handschriften von 1673 bis Anfang 1674, ab Juni 1674 ist der Gebrauch des Gleichheitszeichens ⊓ (stilisierter Waagebalken mit zwei gleichen Gewichten) belegt. Ein wechselnder Gebrauch der beiden Symbole (von offensichtlich späteren Zusätzen abgesehen) ist bei Handschriften Pariser Provenienz selten (z. B. N. 5). Im Laufe des Jahres 1676 kommen zusätzlich aequ. bzw. aeq. (auch ohne Punkt) in Gebrauch (N. 68, 69, 70). Leibniz verwendet die Symbole ⊓ für größer und ⊓ für kleiner.

Potenzen stellt Leibniz meist mit hochgestellten Exponenten dar, daneben benutzt er $\boxed{2}$ u. ä. Beispiele:

$\boxed{\frac{1}{2}}x$. id est $\sqrt{x}$ (N. 88) $\qquad c \overset{(8)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d}$. et $c^{\omega} \overset{(9)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d}{}^{\sim\omega}$. (N. 68)

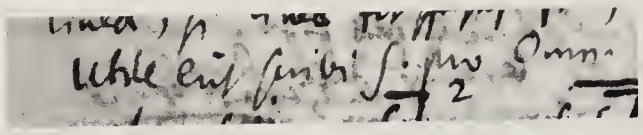
Für die Darstellung von Wurzeln verwendet Leibniz ab dem Frühsommer 1673 das Wurzelsymbol, wobei er in der Regel keinen Wurzelbalken setzt, wenn der Radikand eindeutig bestimmt ist (z. B. N. 1). Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor- wie nachgestellt.

Beispiele für höhere und unbestimmte Wurzeln:

$\sqrt{③2ax^2 + x^3}$ (N. 1) $\qquad \sqrt{\overset{z-1}{\bigcirc}\frac{x^{2z}}{a^2}}$ (N. 30)

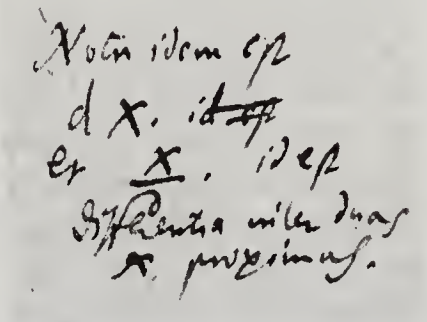
Ab Ende Oktober 1675 führt Leibniz schrittweise die Symbole *d* und $\int$ für Differentiation und Integration ein. In N. 40 vom 29. Oktober ersetzt er zunächst die von

Cavalieri übernommene Bezeichnung omnes durch die Abkürzung für summa, das später so genannte Integralzeichen $\int$:



LH 35 VIII 18 Bl. 2 v° (Ausschnitt)

Anschließend benutzt er d als Abkürzung für differentia. Um die Verminderung der Dimension bei der Differentiation anzuzeigen, entwirft Leibniz zunächst eine Bruchschreibweise, bei der er das Symbol d in den Nenner stellt. Nach wenigen Tagen gibt er diese wieder auf und ersetzt in N. 46 vom 11. November 1675 den Bruch $\frac{x}{d}$ durch das Symbol dx:



LH 35 V 9 Bl. 1 v° (Ausschnitt)

Leibniz gelangt damit zu einer Bezeichnungsweise, die Differentiation und Integration analog behandelt, und legt so den Grundstein für die moderne Notation. Dennoch verwendet er auch danach noch ältere Bezeichnungen wie diff. (N. 51_2, 70, 79), omn. (z. B. N. 55, 70, 76, 77, 86) und sum. bzw. summ. (N. 70, 79, 86), teilweise auch neben den neuen Symbolen, und sehr häufig weiterhin β und ω für die Differenzen der Abszissen bzw. Ordinaten; vereinzelt kommt in frühen Texten noch die unitas constructionis 1 als Abszissendifferenz vor (N. 5 Teil 3):

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2x + 1} - \sqrt{a^2 + x^2} \sqcap \frac{z}{a}$$

Bei zusammengesetzten Ausdrücken schreibt Leibniz manchmal auch das Operationszeichen unter und nicht vor den Klammerbalken (N. 40, 53).

(3) Klammern:

Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken (vinculum) sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. ⌞ und ⌟ wiedergegeben). Manchmal zeigen die Klammern auch die Schritte einer fortlaufenden Rechnung an. Beispiel (N. 39):

$$t^2 \sqcap \omega^2 \boxed{2} \frac{\overline{-2h - lz - n}}{2gz + l\omega + m}. \text{ Ergo } \llcorner\llcorner \frac{\omega^2}{t^2} \sqcap \llcorner\llcorner\llcorner \boxed{2} \frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n} \lrcorner\lrcorner + 1 \lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqrt{\ } \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap s.$$

Dies entspricht den folgenden Umformungen:

$$[\mathrm{I}]\ t^2 = \omega^2 \left(\frac{-2h - lz - n}{2gz + l\omega + m}\right)^2, \quad [\mathrm{II}]\ \frac{\omega^2}{t^2} = \left(\frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n}\right)^2,$$

$$[\mathrm{III}]\ \sqrt{\left(\frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n}\right)^2 + 1} = s.$$

(4) Wiederholungszeichen und Indexbezeichnungen:

Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz wiederholt auftretende Bestandteile der Formeln (sowohl Operatoren wie Terme) durch entsprechende Punktierung bzw. durch einfaches Freilassen. Die Punktierung gibt manchmal die Dimension des wiederholten Elements wieder. Beispiel (N. 67_2):

$$\left.\begin{array}{r} - \quad b^2 f\, y^2 - \ 4bctf\, y - 4c^2t^2 f \\ - \ b^2 e\, y^3 - \ 4bcte\ .. \ - 4c^2t^2 e\ . \\ - \ b^2 y^4 - 4bct\ ... - 4c^2t^2 e\ .. \end{array}\right\} \sqcap ☿ \mathfrak{D}^2.$$

Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz nach dem Vorbild von Descartes gelegentlich vorangestellte Ziffern (N. 58, 86). Üblich ist bei ihm auch sukzessive Klammerung, die ihrerseits wieder durch Ziffern oder sogar Variablen dargestellt werden kann. Beispiel (N. 50):

$$\begin{array}{cc} x & y \\ (x) & (y) \\ ((x)) & ((y)) \end{array}$$

$(x) \sqcap \sqrt{xy}$ seu (x) media geometrica inter x et y vel $((x)) \sqcap \sqrt{(x)(y)}$ etc. vel generaliter $(\overline{\omega}(x)\overline{\omega}) \sqcap \sqrt{(\overline{\omega - 1}(xy)\overline{\omega - 1})}$

(5) Auslassungszeichen:
Nicht auftretende bzw. wegfallende Terme werden wie bei Descartes durch den Asterisk $*$ angezeigt (N. 8, 17).

(6) Koeffizienten:
Binomialkoeffizienten: Leibniz hebt diese Koeffizienten gelegentlich als wesentliche Zahlen (numeri essentiales) durch besondere Kennzeichnung hervor. Beispiel (N. 7_1):

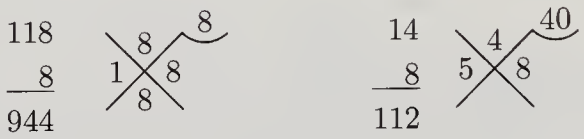
$$1x + \frac{6l}{a}\,y - 7m \sqcap 0, \text{ et quadrando fiet:}$$
$$x^2 + \boxed{2}\frac{6l}{a}yx - \boxed{2}7mx, + \frac{36l^2}{a^2}y^2 - \boxed{2}42\frac{lm}{a}y + 49m^2 \sqcap 0$$

(7) Leibniz rechnet gelegentlich fortlaufend, d. h. er verwendet bei Gleichungsketten Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter, s. o. das Beispiel unter (3).

(8) Leibniz schreibt in Anlehnung an Viète Gleichungen oft homogen. Das Verfahren dient überwiegend zur Rechenkontrolle, ohne dass es immer konsequent durchgeführt wird. Wechsel zwischen homogener und inhomogener Schreibweise kommen manchmal vor, z. B. in N. 96.

(9) Zur Überprüfung algebraischer Rechnungen setzt Leibniz oft spezielle Zahlenwerte ein, die den betreffenden Größen beigefügt werden (s. o. das Beispiel zu (6)).

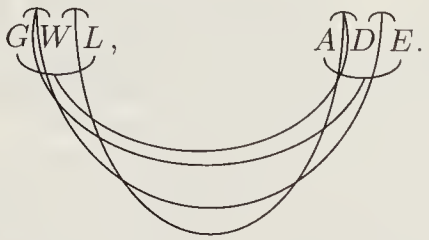
N. 7 enthält darüber hinaus einen Exkurs zur Neunerprobe, die Leibniz bei rein numerischen Rechnungen meist mit dem üblichen Neunerprobenkreuz darstellt. Beispiel (N. 7_1):



Im folgenden Beispiel geben die Zahlen in einfachen Klammern den Neunerprobenwert von Zähler bzw. Nenner an (N. 7_3):

$$\begin{array}{c} (5)((1)) \\ -\boxed{2}\ \widehat{}\ -128\text{ɔ}a^2\boxed{8} \\ \hline 8r38\text{ɴ}\boxed{2}8r \\ (4) \end{array}$$

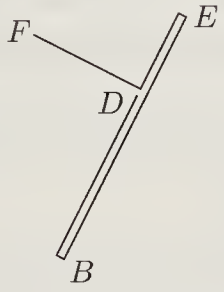
(10) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere Zuordnungsstriche. Beispiele:



Triangula similia (...) habebimus aequationes
$GW, AE \sqcap GL, AD.$
$GW, DE \sqcap WL, AD.$
$GL, DE \sqcap WL, AE.$

(N. 33)

FD soit à DE, comme EB à BD (...)



(N. 63)

(11) Umformungen:
Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz in der Regel mittels mehrfacher Klammerung, Streichungen oder abgerundeter Umrahmungen angezeigt. Davon zu unterscheiden ist die Hervorhebung gültiger Terme, die durch kreisförmige, ovale oder eckige Umrahmungen wiedergegeben wird. Die Reihenfolge der Rechenschritte kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichungen oder durch beigefügte Zähler. Dabei werden im Rechengang neu auftretende Koeffizienten oder Terme gelegentlich mit entsprechend indizierten leeren Rahmen oder mit Sonnensymbolen versehen. Beispiele:

$$2\textcircled{5}e^2d^2 - d^4 + 2\square p^2d^2 - 4\textcircled{2}avd^2 - 2d^3e, -6\textcircled{5}e^2p^2\boxed{+d^2p^2} - p^4 +$$
$$4\textcircled{2}avp^2 + 2dep^2, +12\textcircled{10}ave^2\boxed{-2avd^2}\boxed{+2avp^2} - 4a^2v^2 - 4avde$$
$$\sqcap$$
$$e^4\boxed{+e^2p^2}\boxed{-2e^2av} - 2e^3d\boxed{+3d^2e^2}. \qquad (\text{N. } 7_3)$$

$$2\frac{a^2}{b^2}\omega^2\, y\, l \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\omega l \sqcap \quad 2a^2\ \omega^2 \quad \mp 2a^2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \omega \boxed{-2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \omega a^2}$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\omega^2 \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\omega}}$$

(N. 33)

Bei Mehrfachstreichungen werden aus Gründen der Lesbarkeit die betreffenden Größen nur einmal durchgestrichen und die Anzahl der Streichungen durch darüber (darunter) gesetzte Schrägstriche in entsprechender Häufigkeit angezeigt. Beispiel (N. 5):

$$+\frac{z^4}{a^4} - 4z^2 - \frac{4z^2x^2}{a^2} - \frac{4z^2\beta x}{a^2} + 3a^4 + 6a^2x^2 + 6\beta a^2 x + 3x^4 + 6\beta x^3 + 4\beta^2x^2 \sqcap$$

$$a^4 + 2a^2x^2 + 2\beta x a^2 + x^4 + 2\beta x^3$$

(12) Besondere Zeichen:
In N. 7_3 führt Leibniz das Zeichen $\sim$ für ähnlich ein, in N. 37 verwendet er $\textcircled{I^y}$ zur Kennzeichnung einer Folge mit Index y, in N. 56 einfache Punkte und stehende bzw. liegende Doppelpunkte als Platzhalter für unbestimmte Koeffizienten bzw. Exponenten:

$$M(\sqcap \sqrt[\cdot\cdot]{\cdot m^{\cdot}} + : m^{\cdot\cdot} \text{ etc.}) \sqcap m$$

Siegmund Probst Uwe Mayer

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Insbesondere gilt:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird gemäß den Editionen der Klassiker normalisiert. Insbesondere werden i und j sowie u und v entsprechend vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Missverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, dass bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Auch die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der Ausgabe. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluss eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist L) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

INFINITESIMALMATHEMATIK 1674–1676

1. DE FIGURA AD ALTIOREM SEMPER ATQUE ALTIOREM AEQUATIONEM ASCENDENTE

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 323. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 323 r°. Bl. 323 v° leer. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie VII, 3 N. 32–34.

Si sit Curva, cujus applicatae sint progressionis harmonicae, videri poterat irreducibilis ad aliquam aequationem, et contra est tamen, cum sit Hyperbola. Inquirendum est in figuram, quae ad altiorem semper atque altiorem aequationem ascendat, ut ejus applicata maxima sit Trianguli, sequens Parabolae, rursus sequens parabolae cubicae, et ita porro. Nihil video quod prohibeat eam esse Geometricam, describi tamen, non potest, opinor. Sed puto tamen tangentium ejus loca seu loca functionum esse aequationis capacia. Poterit sic exprimi $\frac{x^\beta}{a^{\beta-1}} = y$. Et aequatio erit: $x^\beta = ya^{\beta-1}$. Unde investi-

---

8 *Darüber:* In omnibus unitatibus seu Numeris non sunt tot unitates quot in aliqua linea puncta $\mathfrak{R}$.

8–10 *Am Rande:* Inquirendum in curvam cujus applicatae sunt progressionis geometricae vel compositae.

11 applicata *(1)* minima *(2)* maxima *L* 13 esse *(1)* Geometrica. *(2)* aeqvationis *L*

---

10 figuram: Die von Leibniz gegebene Beschreibung der Kurve läuft auf die Gleichung $x^x = ya^{x-1}$ hinaus. Der Ansatz der Kurvengleichung als verallgemeinerte Parabelgleichung führt deshalb bei der Bestimmung der Subtangente nicht zum richtigen Ergebnis.

gatio tangentium haec: $\beta p x^{\beta-1} = y a^{\beta-1}$, seu $p = \frac{y a^{\beta-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{x^{\beta}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{x}{\beta}$. Et quoniam numeri β. crescunt cum ipsa x. uniformiter, ideo p semper erit eadem, seu infinite parva, et ideo tangens ducenda in idem semper punctum, nempe verticem, et ideo figura erit Triangulum. Si inverso modo sumas applicatas parabolarum ad axem, erit $p = \beta x$, et ideo infinite longa seu figura erit rectangulum.

$2ax^2 + x^3 = y^3$. fiet $4apx + 3px^2 = 3y^3$. Ergo $p = \frac{6ax^2 + 3x^3}{4ax + 3x^2} = \frac{6ax + 3x^2}{4a + 3x} = \frac{2ax + x^2, \hat{} 2}{4a + 3x}$ vel $\frac{2ax^2 + x^3, \hat{} 2}{4ax + 3x^2}$[,] per p dividatur $y, = \sqrt{③ 2ax^2 + x^3}$, fiet $\frac{\sqrt{③ 2ax^2 + x^3} \hat{} 4ax + 3x^2}{\sqrt{③ 2ax^{[2]} + x^3} \hat{} \sqrt{③ 2ax^{[2]} + x^3} \hat{} \sqrt{③ 2ax^{[2]}}[+x^3]} = \frac{4ax + 3x^2}{\sqrt{③ ‚‚2ax^2 + x^3‚ \hat{} ‚2ax^2 + x^3}} =$

---

1 *Am Rande:* $ax^2 = y^3$
$2axp = 3y^3$

5 *Darunter:* An fortasse infinitae varietates varietatum componunt denique figuram quoniam infinitae paraboloeides, tot scil. quot numeri, non nisi lineam componunt.

2 ideo *(1)* tangens *(2)* p *L* 8–5,1 $\frac{\sqrt{③ 2ax^2 + x^3} \hat{} 4ax^2 + 3x^2}{\sqrt{③ 2ax + x^3} \hat{} \sqrt{③ 2ax + x^3} \hat{} \sqrt{③ 2ax}} = (1) \frac{4ax + 3x^2}{\sqrt{③ ‚2ax^2 + x^2‚}}$ *(2)* $\frac{4ax + 3x^2}{\sqrt{③ ‚‚2ax^2 + x^3‚ \hat{} ‚2ax^2 + x^3}} = |\sqrt{③}$ *erg. Hrsg.*$| \frac{64a^3x^3 + 144a^2x^4 + 108ax^5 + 27x^6}{2a^2x^4 + 4ax^5 + x^6}$ *L* 11 infinitae *(1)* aeqvationum *(2)* varietates *L*

---

7 $\frac{2ax + x^2, \hat{} 2}{4a + 3x}$: Richtig wäre $\frac{2ax + x^2, \hat{} 3}{4a + 3x}$. Leibniz rechnet vom nächsten Rechenschritt an nur noch mit $\frac{2ax + x^2}{4a + 3x}$.

$\sqrt{③}\,\frac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2a^2x^4+4ax^5+x^6} = \sqrt{③}\,\frac{64a^3+144a^2x+108ax^2+27x^3}{2a^2x+4ax^2+x^3}$ quadrabile.

4,8–5,1 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 16a^2x^2 + & 24ax^3 + & 9x^4 & \\
 & & 4ax + & 3x^2 & \\
\hline
 & 48a^2x^4 + & 72[a]x^5 + & 27x^6 & \\
64a^3x^3 + & 96a^2x^4 + & 36[a]x^5 & & \\
\hline
64a^3x^3 + & 144a^2x^4 + & 108ax^5 + & 27x^6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
96 \\ 48 \\ \hline 144
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
72 \\ 36 \\ \hline 108
\end{array}$$

$2a^2x^4+4ax^5+x^6$

4 *(1)*
$$\begin{array}{rrrr}
 & 16\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2 + & 24\mathrm{ax}^3 + & 9\mathrm{x}^4 \\
 & & 4\mathrm{ax} + & 3\mathrm{x}^2 \\
\hline
 & 48\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4 + & 72\,\mathrm{x}^5 + & 27\mathrm{x}^6 \\
64\mathrm{a}^3\mathrm{x}^3 + & 96\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4 + & 36\,\mathrm{x}^5 & \\
\hline
64\mathrm{a}^3\mathrm{x}^3 + & 144\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4 + & 108\mathrm{ax}^5 + & 27\mathrm{x}^6
\end{array}$$
$$\frac{64\mathrm{a}^3\mathrm{x}^3+144\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4+108\mathrm{ax}^5+27\mathrm{x}^6}{2\mathrm{ax}^2+\mathrm{x}^3} = \frac{64\mathrm{a}^3\mathrm{x}+144\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2+108\mathrm{ax}^3+27\mathrm{x}^4}{2\mathrm{a}+\mathrm{x}}$$ | haec figura est qvadrabilis. *streicht Hrsg.* | *(2)* $16\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$ *L*

---

9 $2a^2x^4+4ax^5+x^6$: Richtig wäre $4a^2x^4+4ax^5+x^6$. Leibniz übernimmt das fehlerhafte Ergebnis aus der Nebenrechnung in die weitere Rechnung.

2. DE CURVIS HOMOLOGIS. DE QUADRATRICE HYPERBOLAE

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 233–234. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S.
Cc 2, Nr. 1101

Datierungsgründe: s. N. 1.

[*Teil 1*]

1			1					
	1			9				
2		1	10		81			
	2			90			729	
4		2	100		810			
	4			900				
8		4	1000		8100			
	8			9000				
16		etc.	10000		81000			
	etc.			90000				
32			100000					
64								
128								
256								
512								
1024								
2048								
4096								

[*Teil 2*]

Quotiescunque terminus unus numeratoris est in nominatore tunc divisionis portio fieri, subtrahique potest ab unitate vel parallelogrammo ut $\frac{2ay^2}{y^2+a^2} = 2a - \frac{2a^3}{y^2+a^2} =$ $a \frown 2 - \frac{2a^2}{y^2+a^2}$. Jam $2 - \frac{2a^2}{y^2+a^2}$, vel $1 - \frac{a^2}{y^2+a^2} = \frac{a^2+y^2-a^2}{y^2+a^2} = \frac{y^2}{y^2+a^2}$ sed et dici poterat $\frac{y^2}{y^2} - \frac{a^2}{y^2+a^2} = \frac{y^4+a^2y^2-a^2y^2}{y^4+a^2y^2}$ quae omnia eodem redeunt.

[*Teil 3*]

Curva sinubus Homologa

Quadrato sinus auferatur a^2: residui Radix quadrata dat differentias figurae cujus Curva sinubus homologa. Fiet: $\sqrt{2ax-x^2-a^2}$ sed quia necesse est esse a quod subtrahitur minus quam x, ideo fiet potius $\sqrt{2ax-x^2-a^2-x^2+2ax}$ sive $\sqrt{4ax-2x^2-a^2}$. Imo sic potius: Quadratum constans quod subtrahendum est, debet esse minus quam x^2, potes ergo sumi cujus voles parvitatis, ut quam longissime progredi possis ad minutissimos etiam sinus. Sed quod omnibus x minus sit, seu quod sit omnibus analogum sumere non potes. Deberet enim esse punctum. Jam ergo assumatur ba, pro quadrato constante subtrahendo, vel posito $b = \frac{a}{2}$, fiet $\frac{a^2}{2}$. et habebimus $\sqrt{2ax-x^2-\frac{a^2}{2}}$. Ergo

vel $\left(\frac{a^2}{3}\right)$

etc.

$2ax - x^2 = y^2 + \frac{a^2}{2}$. Sed hoc intractabile. Ergo pro sinubus sumamus: $a^2 - x^2 = y^2$,

3 ut | $\frac{2ay^2}{y^2+a^2}$ *ändert Hrsg.* | = 2a *L* 7 *(1)* Figura *(a)* segmentis circuli *(b)* sinubus *(2)* Curva *L* 7 f. Homologa *(1)* $\sqrt{2ax - x^2 - a^2}$ = dif *(2)* Qvadrato sinus *(a)* addatur a^2 fiet: $2ax - x^2$ *(b)* auferatur a^2 | fiet *streicht Hrsg.* |: residui *L* 9 Curva *(1)* Circulo *(2)* sinubus *L* 11 potius: *(1)* pro a^2 substituatur b^2, *(2)* Qvadratum *L*

7 sinubus: Im Folgenden ist der sinus als Ordinate des Halbkreises aufzufassen.

unde subtrahendo aliquod quadr. constans, v. g. $= \frac{a^2}{2}$ fiet $\frac{a^2}{2} - x^2 = y^2$. Ergo Circuli alterius, cujus radius minor est radio dati, figura quadratrix habet Curvam sinubus homologam. Idem de Hyperbola eodem modo demonstratur, cum ejus aequatio possit esse $a^2+x^2 = y^2$, unde eodem modo fit: $\frac{a^2}{2}+x^2 = y^2$. Atqui alibi ostensum est Curvam Parabolicam esse figurae Hyperbolicae homologam. An ergo Parabola Hyperbolae quadratrix intelligi potest, non opinor, ista ergo conferenda ac concilianda sunt.

Inquiramus nunc in Curvas figuris cognitis, ut Triangulo, Parabolae, homologas.

Trianguli aequatio est $x = y$. Fiet: $\sqrt{x^2 - a^2} = y$ et pro x posito $a+x$, fiet $\cancel{a^2} + x^2 + 2ax - \cancel{a^2} = y^2, = 2ax + x^2$. Ergo Figura Quadratrix Hyperbolae curvam habet Triangulo homologam.

Trilinei Parabolici aequatio est $\frac{x^2}{a} = y$. Fiet regula nostra: $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$. sive $x^4 - a^4 = a^2y^2$, et pro x posito $a+x$, fiet $a^2+2ax+x^2, \square = a^4+4a^3x+2a^2x^2+4a^2x^2+4ax^3+x^4$ sive $\sqrt{\cancel{a^4} + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 - \cancel{a^4}} = ay$. et hujus figurae quadratrix curvam habet Trilineo parabolico homologam. Ipsa figura autem differentiarum videtur esse ex Hyperboloeidum genere. Unde fieret $a + x = \sqrt{\sqrt{a^2y^2 + a^4}}$ sive pro $a + x$ posito x fieret: $x^4 = a^2y^2 + a^4$. vel $\frac{x^4}{a^2} = y^2 + a^2 = y + a, \frown a - y$ vel $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$ ut ante.

$\vee$

$n \quad \frown n - 2y$

2 Curvam *(1)* Circulo *(a)* sy *(b)* homo *(2)* sinubus *L* 4 $\frac{a^2}{2} - x^2$ *L ändert Hrsg.* 14 parabolico *(1)* homogeneam *(2)* homologam *L* 15 $a + x =$ *(1)* $\sqrt{\sqrt{a^2y^2 + a^4}}$ *(2)* | $\sqrt{a^2y^2 + a^4}$ *ändert Hrsg.* | sive *L*

4 ostensum: H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520. 16 $y^2+a^2 = y+a, \frown a-y$: Die Zerlegung von y^2+a^2 ist fehlerhaft. In der Nebenbetrachtung (s. S. 9) setzt Leibniz verschiedene Zahlenbeispiele für die Faktorisierung an und vergleicht die Produkte mit dem jeweils nächstniedrigeren und nächsthöheren Quadrat. Die Nebenbetrachtung bricht ohne Ergebnis ab.

Caeterum eodem modo omnes quoque reliquae paraboloeides tractari possunt, sumenda tamen in exemplum composita $x^3 = y^2 a$, haec tractatur non ut Trilineum, sed ut parabola ipsa, fit enim latus curvae homogeneae: $\frac{x^3}{a^3} = \frac{y^2}{a^2}$. Et quadratum ejus $\frac{x^6}{a^6} = \frac{y^4}{a^4}$,

---

8,16 *Nebenbetrachtung:*

	3	1	2
	5	2	3
	7	3	4
	9	4	
vel	9	8	1
	10	7	3
	11	6	5
	12	5	7
	13	4	9

si $a + y = n$
ergo $a - y = n - 2y$

$n \frown n - 2y$

9	−0	+0	
30	−5	+6	
			5
55	−6	+9	
			4
84	−3	+16	
117	−17	+4	

Ergo nihil hinc duci potest.

2 composita *(1)* $ax^2 = y^2$, haec tractatur non ut Trilineum sed ut *(a)* Hyper *(b)* parabola ipsa, fit enim $\sqrt{ax^2} = y$. atqve adeo *(2)* $a^2x^4 = y^2a$ *(3)* $x^3 = y^2a$ *L* 20 55 | −6 | +11 *L ändert Hrsg.*

detrahatur 1. fiet $\frac{\sqrt{x^6 - a^6}}{a^3} = \frac{y}{a}$. Unde figurae $\frac{\sqrt{x^6 - a^6}}{a^2} = y$ quadratrix curva huic paraboloeidi homologa. Figura autem ista dabit $x^6 - a^6 = y^2 a^4$ cujus quadratura dabit quaesitum.

In simplici parabola $y^2 = ax$. unde $\frac{y}{a} = \frac{\sqrt{ax}}{a}$, hujus quadr. $\frac{ax}{a^2} = \frac{x}{a}$. cui auferatur 1. fit $\frac{x-a}{a} = \frac{ax - a^2}{a^2}$ erit $\sqrt{ax - a^2}$ vel $\sqrt{ax} = y$. Et hujus nimirum ipsius parabolae, quadratrix figura, Curvam habebit parabolae homologam quare Geometrice describi potest.

Operae pretium est quaerere Curvam homologam figurae segmentorum, $\frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, ejus quadr. $\frac{x^2}{2ax - x^2}$, ablata unitate $= \frac{2ax - x^2}{2ax - x^2}$, fiet $\frac{x^2 - 2ax + x^2}{2ax - x^2}$, vel $\sqrt{\frac{x - 2a + x}{2a - x}} = \frac{y}{a} = \sqrt{\frac{2x - 2a}{2a - x}}$. Ergo $\frac{y^2}{a^2} = \frac{2x - 2a}{2a - x}$. Et $2ay^2 - xy^2 = 2xa^2 - 2a^3$. Et $2ay^2 = 2xa^2 - 2a^3 + xy^2$, vel $2ay^2 - 2a^3 = 2xa^2 - xy^2$, vel $\frac{2ay^2 - 2a^3}{2a^2 - y^2} = x$. Hujus ergo figurae quadratrix Curvam habet segmentis Circuli homologam.

Si sumas $\frac{y^2}{a^2 + y^2}$, cujus □, $\frac{y^4}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$ et ablato 1. $\sqrt{\frac{2y^4 - a^4 - 2a^2y^2 - y^4}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}}$,

2 paraboloeidi *(1)* homog *(2)* homologa. *L* 4 unde *(1)* $\frac{y^2}{a^2} = \frac{ax}{a^2}$ *(a)* = *(b)* seu $\frac{y}{a^2} = \frac{x}{a}$ *(2)* | $\frac{y^2}{a^2}$ *ändert Hrsg.* | $= \frac{\sqrt{ax}}{a}$ | seu *streicht Hrsg.* |, huius *L* 4 cui *(1)* addatur 1. fit $\frac{x+a}{a} = \frac{xa + a^2}{a^2} =$ *(2)* auferatur *L* 13 sumas *(1)* $\frac{2y^2}{a^2 + y^2}$, auferasqve *(a)* 1, fiet *(b)* $^{a^2 + y^2}$, fiet $\sqrt{\frac{2y^2 - a^2 - y^2}{a^2 + y^2}}$. Et *(2)* $\frac{y^2}{a^2 + y^2}$ *L*

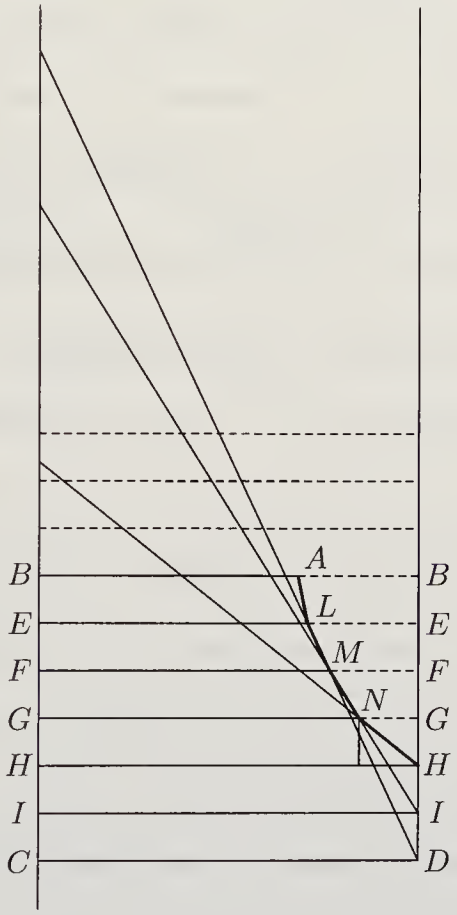
---

11 $2ay^2 - 2a^3 = 2xa^2 - xy^2$: Richtig wäre $2ay^2 + 2a^3 = 2xa^2 + xy^2$. Dies beeinträchtigt die folgende Gleichung, jedoch nicht die Schlussfolgerung. 13 $\frac{y^4}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$: Leibniz benutzt in der weiteren Rechnung das Doppelte dieses Ausdruckes, $\frac{2y^4}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}$.

sive $\sqrt{\frac{y^4 - a^4 - 2a^2y^2}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}}$ hujus figurae quadratrix Curvam habet segmentorum residuis homologam.

[*Teil 4*]

De Quadratrice Hyperbolae



[*Fig. 1*]

Punctum A feratur a recta AB, versus rectam CD, iis legibus, ut motus semper sit aequabilis sive uniformis. Et tamen recta BC. divisa in partes aequales infinitas punctis

7 uniformis, *(1)* tempus autem tale, ut recta tamen, *(a)* qv⟨o⟩ *(b)* divisa *(2)* Et L

B. E. F. G. per quas parallelae infinite productae transeant. Punctum A ponatur ex recta B venire in rectam E, tempore aliquo (utcunque infinite parvo) quod appelletur a. ex E vero in F, tempore $a+1$, posito 1 esse infinitesimam temporis partem et ex F in G tempore $a+2$, et G in H, tempore $a+3$ ita semper ut velut BH e. g. est ad BE, ita accessio temporis ex H in I sit ad accessionem temporis ex E in F, atque ita differentiae temporum, erunt ut quadrata altitudinum. Nam tempus quo pervenitur ex B in F, erit a ductum in numerum terminorum seu rectam $B[F,]$ hoc loco $2, = 2a, +$ semiquadrato ejusdem, $\frac{4}{2}$. Rectius cum BE, sit 1, erit accessus a. Ergo ex B in E feretur tempore 1, ex E in F, tempore $1+\frac{1}{a}$[,] ex F in G tempore $1+\frac{2}{a}$. ex G in H, tempore $1+\frac{3}{a}$. ex H in I. tempore $1+\frac{4}{a}$, eadem ex B in G tempore $BG+\frac{BG^2}{2a}$ et ex B in I, tempore $\frac{2a\,BI+BI^2}{2a}$. Sunt ergo tempora $\frac{2ax+x^2}{a} = y$ seu ut applicata figurae cujus talis est aequatio $\frac{2ax+x^2}{a} = y$. Composita ex ordinatis Trianguli et Trilinei parabolici punctis. Unde fit $2ax+x^2 = ya$, seu $2ax+x^2+a^2 = ya+a^2$. Unde fit $\underbrace{x+a}_{x} = \sqrt{ya+a^2}$ seu

6 altitudinum *(1)* | seu *streicht Hrsg.* | dif *(2)*. Nam *L* 8 accessus *(1)* $\frac{1}{\mathrm{a}}$ *(2)* a *L* 10 eadem *(1)* erit longitudo rectarum, seu spatiorum per *(2)* ex *L* 13 $= \sqrt{\mathrm{ya}+\mathrm{a}^2}$ *(1)* seu $\mathrm{x} = \sqrt{2\mathrm{yb}+\frac{\mathrm{b}^2}{4}}$, posito esse x = ei qvod ante x + a, et *(a)* $\frac{\mathrm{b}^2}{4}$ = *(b)* $\mathrm{b} = \frac{\mathrm{a}}{2}$ Erunt ergo tempora ut appli *(2)* seu *L*

---

5 f. differentiae ... altitudinum: Die wörtliche Formulierung gibt die Abhängigkeit der Fallzeit von der überwundenen Höhe nicht korrekt wieder. In der anschließenden Diskussion kommen einige Ungenauigkeiten hinzu. So lautet der Ausdruck für die Zeit bei Bewegung von B nach F nicht $2a+\frac{4}{2}$, sondern $2a+\frac{2\cdot 1}{2}$ (Z. 7 f.). Nach dem von Leibniz vorgenommenen zweimaligen Wechsel der Bezeichnung für die Zeitzuwächse von 1 über a zu $\frac{1}{a}$ ergibt sich für die Zeit bei Bewegung von B nach G dementsprechend $BG+\frac{BG(BG-1)}{2a}$ (Z. 10). Die Beziehung zwischen Höhe x und Zeit y müsste $\frac{(2a-1)x+x^2}{2a} = y$ (Z. 11) lauten. Die allgemeine Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt.

$x = \sqrt{ya}$. posito esse $x =$ ei quod ante $x + a$. et y esse $=$ ei quod ante $y + a$.

Ecce ergo habebimus definitionem Figurae Quadratricis:

Si Punctum A ex BA, versus CD, uniformi semper motu feratur, sed obliquato ita cursu, ut tempora descensuum (vel spatia AL. AM. AN. AH) sunt ut applicatae parabolicae basi parallelae, earundem semper altitudinum; motu suo describet curvam, quae quadraturam Hyperbolae dabit.

Figura segmentorum Hyperbolae est opinor: $\frac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}} = y$. unde $x^2a^2 = 2axy^2 + x^2y^2$ seu $xa^2 = 2ay^2 + xy^2$, sive $xa^2 - xy^2 = 2ay^2$, vel $\frac{2ay^2}{a^2 - y^2} = x$. Caeterum datae $\frac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}}$ tentemus invenire homogeneam, fiet: $\frac{2x}{\sqrt{2ax + x^2}}$ et ejus $\square$ erit $\frac{4x^2}{2ax + x^2}$, cui auferatur 1, fiet $\frac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{y}{a}$, seu $\frac{3x^2 - 2ax}{2ax - x^2} = \frac{y^2}{a^2} = \frac{3x - 2a}{2a - x}$.

8 f. datae *(1)* | $\frac{\text{xa}}{\sqrt{2\text{ax} + \text{x}^2}}$, *streicht Hrsg.* | vel eius duplo $\frac{2\text{xa}}{\sqrt{2\text{ax} + \text{x}^2}}$ *(2)* $\frac{\text{xa}}{\sqrt{2\text{ax} + \text{x}^2}}$ *L*

10 addatur *L ändert Hrsg.*

---

10 $\frac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{y}{a}$: Richtig wäre $\frac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{y}{a}$. Der Fehler beeinträchtigt die folgende Gleichung.

3. METHODUS TANGENTIUM INVERSA, IGNOTA
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 1. 1 Ausschnitt von ca 23,8 x max. 13,0 cm. Untere Schnittkante schräg geschwungen. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1v° leer.
Cc 2, Nr. 844

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung ist auf Papier mit einem Wasserzeichen geschrieben, das von August 1673 bis Juni 1674 belegt ist. Das darin wiedergegebene Gespräch mit Huygens dürfte der Anlass für die Untersuchung N. 4 gewesen sein, in der sich Leibniz mit den von Huygens als Indiz für eine inverse Tangentenmethode von Descartes angeführten Cartesischen Ovalen auseinandersetzt.

Methodus tangentium inversa, ignota

Dicebam Cl^mo Hugenio, videri mihi quaedam loca methodo Cartesii inveniri non posse, sive quasdam figuras Geometricas non posse aliquando ex ejus regulis duci; eas nimirum, ubi non applicatarum sed tangentium vel perpendicularium, aut linearum ad Tangentes relatarum data est ad abscissas relatio, breviter me non reperire in Cartesio methodum tangentium inversam.

Id verum esse fassus est Hugenius, sibique ipsi ea problemata videri difficillima: nec se nunc quidem quenquam mortalium nosse, qui ea solvendi certam habeat methodum, adeo ut ne illud quidem definiri possit an figura quaesita sit impossibilis. Attamen videri sibi Methodum ejusmodi fuisse notam Cartesio, neque enim aliter illas figurarum quarundam curvarum ad refractiones aptarum proprietates potuisse invenire.

Dixi fortasse invenisse casu. At respondit Hugenius sibi id verisimile non videri, quoniam figurarum quarundam ex illis aequationes ad gradus quosdam valde compositos ac prolixas aequationes ascendant.

Quaesivi an non putaret Huddenium aliquid tale habere, cum tantopere de maximis ac minimis laboraverit; negavit.

10 Methodus ... ignota *in anderer Tinte erg. L*

11 methodo Cartesii: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106 [Marg.]. 15 inversam: vgl. die Studie *Ex datis tangentibus invenire figuram* [Herbst 1673], VII, 4 N. 41. 19 figurarum: DESCARTES, *a. a. O.*, S. 50–65. 25 laboraverit: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507 bis 516.

Cartesium id nemini quod sciat communicasse: se pauca quaedam in parabola aliisque nonnullis habere, sed quae longe absint a suo voto. Videri sibi Cartesium quaedam e sua Tangentium methodo subodoratum.

14,21 f. *Zu* s i b i ... v i d e r i *in anderer Tinte:* Postea aliter sensit, ex quo reperit methodum qua Cartesius ad suas figuras dioptricas in *Geometria* ejus expositas, facile pervenire potuit.

1 pauca: vgl. Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 59–90 [Marg.] (*HO* XVIII S. 189 bis 241). 3 Tangentium methodo: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–50 [Marg.].
4 f. reperit: vgl. den Brief von Huygens an Leibniz vom 22. November 1679 (III, 2 N. 359 S. 887) sowie Chr. HUYGENS, *Traité de la lumiere*, 1690, S. 110–112 (*HO* XIX S. 529 f.). Möglicherweise bezieht sich Leibniz auch auf Mitteilungen von Huygens bei ihrem Treffen von Ende November 1676 in Den Haag (vgl. den Brief von Leibniz an Oldenburg vom 18./28. November 1676, III, 5 N. II S. 9). Huygens hatte sich seit Oktober 1676 wieder mit den Cartesischen Ovalen beschäftigt (vgl. *HO* XIX S. 424 f.).

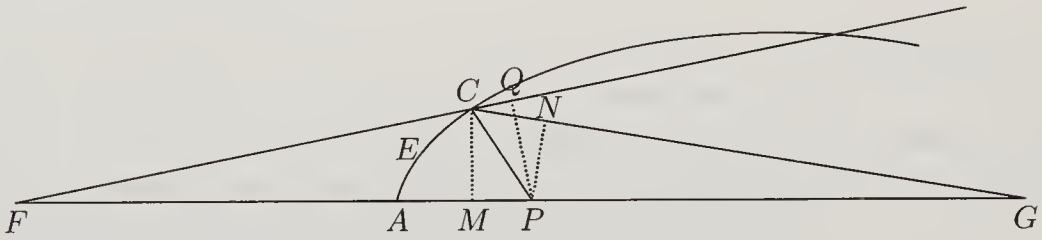
4. PROBLEMA CARTESII METHODI TANGENTIUM INVERSAE

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge: Bl. 9 v°, 10 r°, 10 v°, 9 r°. Auf Bl. 9 v° Seitenzählung: pag. 1, auf Bl. 10 r° Seitenzählung: pag. 2.
Cc 2, Nr. 845

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben. Während Leibniz in N. 4 durchgängig das Gleichheitssymbol = verwendet, wechselt er in N. 5 zwischen = und ⊓. Die beiden Stücke dürften daher auf Sommer 1674 zu datieren sein. N. 4 dürfte im Anschluss an das in N. 3 dokumentierte Gespräch mit Huygens über eine inverse Tangentenmethode bei Descartes entstanden sein. Leibniz befasst sich mit den Cartesischen Ovalen wieder bis Ende Dezember 1674 in N. 14 u. 17.

Cartesius lib. 2. *Geometriae* resolvit problemata quaedam Methodi Tangentium inversae, eorumque dedit demonstrationem, sed inveniendi methodum non explicuit, quaedam etiam aliis quaerenda reliquit, *ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum reperiant, eo pluris rerum illic demonstratarum inventionem aestiment.* Illud cujus solutionem dedit, suppressa tamen inveniendi ratione, huc redit.



[*Fig. 1*]

Invenire Curvam *AEC*, ejus ad rectam datam *FG* habitudinis, ut sumtis in ea recta punctis certis *G.* et *F.* a diversis curvae partibus, et sumto quolibet in curva puncto *C*,

18 AEC, *(1)* talis naturae, ut recta qvaedam duci possit *(2)* eius *L* 18 f. ut *(1)* sumto in ea puncto | dato *erg.* | G ab una curvae parte *(2)* sumtis in ea *(a)* certis *(b)* | recta *erg.* | punctis *L* 19 F *(1)* ab una curvae parte *(2)* a *L*

12 problemata quaedam: Zur Behandlung der Ovale und ihrer Eigenschaften vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 42–44, 48 f., 50–65 [Marg.]. 14 f. *ut ... aestiment*: vgl. *a. a. O.*, S. 65. Dieselbe Passage wird in N. 17 S. 142 Z. 14–18 ausführlich zitiert. 17 *Fig. 1*: Den algebraischen Gegebenheiten entsprechen weder die Figur bei Descartes noch Leibniz' eigene Skizze. Fig. 1 gibt letztere möglichst genau wieder. Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht abgedruckt. 18 *AEC*: vgl. *a. a. O.*, S. 57–59.

ad quam perpendicularis sit recta PC, rectae datae FG occurrens in P. junctisque et si opus est productis rectis FC. GC. ductae ad eas perpendiculares PQ. et PN. rationem habeant datam $\frac{d}{e}$.

Cartesius ipse observat Triangula PQF et CMF esse similia, ideoque $\frac{CF}{CM} = \frac{FP}{PQ}$. Item Triangula rectangula PNG et CMG esse similia, ideoque $\frac{GP \frown CM}{CG} = PN$. 5

Nunc ad calculum veniamus: Esto $FM = x$. $GF = a$. $CM = y$. $GM = a - x$. $CF = \sqrt{x^2 + y^2}$. $CG = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$. $GP = p$. Ergo $PN = \frac{py}{\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$.

$FP = a - p$. Ergo $PQ = \frac{FP \frown CM}{CF} = \frac{a - p, \frown (y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dp(y)}{e\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$. Ergo $\frac{dp}{a - p} = e\sqrt{\frac{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}{x^2 + y^2}} = e\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ax}{x^2 + y^2}}$ et invertendo:

---

8 *Am Rande:* $\frac{PQ}{PN} = \frac{d}{e}$. Ergo $PQ = \frac{d}{e}PN$.

1 f. et ... productis *erg. L* 6 veniamus: *(1)* AM = x. FA = a GA = b. CM = y. ideoqve FM = *(2)* imo su *(3)* Esto *L* 9 $e\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ax}{x^2 + y^2}}$ *(1)* $\frac{dp}{a} - d = e\sqrt{\frac{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}{x^2 + y^2}}$. *(a)* Ergo p− *(b)* Ergo $p = \frac{a}{d}\sqrt{\frac{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}{x^2 + y^2}} + a$ *(aa)* Nihil aliud ergo restat qvam ut inveniatur summa sive qvadratura omnium $\sqrt{\frac{y^2 + x^2 + a^2 - 2ax}{x^2 + y^2}}$ = *(bb)* Iam p = *(cc)* Jam GP(= p) + MP(= m) + FM(x) = GF(a) Ergo $m = a -$ *(dd)* Jam *(aaa)* GA *(bbb)* PM(= m) = GM(a − x) − $GP\left(\frac{ae}{d}\sqrt{\frac{y^2 + x^2 + a^2 - 2ax}{}}\right)$ *(2)* et *L*

---

4 observat: *a. a. O.*, S. 58.

$\frac{1}{e}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2+a^2-2ax+x^2}} = \frac{a-p}{dp}$ seu $\frac{a}{dp} - \frac{1}{d}$. Ideoque $\frac{CF}{e,CG} + \frac{1}{d} = \frac{a}{dp}$, vel $\frac{dCF}{ae,CG} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p}$, et invertendo $\frac{ea^2,CG}{adCF+aeCG} = p$.

Habito $p = \frac{ea^2CG}{aeCG+adCF}$, inde fieri potest: $a - \frac{adCF}{eCG,+dCF} = p$. Ideo $MP = GM(a-x) - GP(=p)$ erit $\frac{ad \wedge CF}{eCG+dCF} - x$.

Sed placet eundem valorem aliter investigare: ponendo $\frac{dp}{a-p} = \beta e.$ seu $\beta = \frac{CG}{CF}$. fiet $\frac{a-p}{dp} = \frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p} - 1 = \frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p} = \left(\frac{d}{\beta e} + 1\right)\ \frac{d+\beta e}{\beta e}$.

Ergo $p = \frac{\beta ea}{d+\beta e}$ sive $a - \frac{ad}{d+\beta e}$. Unde $MP = \frac{ad}{d+\beta e} - x$. Qui valor idem cum priore, et potest ita explicari:

$MP = \underset{m}{\wedge}\ \frac{ad}{d+e\sqrt{1+\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}}}$. Igitur $\frac{1}{m} = \frac{d+e\sqrt{\ldots.}}{ad}$, et $\frac{1}{me} - \left(\frac{d}{ad}\right)\ \frac{1}{ae} = \frac{\not e\sqrt{\ldots..}}{ad}$ ideoque $\frac{da^2\not e - m\not e ad}{ame^{\not 2}} = \sqrt{\ldots..}$. Igitur $\frac{d^2a^4 - 2d^2a^3m + m^2a^2d^2}{a^2m^2e^2} = 1 + \frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ vel $\frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots.}{\ldots.} - 1 = \frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$, ideoque $\frac{d^2a^4 - 2d^2a^3m + m^2a^2d^2 - m^2a^2e^2}{m^2a^2e^2} = \frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ et

---

3 *Nebenrechnung:* $\frac{a}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b}$ ∮ $1 - \frac{b}{a+b}$

9 $\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{d}+\mathrm{e}\sqrt{1+\frac{\mathrm{a}^2-2\mathrm{ax}}{\mathrm{y}^2+\mathrm{x}^2}}}$. *(1)* Jam ex aliunde inventis constat *(2)* tunc *(3)* Igitur *L* 12 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} =$

(1) | 1+ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$ *L*

---

9 *MP*: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $-x$. Im weiteren Verlauf der Rechnung kommen weitere Fehler hinzu, die die Überlegungen bis S. 19 Z. 15 beeinträchtigen. Insbesondere ist die Gleichung S. 19 Z. 10 falsch.

invertendo $\frac{y^2+x^2}{a^2-2ax} = \frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots}{\ldots.}$, ideoque $\frac{y^2}{2} = \frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots \frown a^2-2ax}{2\ldots.} - \frac{x^2}{2}$.

Jam quia differentia inter duo proxima $\frac{y^2}{2}$ ipsi m aequalis est, per alibi demonstrata, ideo omisso $\frac{y^2}{2}$ atque jam ex aequatione eliminato, conferamus duos ejus valores, sumendo nempe (x) majoris $= x+\gamma$. Unde fiet:

$$\frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots \frown a^2-2ax-2a\gamma}{2\ldots} - \frac{x^2+\gamma^2+2x\gamma}{2}, \quad -\frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots \frown a^2-2ax}{2\ldots} + \frac{x^2}{2} = m$$

ideoque $\frac{d^2a^4 \text{ etc.} \ldots \frown 2a\gamma}{2\ldots} - \frac{2x\gamma}{2} = m$, sive $\frac{d^2a^5 - 2d^2a^4m + m^2a^3d^2 - m^2a^3e^2}{m^2a^2e^2} - x = m$,

ac proinde $d^2a^{\not 3} - 2d^2a^{\not 2}m + m^2a^{\not 3}d^2 - m^2a^{\not 3}e^2 - m^2a^{\not 2}e^2x - m^3a^{\not 2}e^2 = 0$. seu

$$-e^2m^3 - e^2m^2x + ad^2m^2 - 2d^2a^2m + d^2a^3 = 0.$$

$$- ae^2$$

Unde $x = -m + \frac{ad^2-ae^2}{e^2} - \frac{2d^2a^2}{e^2m} + \frac{d^2a^3}{m^2}$.

$\bigtriangledown$ $\square$ Hyperbola Hyperboloeides

Unde cum data summa omnium m detur summa omnium x, et dato valore ipsius y, detur summa omnium $\underline{m}$, sequetur dato valore ipsius y. dari quadraturam Hyperbolae, nisi error calculo insit.

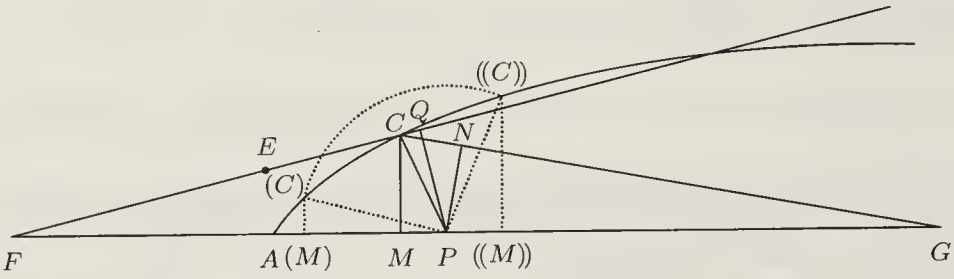
Jam in aequatione ipsius y^2 valorem exprimente, pro $2ax$ et x^2, substituatur ejus valor, habebitur aequatio in qua non nisi y et m, reperientur, ut aequationem in qua non nisi x et m, jam habuimus. Sed et m puto eliminari tandem poterit. Sed haec methodus si succederet non est universalis, non enim semper valor y^2 absolute habetur. Opus est arte tollendi semper unam ex tribus incognitis, pluribusque quando problema est determinatum. Sed hinc videretur sequi posse semper tolli etiam unam quando duae sunt incognitae et problema est determinatum, fingendo scilicet adhuc plures incognitas, et tollendo.

---

23 *Dahinter:* NB.

---

2 alibi demonstrata: vgl. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. 10 Unde: Leibniz übernimmt die folgende inkorrekte Gleichung für FM in N. 14 S. 117 Z. 14 f.



[*Fig. 2*]

Ut Cartesii literas retineamus esto $AG = b$. $AF = FE = c$. $FC = c + z$. $A(M) = y$. Ponatur jam C. in (C), erit $C(M)^2 = c^2 + 2z + z^2 + c^2 + 2cy + y^2$. $FP = c + y + m$. Jam $\frac{FP \sphericalangle CM}{CF} = PQ$, et $\frac{GP \sphericalangle CM}{CG} = PN$. Jam $PQ = \frac{d}{e}PN$. Ergo $\frac{FP \sphericalangle \cancel{CM}}{CF} = \frac{\cancel{GP \sphericalangle CM}}{\frac{e}{d}CG}$. Jam $FP + GP = a$.

Item $CF^2 = FM^2 + CM^2$, et $CG^2 = CM^2 + a^2 - 2aFM + FM^2$. Ergo quia $\frac{FP^2}{CF^2} = \frac{GP^2}{\frac{e^2}{d^2}CG^2}$. Ergo $\frac{FP^2}{FM^2 + CM^2} = \frac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$. Ergo $\frac{a^2 - 2aFP}{FP^2} + \cancel{1} = \frac{a^2 + 2aFM}{FM^2 + CM^2} + \cancel{1}$, et ponendo $a - 2FP = r$, fiet $-FP = \frac{r - a}{2}$, et $FP = \frac{a - r}{2}$, et $FP^2 = \frac{a^2 - 2ar + r^2}{4}$. Eodem modo $a + 2FM = s$. fiet $FM = \frac{s - a}{2}$, et $FM^2 = \frac{s^2 - 2sa + a^2}{4}$ ideoque, invertendo superiorem rationem habebimus: $\frac{a^2 - 2ar + r^2}{\cancel{4}r} =$

---

2 Cartesii literas: vgl. DESCARTES, *a. a. O.*, S. 57. Leibniz' Bezeichnungen stimmen nur teilweise mit denen Descartes' überein. 3 $C(M)^2$: Auf der rechten Seite müsste es $-c^2 - 2cy - y^2$ heißen. Die Gleichung wird nicht weiterverwendet. 7 $\frac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$: Im Nenner müsste vor $2aFM$ ein $-$ stehen; der Bruch wäre überdies mit $\frac{d^2}{e^2}$ zu multiplizieren. Zusammen mit einem weiteren Versehen gehen diese Fehler in die Gleichung in r und s in Z. 10 – S. 21 Z. 1 ein und beeinträchtigen die Richtigkeit aller weiteren Überlegungen. Im Verlauf der Argumentation unterlaufen Leibniz außerdem noch weitere Fehler.

$\frac{s^2 - 2sa + a^2 + CM^2}{4s}$, unde $\frac{a^2}{r} \cancel{-2a} + r = s \cancel{-2a} + \frac{a^2}{s} + \frac{CM^2}{s}$ sive $\frac{a^2}{r} + r - s - \frac{a^2}{s} - \frac{CM^2}{s} =$ 0. Unde fiet melius esse non imponere nomina lineis, et calculum per lineas potius quam per literas transigere, donec ad extremum appareat quae commodius elidantur. Jam ponamus $CM = y$. fiet: $a^2 s + r^2 s - s^2 r - a^2 r - y^2 r = 0$. Jam si lineam FP, aut ex ea pendentem r velut cognitam sumamus, et pro arbitrio assumtum punctum C, eadem erit aequatio cujus radices, vel s et y dupliciter assumi possunt. Eadem proveniente aequatione, modo eadem maneat r, et a. Sed in nostro casu eas radices cogitandum est esse aequales, et $(C)M$ = ipsi $((C))((M))$. Ac quaerenda proinde aequatio ejusdem formae, in qua duae sint incognitae, duarum quaelibet significationum aequalium: cum ad simplicem methodum tangentium aequatio duas habens radices aequales non nisi unius sit incognitae. Forma nostra est

$$\begin{array}{llll} -ry^2 & -rs^2 & +r^2 s & = 0. \\ & & +a^2 \quad -a^2 r & \end{array}$$

$y - e$, $\square = y^2 - 2ey + e^2$. vel ducamus in se invicem $y - e \frown s - f$ fiet $ys - yf - es + ef$. Sed deest y^2 et s^2. Ideo quaeratur quantitas arbitraria, quae in hoc productum multiplicata faciat $\ldots y^2 \ldots s^2 \ldots s \ldots$ eaque tot arbitrariarum literarum diversarum, ut si superiori aequationi datae comparetur, determinatio obtineatur. Utile foret Bartholiniana *de constitutione aequationum* ad eas usque producta, quae sunt duarum, et plurium incognitarum, ut cum aliis ejusdem formae, comparentur.

$y - e \frown s - f$ seu $ys - yf - es + ef = \ldots y^2.\ ts^2 \ldots vs.\ w.$ Inveniendus ergo valor ipsarum e, et f.

---

14 *Gestrichene Nebenrechnung am Rande:*

$$\begin{array}{r} s - x \\ s + x \\ \hline s^2 - x^2 \end{array}$$

5 punctum | r *ändert Hrsg.* |, eadem *L* 9 qva *(1)* tres sint indeterminatae *(2)* duae *L* 14 e^2. *(1)* $s - p,^2 . s^2 - 2ps$ *(2)* | $s - q \quad s^2 - 2qs + s^2$ *streicht Hrsg.* | $= e^2$, fiet aeqvatio y^2 *(3)* vel *L* 18 constitutione *(1)* et limitibus *(2)* aeqvationum *L* 20 w. *(1)* Ergo $ys - yf - es + ef = \ldots$ *(2)* Ergo $y^2 - ys + yf =$ *(3)* Ergo $y^2 - sy + \frac{s^2 - 2sf + f^2}{4}$ *(a)* $+f$ *(b)* $s^2 - 2sf + f^2 =$ *(4)* Inveniendus *L*

---

17 f. Bartholiniana: Gemeint ist das von R. Bartholin herausgegebene Fl. DEBEAUNE, *De aequationum natura, constitutione et limitibus*, 1659, *DGS* II S. 49–152.

Est autem $e = \frac{-ys + yf + y^2 + ts^2 + vs + w}{-s + f}$ et $f = \frac{-ys + es + y^2 + ts^2 + vs + w}{-y + e}$, et substituendo pro e ejus valorem, habebitur valor ipsius f. sine e et valor quoque utriusque sine f, et e. et, quia ubilibet licet substituere f pro s, et e pro y, facile inde fieri potest valor qui libuerit. Hoc autem modo habebitur aequatio formam habens similem datae, eaque duarum radicum aequalium. Sed artis foret ista breviter atque eleganter consequi posse. Beaune non tradidit modum inveniendi quae de constitutione aequationum prodidit, sed hoc modo videtur id semper fieri, et datae aequationi alia ejusdem formae constitui posse. Caeterum hic facilitas eo major, quod signa pro arbitrio assumi possunt seu brevius $ys - yf = ny^2$. Ergo $s - f = ny$. Et $f = s - ny$. $es = ts^2 + vs$. Ergo $e = ts + v$. Ergo $y - ts + v, \frown, s - \llcorner s + ny \lrcorner$. Multiplicando fiet: $sy - ts^2 + vs - sy + ts^2 - vs + ny^2 - tsny + vny$. Error in calculo, resumatur: $ys - yf = ny^2$. Ergo $s - f = ny$. $(= 0.)$ $- es = ts^2 + vs$. Ergo $e = -ts - v$, tandemque $ef = w$. Ergo $f = \frac{w}{e} = s - ny$. Sed $s = \frac{e + v}{-t}$. Ergo $\frac{w}{e} = \frac{e + v}{-t} - ny$.

Unde et ipsius e valor facile habetur. Et per valorem e, valor ipsius f. sola ex incognitis y. tantum concurrente. Valoribus illis substitutis in eorum locum factaque multiplicatione produci debet ny^2. ts^2. vs. w. sed et si in aequatione illa $\frac{w}{e} = \frac{e + v}{t} - ny$ pro ny poneretur ne uti certe fieri potest; ob aequalitatem, tunc patet e, pariter et f. absolute haberi. Ac proinde radicum y et s. valorem purum. Indeque institui potest aequationis hujus arbitrariae cum data comparatio, quae necessario solvet problema. Imo melius mox:

Cartesius tradidit methodum complendi omnia loca aequationis cum una est incognita. Tradenda methodus complendi cum sunt plures.

8–10 *Zum gestrichenen und wieder gültig gemachten* seu ... $ny\lrcorner$: Maneat.

6 posse. *(1)* Bartholinus non tradidit *(2)* Beaune *L* 6 de *(1)* limitibus *(2)* constitutione *L* 8–10 possunt | seu ... Et *(1)* qvia *(2)* f ... ny$\lrcorner$ *gestr. und wieder gültig gemacht* | *(a)* Ergo y *(b)* Multiplicando *L* 13 f. ny *(1)* et y $= \frac{e + v}{tn} - \frac{w}{en} =$ *(2)* Unde *L*

---

6 Beaune: vgl. die Erl. zu S. 21 Z. 17 f. 21 Cartesius: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 74 f.

$ys - yf - es + ef \frown y + ts - w$, dabit:

$$\boxed{y^2s} - y^2f - \boxed{eys} + \underset{}{\overset{e}{\vee}}\!\!\! eyf + (tys^2) - \overset{e}{\vee}\!\! tysf - (ts^2e) + \underset{\hat{s}}{setf}$$

$$\underset{\hat{e}}{-ysw} \qquad + \underset{\hat{e}}{wyf} + \underset{\hat{f}}{wes} - wef,$$

$$\text{Unde} \quad \begin{array}{llllll} y^2s + tys^2 & - fy^2 + tes^2 & - tfes & + wef \\ - eys - tes^2 & & - we & + e^2f \end{array}$$

sive $\begin{array}{llll} - fay^2 - tes^2 & - tfe & s + wefa = 0, \\ & - wea & + e^2fa \end{array}$ comparanda cum $\begin{array}{l} ray^2 - ars^2 + r^2as - a^3r. \\ \qquad\qquad\qquad\quad + a^3 \end{array}$

$f = -r.\ t = \dfrac{ar}{y}.\ r^2 - wy = r^2 + a^2.$ Ergo $w = \dfrac{a^2}{y}.$

Ecce aequationem identicam ejusdem secum ipso.

Quanquam autem de calculo non responderim, methodum tamen detectam arbitror plenam et accuratam, quam in jam cognitis experiri placet.

---

10 f. *Darunter:* Locus Ellipsis.

8 $\frac{\mathrm{ar}}{\mathrm{y}}$ *(1)* et ra − we *(2)* $\mathrm{r}^2 - \mathrm{wy} =$ *(a)* $\mathrm{ra} + \mathrm{a}^2$ | Ergo *streicht Hrsg.* | $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{r}^2 - \mathrm{ra} - \mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$. | Tandem *streicht Hrsg.* | *(aa)* w *(bb)* $-\mathrm{r}^3\mathrm{a} + \mathrm{r}^2\mathrm{a}^2 + \mathrm{ra}^3 - \mathrm{y}^2\mathrm{ra} = -\mathrm{a}^3\mathrm{r}$ *(aaa)* fiet $\mathrm{r}^2\mathrm{a}$ | $= \mathrm{a}^2\mathrm{r}$. *streicht Hrsg.* | *(bbb)* fiet $-\mathrm{r}^3\not{\mathrm{a}} + \mathrm{r}^2\mathrm{a}^{\not{2}} + 2\mathrm{ra}^{\not{3}2} - \mathrm{y}^2\mathrm{r}\not{\mathrm{a}} = 0$ et $\mathrm{s} = -\mathrm{r}$ Unde *(aaaa)* + sr *(bbbb)* $+\mathrm{s}^{\not{3}2} + \mathrm{s}^{\not{2}}\mathrm{a} - 2\not{\mathrm{s}}\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2\not{\mathrm{s}}$ | $= 0$ *streicht Hrsg.* | *(b)* r^2 *L* 12 Locus *(1)* Hyperbolae. Attamen non curva quaesita. *(2)* Ellipsis *L*

---

10 arbitror: Das Verfahren, durch Bestimmung von Doppelwurzeln einer Gleichung das inverse Tangentenproblem rein algebraisch zu behandeln, führt nicht zum Ziel. Leibniz verfolgt den verfehlten Ansatz weiter bis Januar 1675 in den Studien N. 7, 8, 9, 14, 17, 20, 21 und 27.

5. DIFFERENTIAE SEU ELEMENTA FIGURARUM

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2b Bl. 136–137. Rest eines Bog. 2°. Von Bl. 137 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 17 x 10 cm, unten von ca 17 x 4 cm. 2 2/3 S. Textfolge Bl. 136 r°, 137 v°, 136 v°. Bl. 137 r° leer.
Cc 2, Nr. 1280 A–C

Datierungsgründe: s. N. 4.

[*Teil 1*]

Differentiae seu elementa figurarum ubi et de locis ad superficiem

$\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x+\beta}$, vel $\frac{a^2x + a^2\beta - a^2x}{x^2 + x\beta}$ vel $\frac{a^2}{x^2}$. differentia applicatarum Hyperbolae.

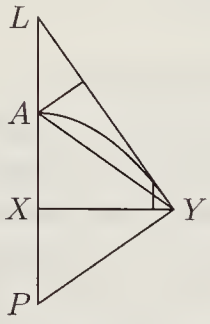
Jam $1 + \frac{a^4}{x^4}$ facit $\frac{x^4 + a^4}{x^4}$. Ideoque latus infinite parvum Polygoni infinitanguli Hyperbolici $\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2} \sqcap \frac{y}{a}$, quaeritur summa omnium y. Ea enim data, datur et dimensio Curvae Hyperbolicae. Fiet $a\sqrt{x^4 + a^4} \sqcap yx^2$ aequatio Figurae quae curvae Hyperbolicae homogenea est, unde fit $a^2x^4 + a^6 \sqcap y^2x^4$, divisis omnibus per x^4, habebimus $a^2 + \frac{a^6}{x^4} \sqcap y^2$,

---

19 *Nebenbetrachtung zur Stufe (1) der Variante zu Z. 12, nicht gestrichen:* $a^4 \sqcap x^2y^2 - x^2a^2$. Ergo $y^2 \sqcap \frac{a^4 + a^2x^2}{x^2}$.

9f. Differentia ... figurarum *(1)* adde de loci *(2)* ubi ... superficiem *erg. L* 12 $\frac{x^4 + a^4}{x^4}$ |, vel *streicht Hrsg. (1)* $\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}$ *(2)* $\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2}$ *gestr.* | Ideoqve *L* 14 $\sqcap yx^2$ *(1)* locus Curvae Hyperbol *(2)* aeqvatio *L*

vel $\sqrt{\sqrt{y^2-a^2}} \sqcap \frac{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}{x}$. Ergo $x \sqcap a^2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{y^2-a^2}}}$. Porro datur summa omnium y^2. Summa autem omnium x^2 facit $a^4\sqrt{\frac{a}{y^2-a^2}}$ quae quantum judico nondum datur.



$[a \frown]\sqrt{1+\frac{a^4}{x^4}} \sqcap y = XY$. Hujus figurae ut quaeratur quadratura, investiganda Tangens nempe $a^2 + \frac{a^6}{x^4}$ $-a^2-$ $\frac{a^6}{x^4}$ etc. fiet $\frac{4x^3a^6}{2x^8} \sqcap \frac{2a^6}{x^5}$. Reducta $= XP$ inter quam et productam est media proportionalis y, ita ut sit $\frac{a^2+\frac{a^6}{x^4}, \frown x^5}{2a^6} \sqcap \frac{a^2x^5+a^6x}{2a^6} \sqcap LX$.

[Fig. 1] Si reductarum summa alia methodo investigetur redibit y^2. Quaesivimus differentias ordinatarum Hyperbolae ad Asympt. Quaeramus et ad axem.

Aliter quaeramus $-\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2} = z$ fiet

---

4 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{cccc} & & x^2+2\beta x & +\beta^2 \\ & & x^2+2\beta x & +\beta^2 \\ \hline x^4 & 2\beta x^3 & 1\beta^2x^2 & 2\beta^3x+\beta^4 \\ & 2 & 4 & 2 \\ & & 1 & \\ \hline x^4 & 4\beta x^3 & 6\beta^2x^2 & 4\beta^3x \quad \beta^4 \end{array}$$

9 $+\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2}$ *(1)*, fiet 2βx vel 2x, differentia applicatarum Hyperbolae ad axem. Jam *(a)* a^2+4a *(b)* addantur qvadrata a^2, et $4a^2x^2$ *(aa)* fiet $\sqrt{a}$ *(bb)* fiet *(2)* $= z$ *L*

---

1 $\frac{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}{x}$: Richtig wäre $\frac{a\sqrt{a}}{x}$; Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter, die Überlegung wird dadurch nicht grundsätzlich beeinträchtigt. 4 $a^2 + \frac{a^6}{x^4}$: Leibniz berechnet die Subnormale XP als halbe Differenz der y^2. 7 *Fig. 1*: Die Kurve AY entspricht nicht der im Text gegebenen Gleichung. 9 fiet: In der folgenden Gleichung fehlt vor dem Wurzelausdruck der Faktor 2. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die Überlegung bis S. 26 Z. 5.

$2a^2 + 2x^2 + 2\beta x + \cancel{\beta^2} - \sqrt{a^2 + x^2, \frown a^2 + x^2 + 2\beta x + \cancel{\beta^2}}, \sqcap z^2$ et
$3\cancel{4}a^4 + 6\cancel{8}a^2x^2 + 8a^2\beta x + 3\cancel{4}x^4 + 6\cancel{8}\beta x^3 + 4\beta^2x^2 - 2a^2z^2 - 2x^2z^2 - 2\beta xz^2 \sqcap a^2 + x^2 \frown a^2 + x^2 + 2\beta x$ [⊓] $\cancel{a^4}$ [+] $\cancel{2a^2x^2} + \cancel{2\beta a^2x} + \cancel{x^4} + \cancel{2\beta x^3}$

fiet $3a^4 + 6a^2x^2 + 3x^4 - 2a^2z^2 - 2x^2z^2 \sqcap 0$. Unde $\frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \sqcap z\sqrt{\frac{2}{3}}$ seu $\sqrt{a^2 + x^2} \sqcap z$ quae est Hyperbola.

Quemadmodum in Locis Linearibus investigandis quaeritur semper y, ita in locis ad superficiem investigandis sufficit inveniri y^2. Loca ad superficiem, in quibus duae tantum sunt incognitae sunt cylindrici vel conici locorum linearium. Cum tres sunt incognitae, aliquando fieri potest ut una tolli possit, tunc locus reducetur ad linearem. Investigandum qualis naturae sunt loca ad superficiem simplicissima, et an memorabiles quasdam habeant proprietates.

Loca linearia a superficialibus in eo magnopere differunt, quod area linearium componitur ex lineis, omnes autem lineae aeque latae, hinc longitudinis tantum ineunda computatio, at pro area locorum ad superficiem invenienda, etiam latitudo ordinatarum, id est planorum consideranda est. Quod ut fiat lineae investigandae, quae sunt ipsi so-

---

21–23 *Nebenrechnungen zur Stufe (1) (bbb) der Variante, gestrichen:* $x \sqcap e - a$. $a + x \sqcap e - a + a$. $a - x \sqcap a -, e - a \sqcap 2a - e$.

4 ⊓ 0. *(1)* vel $\frac{\cancel{3}a^4 + 2\cancel{6}a^2x^2 + \cancel{3}x^4}{a^2 - x^2}$ *(a)* ⊓ $\frac{4z^2}{3}$ ⊓ $a^2 + x$ *(b)* ⊓ $\frac{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}{a^2 - x^2}$ ⊓ $\frac{4z^2}{3}$ *(aa)* ⊓ z *(bb)* fiet $z\sqrt{\frac{2}{3}} \sqcap \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, sive $z\sqrt{\frac{2}{3}\overline{a^2 - x^2}} \sqcap a^2 + x^2$ haec autem figura est Hyperbola Cubica, Unde et datur eius qvadratura. | Notabile *erg.* | $z^2\frac{2}{3} \sqcap$ *(aaa)* $\frac{a^2 + x^2, \frown a^2 + x^2}{a + x, \frown a - x}$ *(aaaa)*, Ergo $z^2\frac{2}{3} \sqcap \frac{a}{-}$ *(bbbb)* ⊓ $\frac{a + x \frown a - x, \frown a + x \frown a - x}{}$ *(bbb)* $\frac{a^2 + x^2, \frown a^2 + x^2}{a^2 - x^2} \sqcap \frac{a - x, \frown a - x,, \frown a + x \frown a + x}{a^2 - x^2}$, a + x ⊓ e, fiet $\frac{e^2 \frown 4a^2 - 4ae + e^2}{a^2 - e^2 + 2ea - a^2} = \frac{e^2 \frown 4a^2 - 4ae + e^2}{e^2 + 2ea} \sqcap \frac{e \frown 4a^2 - 4ae + e^2}{e + 2a}$ ponendo e + 2a ⊓ v. binomium tolletur ex divisore, faciliorqve fiet reductio. *(aaaa)* $z\sqrt{\frac{2}{3}} \sqcap a^2 + x$ *(bbbb)* $\frac{2z}{\sqrt{3}} \sqcap \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}{a^2 - x^2}}$ Huius ergo tam mirabilis figurae datur qvadratura, *(aaaaa)* etsi *(bbbbb)* est enim non nisi Hyperbola Cubica *(2)* Unde *L* 5 f. Hyperbola | Cubica sunt enim eius ordinatae, ut qvadrata ordinatarum Hyperbolae *gestr.* | Qvemadmodum *L* 8 sunt *(1)* Ungulae tantum cylindri vel coni planorum *(2)* cylindrici *L*

lido homogeneae, sed eae lineae non erunt geometricae, si plana illa non sunt singula quadrabilia.

[*Teil 2*]

Differentia inter duas Hyperbolae ordinatas proximas

$+\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2}-\sqrt{a^2+x^2}, \sqcap \frac{z}{a}$. Ergo

$\frac{z^2}{a^2} \sqcap 2a^2+2x^2+2\beta x+\beta^2 \quad -\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2, \frown a^2+x^2}$

$-$ .. $+$ ..... $\sqcap$ $+$ ..... Et quadrando:

$+\frac{z^4}{a^4}-4z^2-\frac{4z^2x^2}{a^2}-\frac{4z^2\beta x}{a^2}+3\not4a^4+6\not8a^2x^2+6\not8\beta a^2x+3\not4x^4+6\not8\beta x^3+4\beta^2x^2 \sqcap$

.... // // // // //

$a^4+2a^2x^2+2\beta xa^2+x^4+2\beta x^3$

// // // // //

Unde deletis aliis fiet $3a^4+6a^2x^2+3x^4 \sqcap 0$. Unde fieret $a \sqcap -x$. Quod est absurdum. Sed unde error?

Si fecissemus $\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2} \sqcap \frac{z}{a}+\sqrt{a^2+x^2}$

habuissemus $a^2+x^2+2\beta x+\beta^2 \sqcap \frac{z^2}{a^2}+a^2+x^2+\frac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}$.

Unde $2\beta x \sqcap \frac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}$. sive $\frac{a^2x^2}{z^2} \sqcap a^2+x^2$, vel $a^2x^2 \sqcap a^2z^2+z^2x^2$ vel $z \sqcap \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hujus ergo datur quadratura.

Sed non possum satis mirari priore methodo ventum fuisse ad impossibile. Nec video qui possit id fieri si quis legibus calculi insistat.

---

16 f. *Dahinter:* Imo fuit error calculi, non praefixeram binaria rectangulo ex duobus nominibus binomii quadrandi facto.

4 Differentia ... proximas *erg. L*

---

6 $\frac{z^2}{a^2} \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Faktor 2 vor dem Wurzelausdruck. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Rechnung bis Z. 10. Leibniz stellt die Unstimmigkeit fest und merkt später zu Z. 16 f. die Ursache an.

Quaestio an idem sit locus differentiarum, ordinatarum ad eandem curvam, ex differentibus licet axibus, v. g. an idem sit locus differentiarum inter ordinatas Hyperbolae ad Asymptoton, et ad axem. Sane idem semper locus est progressioni curvae homogeneus undecunque sumatur. Ergo et idem locus quadratorum ejus, ut locus quadratorum ejus componitur ex loco quadratorum, differentiarum, et rectangulo, perpetuo rectanguli autem additio aut subtractio non mutat locum. Ergo idem est semper locus quadratorum, differentiarum ipsius curvae. Ergo et idem semper locus ipsarum differentiarum, modo scilicet quantitates quae calculum ingrediuntur omnes sint v e r a e. Hinc sequitur $\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$ esse ordinatam Hyperbolae Cubicae.

Restat tantum demonstrandum, quod idem semper sit curvae locus. Quod patet, quia locus est curvae, qui ipsi homogeneus qualis figura plana non nisi una. $\sqrt{a^2-2ax+x^2}$, sed $\begin{matrix} a^2-x^2=y^2 \\ x^2-a^2=y^2 \end{matrix}$ $a^4-2a^2x^2+x^4 \sqcap y^4$. Unde demonstratur loca quadratorum saltem esse eadem. Ergo si non datur in eorum radicibus amphibolia, etiam loca differentiarum erunt eadem.

[*Teil 3*]

$\sqrt{a^2+x^2+2x+1}-\sqrt{a^2+x^2} \sqcap \frac{z}{a}$ fiet

---

8 *Zu* v e r a e : Hoc examinandum.

14 *Dazu, mit Hinweisstrich verbunden:* Imo NB. Curva ipsa explicabit amphiboliam, nam et ipsius quadrata amphibola. Semper ergo locus idem.

2 f. Hyperbolae | et *ändert Hrsg.* | Asymptoton *L* 4 sumatur. *(1)* Curvae autem *(a)* locus fit ex qvadratis locorum differe *(b)* loci *(aa)* qvadrata *(bb)* qvadratis comp *(2)* Qvadrata autem loci qvi *(3)* Ergo *L* 7 f. differentiarum, *(1)* nisi cum qvadrata *(2)* modo *L*

---

7 Ergo: Die Folgerung ist nicht richtig und beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

$$+\left\{\begin{array}{l} a^2+\ x^2+2x+1 \\ \\ \underline{a^2+\ x^2} \\ 2a^2+2x^2+2x+1 \end{array}\right. \quad -\ 2\sqrt{\begin{array}{l} a^2+x^2+2x+1 \\ \\ a^2+x^2 \end{array}}\ \Big\}\ \frown\ .\ \sqcap\ \frac{z^2}{a^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ -\frac{z^2}{a^2}\ \sqcap\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 5

$+\cancel{4a^4}+\cancel{8a^2x^2}+\cancel{8a^2x}+\cancel{4a^2}-4z^2, +\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{4x^2}, -\frac{4x^2z^2}{a^2}+4x^2+4x-\frac{4xz^2}{a^2}+\frac{z^4}{a^2}\ \sqcap$

$\cancel{4a^4}+\cancel{8a^2x^2}+\cancel{8a^2x}+\cancel{4a^2}, +\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{4x^2},$

restabit $z^4-4z^2a^2+4x^2a^2-4x^2z^2\ \sqcap\ 0.$

---

2 *Unter* 2: NB.

2 2 *erg. L* 6 f. $+\frac{z^4}{a^2}\ \sqcap$ *(1)* $a^4+a^2x^2+2a^2x+a^2, +x^2a^2+x^4+2x^3+x^2$ Ergo *(a)* $3a^4+6a^2x^2+$ $3a^2+3x^4+6x^3+3x^2+4x\ \sqcap\ -z^4+4\quad z^2$ $4x$ $4x^2$ } Impossibile | An ergo *streicht Hrsg.* | $1\cancel{3}a^4+2\cancel{6}a^2x^2+1\cancel{3}x^4\ \sqcap$

$\frac{z^4+4x^2z^2}{3}$ et $a^2+x^2\ \sqcap\ \sqrt{\frac{z^4+4x^2z^2}{3}}$ vel $a^4+a^2x^2+x^4+\frac{4x^4}{3}\ \sqcap\ \frac{z^4+4x^2z^2+4x^4}{3}$

$$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}\ \sqcap\ \frac{z^2+2x^2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{-\frac{2x^2}{3}+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}\ \sqcap\ z$$

Hoc nihil est, qvoniam z. est linea infinite parva.

Ecce ergo cautionem aliqvam adhibendam in eo calculo qvando aeqvatio *(aa)* ⟨inf⟩ *(bb)* habetur inter lineam infinite parvam, et *(aaa)* duas lineas finitas *(bbb)* duarum linearum finitarum ordinariarum differentiam, ut scilicet lineae illae ordinariae non sint ab eodem aeqvationis latere. An potius fundamentum rei est, ne subtractio cesset qvadratione. Nondum tamen cesso mirari, cur aliter impossibile eveniat.

Dicamus $\sqrt{a^2+x^2+2x+1}-\sqrt{a^2+x^2}\ \sqcap\ 0$ ergo $2a^2+2x^2+2x+1\ \sqcap$ *bricht ab*

$\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2+x^2}\ \sqcap\ 0$. Ergo $a^2+x^2+a^2+x^2-2a^2-2x^2\ \sqcap\ 0$.

Erravi in calculo, et jam video errorem oblitus sum rectangulum sub radicibus duplicare *(b)* $3a^6+6a^4x^2+3a^4+3a^2x^4+6x^3a^2+6x^2a^2+4xa^2$ *(2)* $\cancel{4a^4}$ *L*

---

6 $+\cancel{4a^4}$: Auf der linken Seite dieser und der folgenden Gleichung unterlaufen Leibniz Versehen, welche die weitere Rechnung beeinträchtigen.

$$\square$$

$$z^4 - 4a^2\ z^2\ + 4\ \overbrace{a^2 + x^2}$$
$$- 4x^2$$
$$\sqcap\ - 4x^2\ a^2\ + \ldots\ldots\ldots$$

Ergo $z^2 - 2a^2 - 2x^2\ \sqcap\ \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

6. SCHEDIASMA DE SUPERFICIEBUS CONOEIDUM

3. Oktober 1674 und Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 5 Bl. 1–2. 1 Bog. 4°. 4 S. 2 Teile. Teil 1 vom 3. Oktober 1674 auf Bl. 1–2 r°, Teil 2 vom Januar 1676 auf Bl. 2 v°.
Cc 2, Nr. 773, 1277

[*Teil 1*]

3. Octob. 1674.

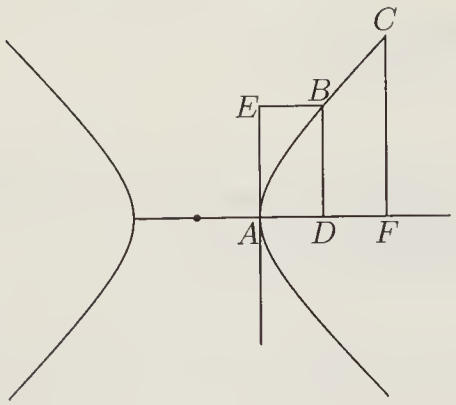
Schediasma de superficiebus Conoeidum et Sphaeroeidum, item de Curva Ellips. et Hyperbolae

Cum hodie apud Cl^mum^ Justellum essem, de Analysi et Arithmetica infinitorum sermo incidit; Doctissimus Geometra, Ismaël Bullialdus, utilitatem characterum analyticorum confessus, caeteroquin negavit, per Algebram dari posse theorematum ab Archimede, de Sphaera et Cylindro, deque Conoeidibus et Sphaeroeidibus demonstrationes; in quo ei assensus sum. Inde cum procederet sermo, dixi pleraque ab Archimede in illis libris demonstrata recidere ad quadraturam parabolae; Archimedem vero solida quidem Conoeidum et Sphaeroeidum, sed non superficies dedisse; earum autem solutionem tum Celeberrimum Hugenium, tum et me habere. Respondit Bullialdus si quis eas det sed demonstratas, rem ex subtilissimis eorum quae inde ab Archimede in eo genere data sunt, dedisse ipsi videri. Ego vero dare in me suscepi.

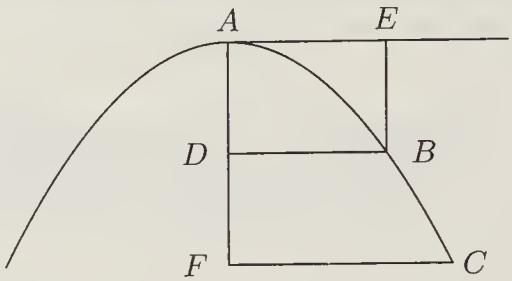
Esto curva conica, ABC, cujus vertex A. Axis AD tangens AE. basis ubicunque sumta CF. abscissa $AD \sqcap x$, ordinata $DB \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$.

9 item ... Hyperbolae *erg. L* 12 per *(1)* Analysin d *(2)* Algebram *L* 13 demonstratorum *L ändert Hrsg.* 16 f. tum *(1)* Hug *(2)* Nobi *(3)* Celeberrimum *L*

10 Justellum: H. Justel. 11 Bullialdus: I. Boulliau. 12 f. ab Archimede: vgl. ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* und *De conoidibus et sphaeroidibus*. 15 demonstrata: vgl. ARCHIMEDES, *De conoidibus et sphaeroidibus*, § 3, 12, 21–24. 16 solutionem: vgl. Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 [Marg.] (HO XVIII S. 211–221). 17 et me: vgl. VII, 4 N. 28 S. 509 bis 515.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Ordinata proxime major: $\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2}$, differentia earum:

$\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2} \quad - \quad \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \quad \sqcap \quad \frac{y\beta}{a}$. Unde

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sqcap \quad + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad + \quad \frac{y\beta}{a}$,

et quadrando: $\boxed{2ax} + 2a\beta \mp \frac{a}{q} \frown \begin{matrix}\boxed{x^2}\\ 2x\beta\\ +\beta^2\end{matrix} \sqcap \boxed{2ax}\ \boxed{\mp \frac{a}{q}x^2} + 2\frac{y\beta}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$; rejectisque omnibus in quibus β^2 quadrata, fiet: $\not{2}a \mp \not{2}\frac{a}{q}x \sqcap \not{2}\frac{y}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, et quadrando: $a^2 \mp \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2 \sqcap \frac{y^2}{a^2} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2$. Hinc ut obiter dicam, quadratura habetur hujus figurae:

$$\frac{a^2 \mp \frac{a^2}{q}x}{\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}} \sqcap y.$$

---

8 *Spätere Nebenbetrachtung:* $\dfrac{\frac{a^4}{q^2}x^{\not 2}}{2a\not{x} \mp \frac{a}{q}x^{\not 2}} \sqcap y^2$ et $x \sqcap \dfrac{2ay^2}{\frac{a^4}{q^2} \mp \frac{a}{q}y^2}$.

---

1 *Fig. 2*: Eine gestrichene Vorstufe zu Fig. 2 wird nicht wiedergegeben.

Jam, $\frac{a^2 \mp \frac{2a^2x}{q} + \frac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\beta^2 \sqcap \beta^2\frac{y^2}{a^2}$, addatur ad β^2, quod ita commode fiet:

$\frac{a^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\beta^2 \boxed{\frac{\mp\frac{2a^2x}{q} + \frac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\beta^2} \mp\frac{a}{q}\beta^2$, addenda ad β^2, producti radix exprimet Elementa ipsius Curvae Conicae. Fietque: $\sqrt{\frac{a^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \mp \frac{a}{q} + 1} \sqcap \frac{z}{a}$. Quod est Elementum Curvae Conicae. Unde pro parabola: $\sqrt{\frac{a^2 + 2\not{a}x}{2\not{a}x}} \sqcap \frac{z}{a}$. Unde $\frac{a}{2x} + 1 \sqcap \frac{z^2}{a^2}$, vel: $2x \sqcap \frac{a^3}{z^2 - a^2}$. Haec ergo figura pendet a quadratura Hyperbolae, quia et curva parabolae. Ducatur in distantiam ab axe, seu ordinatam parabolicam $\sqrt{2ax}$, fiet $\sqrt{a^2 + 2ax}$, quae progressio est ad Parabolicam, ideoque habetur superficies circa axem. Ut habeatur Superficies circa tangentem, ducatur in x, seu $\sqrt{x^2}$, fiet: $\sqrt{\frac{a}{2}x + x^2}$, quae est progressio ad Hyperbolam.

Recta AF, vocata f, erit $DF \sqcap f - x$, in quam si ducatur Elementum Curvae, fiet aequatio: $a^2 + 2ax, \frown f^2 - 2fx + x^2, \sqcap 2axv^2$, quam proinde figuram ex Hyperbola pendere necesse est.

$1 \sqcap \beta^2\frac{y^2}{a^2}$, *(1)* auferatur a $\frac{\beta^2}{\beta^2}$ *(2)* auferatur a β^2, qvod ita commode fiet: $\frac{a^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\beta^2$ $\boxed{\frac{\mp\frac{2a^2x}{q} + \frac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\beta^2}$ $\mp\frac{a}{q}\beta^2$, auferenda a β^2, residui radix *(a)* repr *(b)* exprimet Elementa ipsius Curvae Conicae. *(aa)* un *(bb)* fietqve: *(aaa)* $\frac{2a}{x}$ *(bbb)* $\sqrt{\frac{2ax\beta^2 \mp \frac{a}{q}x^2\beta^2 - a^2\beta^2 \pm \frac{2a^2x}{q}\beta^2 - \frac{a^2}{q^2}x^2\beta^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}} \sqcap \frac{z\beta}{a}$

sive $z \sqcap$ *(3)* addatur L 4–6 Unde $\frac{a}{2x} + 1$ ... parabolae *erg.* L

Pro Circulo aut Hyperbola Circulari fit: $\sqrt{\frac{a^2}{2ax \mp x^2} \mp 1 + 1} \sqcap \frac{z}{a}$. Et pro Circulo quidem $\sqrt{\frac{a^2}{2ax - x^2}} \sqcap \frac{z}{a}$, pro Hyperbola $\sqrt{\frac{a^2}{2ax + x^2} + 2} \sqcap \frac{z}{a}$. Hinc Elementum Curvae Circularis ducendo in ejus distantiam a diametro, seu in $\sqrt{2ax - x^2}$, fit $\sqrt{a^2}$, sive a. Ac proinde habetur superficies circa diametrum. Ducatur in x, distantiam a vertice, fiet: $a\sqrt{\frac{x}{2a - x}} \sqcap \omega$ unde $a^2x \sqcap 2a\omega^2 - x\omega^2$ cujus quadratura pendet a Quadratura Circuli, ac proinde: $x \sqcap \frac{2a\omega^2}{a^2 + \omega^2}$ est ad figuram Circulo symmetram.

At Elementum Curvae Hyperbolae ducendo in ejus sinum, fit: $\sqrt{a^2 + 4ax + 2x^2}$, cujus progressio est ad aliam Hyperbolam, etiam latera rectum transversumque aequalia habentem; si ducas in x, fiet: $\sqrt{\frac{a^2x}{2a + x} + 2x^2}$. Unde patet nihil fere habere hic quidem Hyperbolam simplicem in quo emineat prae composita.

Si Elementum Hyperbolae vel Ellipsis ducatur in ordinatam, fiet: $\sqrt{a^2, \mp\frac{a}{q} \frown 2ax + \frac{a^2}{q^2}x^2 + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, quae progressio est ad Hyperbolam vel Ellipsin, ita scilicet ut sit semper ad Hyperbolam, quando curva est Hyperbola, sed quando curva est Ellipsis tunc distinguendum est, nam, si $+\frac{a^2}{q^2} - \frac{a}{q}, x^2$ est quantitas affirmativa, seu quando a, major quam q, latus rectum quam transversum, aequatio est ad Hyperbolam, sin contra ad Ellipsin.

Habetur ergo Centrum gravitatis Curvae Ellipticae ex supposita Circuli et Hyperbolae quadratura, eandem curvam Ellipticam modo ad minorem modo ad majorem axem referendo.

11 f. fiet: | $\sqrt{a^2, \mp\frac{a}{q} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$ *ändert Hrsg.* |, qvae *L* 12 Hyperbolam *(1)* pro Hyperbola, ad Ellipsin pro Ellipsi. *(2)* vel *L* 15 ad *(1)* Ellipsin, sin contra ad *(2)* Hyperbolam, *L* 16 contra *(1)* ad Ellipsin seu *(2)* ad *L*

---

8 aequalia: Die Aussage ist nicht richtig. 17 Habetur: Die folgende Behauptung zum Schwerpunkt des Bogens der Ellipse gilt ebenso wie die S. 38 Z. 6 – S. 39 Z. 1 bzgl. der Hyperbel nur für die Momente; zur Bestimmung des Schwerpunkts wären noch die Bogenlänge der Ellipse bzw. der Hyperbel erforderlich.

Jam eundem calculum resumemus, ponendo ordinatam ad Conicam esse: $\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$ quae est ad Ellipsin vel Hyperbolam, et Circulum, parabola exclusa, fiet:

Proxime major ordinata: $\sqrt{a^2,, \mp \frac{a}{q}, \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2}$, differentia:

$\sqrt{a^2,, \mp \frac{a}{q} \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2} - \sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2} \sqcap \frac{y\beta}{a}$. Unde transponendo:

..... $\sqcap$ + ... + ... et quadrando: 5

$\boxed{a^2},, \mp \frac{a}{q} \frown \boxed{z^2} + 2z\beta + \beta^2 \sqcap \boxed{a^2} \boxed{\mp \frac{a}{q}z^2} + \frac{2y\beta}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$ et destructis destru-

endis, atque ordinando: $\mp \frac{2a}{q}z \sqcap \frac{2y}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$, unde $y \sqcap \frac{[\mp]a^2 z}{q, \frown \sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}}$. Hujus ergo

figurae generaliter habetur quadratura. Ejus quadratum quadrato ab a, addatur, fiet:

$\frac{a^4 z^2}{q^2 \frown \lrcorner a^2 \mp \frac{a}{q}z^2 \lrcorner} + a^2$, unde radix: $\frac{a}{q}\sqrt{\frac{a^2z^2 + a^2q^2 \mp \frac{a^3}{q}z^2}{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}}$ Elementum Curvae Hyperbo-

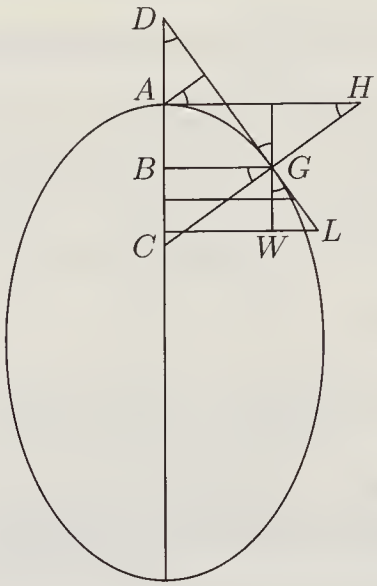
licae vel Ellipticae. 10

Sed jam praevideo quod nihil hinc novi, magni momenti ultra calculum priorem; tantum ob circulum patebit: $\sqrt{\frac{\not{a}q^2 z}{\not{a}^2 \mp \frac{\not{a}}{q}z^2}}$ ex Circuli quadratura pendere.

$\frac{GL}{GC} \sqcap \frac{GW}{BG}$, unde $GL \frown BG \sqcap GC \frown GW$, quod demonstrat summam omnium perpendicularium GC aequari momento curvae ex axe AB. At $GL \sqcap \frac{GC \frown GW}{BG}$.

1 f. esse *(1)* $a^2 - x^2 \sqcap y$ *(2)* $b^2 - z^2 \sqcap$ *(3)* $\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$ *(a)* $\sqcap y^2$ *(b)* qvae *L* 2 parabola *(1)* et recta exclusis *(2)* exclusa *L* 7 $\frac{2y}{a}\sqrt{a^2 \mp \frac{a}{q}z^2}$, *(1)* vel qvadrando *(2)* Unde *L*

9 radix: Der Zähler des Bruchs unter der Wurzel müsste lauten: $a^2z^2 + a^2q^2 \mp aqz^2$. Der richtige Wert für das Bogenelement des Kreises in Z. 12 wäre $\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - z^2}}$.



[*Fig. 3*]

Aestimemus valorem ipsius GC in Hyperbola, fiet: $\sqrt{,,,\frac{a}{q}x+a,\square,,+2ax+\frac{a}{q}x^2}$ sive $\sqrt{\frac{a^2}{q^2}x^2+\frac{2a^2}{q}x+a^2+2ax+\frac{a}{q}x^2}$, quae figura est Hyperbola. Porro $\frac{\frac{a}{q}x+a}{x} \sqcap \frac{\sqrt{\frac{a^2}{q^2}x^2+\frac{2a^2}{q}x+a^2}}{\sqrt{+\frac{a}{q}\quad+2a}}$. Est autem $\frac{2\phi q}{\phi}x+x^2+q^2 \sqcap y^2+q^2$, fiet: $x \sqcap \sqrt{y^2+q^2}-q$, unde $\frac{\frac{a}{q}\sqrt{y^2+q^2}-q+a}{\sqrt{y^2+q^2}-q} \sqcap \frac{\sqrt{\frac{a}{q}y^2+a^2}}{GH \sqcap e}$. Ergo e, seu GH, pendet a centro gravitatis Hyperbolae.

3 figura *(1)* pendet ex *(2)* est L

4 y^2+q^2: Es fehlt der Faktor $\frac{q}{a}$ vor y^2. Der fehlerhafte Term wirkt sich zusammen mit einem weiteren Flüchtigkeitsfehler bis zum Ende der Rechnung Z. 5 aus.

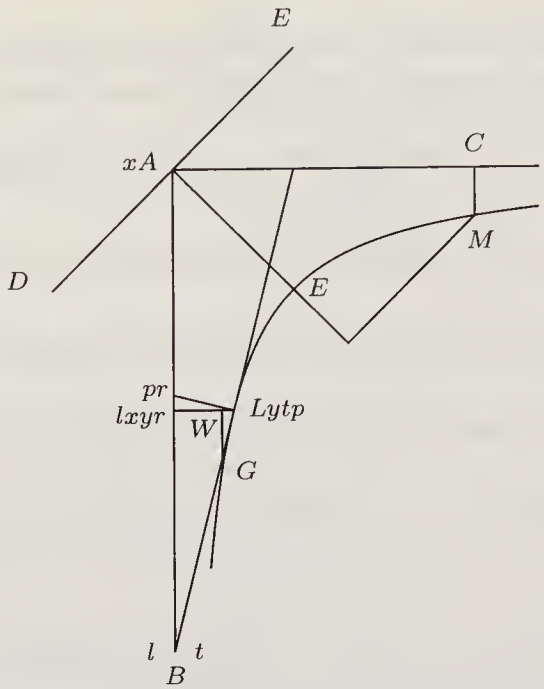
Habemus Centrum Gravitatis Curvae parabolae et Ellipseos, restat Centrum gravitatis curvae Hyperbolae. Hyperbolam utile est aliter nunc quidem considerari, nempe: ordinata ad asymptoton $\frac{a^2}{x}$, proxime major: $\frac{a^2}{x-\beta}$, differentia: $\frac{a^2}{x-\beta} - \frac{a^2}{x}$, sive $\frac{\boxed{a^2x - a^2x} + \beta a^2}{x^2 - \beta x}$, sive $\frac{\beta a^2}{x^2}$, addatur ejus quadratum, ad β^2, fiet: $\frac{\beta^2 a^4 + x^4\beta^2}{x^4}$, cujus radix: $\frac{\beta}{x^2}\sqrt{a^4 + x^4}$, Elementum curvae Hyperbolae. Ducatur in x distantiam ab asymptoto, fiet: $\frac{\beta}{x}\sqrt{a^4 + x^4}$ qua curvae Hyperbolicae momentum ex Asymptoto exhibetur. Unde aequatio talis: $y^2x^2 \sqcap a^4 + x^4$. Sive $y^2 - x^2 \sqcap \frac{a^4}{x^2}$ sive $y + x, \frown y - x \sqcap \frac{a^4}{x^2}$, vel $y^2x^2 - a^4 \sqcap x^4$, sive $yx - a^2, \frown yx + a^2 \sqcap x^4$.

In Ellipsi est Reducta, ad axem: $a - \frac{a}{q}x$, ejus quadratum est $a^2 - \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2$, addatur quadrato ordinatae Ellipseos, nempe $2ax - \frac{a}{q}x^2$, fiet: $\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2} \sqcap + 2a \;..\; - \frac{a}{q}$ perpendiculari ad Ellipsin.

Quantum ad Hyperbolam circa Asymptotos, fiet $yl \sqcap \boxed{a^2} - yx$. sive $l \sqcap -x$. Jam quia $\frac{t}{l \sqcap x} \sqcap \frac{GL}{GW}$, erit $GW \frown t \sqcap x\,GL$. Ac proinde summa omnium t, aequabitur momento curvae ex asymptoto conjugata, est autem $t^2 \sqcap x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ ut ante. Perpendicularis p,

4 ad *(1)* a^2, fiet: $\frac{\beta^2 a^4 + x^4 a^2}{x^4}$, cuius radix: $\frac{a}{x^2}\sqrt{\beta^2 a^2 + x^4}$ *(2)* β^2 *L* 13 fiet *(1)* 2a *(2)* yx *(3)* yl $\sqcap$ *(a)* $a^2 - yx$. sive $l \sqcap \frac{a^2}{y} - x$ *(b)* $\boxed{a^2} - yx$. *(aa)* | sive $l \sqcap -yx$, *streicht Hrsg.* | *(bb)* sive *L*
15 asymptoto *(1)* opposita *(2)* conjugata *L*

1 Ellipseos: s. o. Erl. zu S. 34 Z. 17. 7 aequatio talis: Leibniz bezeichnet hier den Tangentenabschnitt mit y, in Fig. 4 und dem dazugehörigen Text mit t.



[*Fig. 4*]

qualis sit hinc patet quia $rl \sqcap \frac{a^4}{x^2}$, sive $rx \sqcap \frac{a^4}{x^2}$. Ergo $r \sqcap \frac{a^4}{x^3}$, cujus quadrato $\frac{a^8}{x^6}$ addatur $\frac{a^4}{x^2}$. fiet: $\frac{a^8 + a^4x^4}{x^6}$, sive $\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4} \sqcap p$. Hinc patet harum duarum Curvarum $\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4 + x^4}$, et $\frac{a}{x}\sqrt{a^4 + x^4}$ summas concurrere ad centrum gravitatis Hyperbolae. Prior aequalis momento curvae ex AB, posterior ex AC. Unde patet inventa alterutra ex his summis, haberi etiam alterius quadraturam, quia una ex his summis inventa habe-

2 qvia *(1)* px ⊓ *(a)* $\frac{a^2}{x}$ *(b)* $\frac{a^4}{x^2}$, sive px *(2)* | pl *ändert Hrsg.* | ⊓ $\frac{a^4}{x^2}$ *L* 4 summas *(1)* esse symmetras. Nam *(2)* concurrere *L* 5 AB, | posterior ex AC. *erg.* | *(1)* Si pro *(a)* y *(b)* x substituatur in priore eius valor $\frac{a^2}{y}$, fiet: $\frac{a^2}{\frac{a^4}{y^3}}$, sive $\frac{y^3}{a^3}\sqrt{a^4 + \frac{a^8}{y^4}}$, ex qvibus haec priori symmetros. Hinc patet *(2)* Unde *L*

4 $\frac{a}{x}\sqrt{a^4 + x^4}$: Korrekt wäre $\frac{1}{x}\sqrt{a^4 + x^4}$. 6–39,1 habetur: s. o. Erl. zu S. 34 Z. 17.

tur jam centrum gravitatis Curvae Hyperbolae, vel ideo quia ab alterutro latere similis ratiocinatio est, et hyperbola ut ad unam, ita quoque ad alteram est asymptoton.

[*Teil 2*]

Si in aeq: $t^2 \sqcap x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ haberi posset summa omnium x haberetur momentum curvae ex asymptoto conjugata, $x^4 - t^2x^2 + \frac{t^4}{4} \sqcap \frac{t^4}{4} - a^4$. Et $x^2 - \frac{t^2}{2} \sqcap \sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$ seu $x \sqcap \sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}$, quae pendet ex $\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$. Cujus momentum per x est $\sqrt{x^4 + a^4}$. At hoc momentum est corresolubile summis omnium x^2, quae dantur ex datis $\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$. Ergo memorabile quiddam invenimus scilicet $\sqrt{x^4 + a^4}$ et $\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4}$ esse figuras corresolubiles. Quoniam datur $\int \overline{t^2 dx}$, dabitur etiam $\int \overline{dtdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}$. Qualem figuram quadrabilem esse nemo sibi facile persuadeat.

4 *Darüber:* Haec adjeci Januar. 1676.

2 asymptoton. | *(1)* $q^2 + y^2 \sqcap x^2$ *(2)* $2ax$ *(a)* $+ \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, pro x substituatur $z - \frac{q}{\langle - \rangle}$ *(b)* $+ x^2 \sqcap y^2$, pro x substituatur $z - a$, fiet: $\boxed{2az} + z^2 - \boxed{2az} + a^2$ et fiet: $a^2 + z^2 \sqcap y^2$ ponendo $z \sqcap AE$. unde $l \sqcap \frac{y^2}{z}$, sive $l \sqcap \frac{a^2}{z} + z$, et quadratum: $\frac{a^4}{z^2} + 2a^2 + z^2$, addatur ad $z^2 + a^2$ *gestr.* | *L* 4 *(1)* Curva Hyperbolica: *(2)* si *L* 7 est *(1)* syndeton *(2)* corresolubile *L*

5 $x \sqcap$: Im Wurzelausdruck für x fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$ vor t^2. Der fehlerhafte Term wird auch in Z. 9 sowie S. 41 Z. 7–9 benutzt. 9 $\int \overline{dtdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}$: Korrekt wäre $\int 2tdt\sqrt{\sqrt{\frac{t^4}{4} - a^4} + \frac{t^2}{2}}$.

Nota Enchiresin singularem, licet particularem: Sit curvae portio MEG. et portio ME aequalis et similis portioni GE, utique centrum ejus gravitatis cadit in axem AE; porro momentum ejus ex AB est $\int \frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}$ et momentum ex AC, est $\int \frac{a^2}{x}\sqrt{a^4+x^4}$. Distantia centri gravitatis ab AB est $\frac{\int \frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}}{ACE \sqcap \text{curv.}}$ et dist. centri gravitatis ab AC est $\frac{\int \frac{a^3}{x}\sqrt{a^4+x^4}}{ACE \sqcap \text{curv.}}$. Sunt autem hae distantiae aequales. Nam quocunque sumto puncto in AE demissa inde perpendicularis in AB, est aequalis demissae alteri in AC, ergo eo casu, quo $EM \sqcap EG$ seu $AC \sqcap x$ erit $\int \frac{a^3}{x}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap \int \frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}$. Similis ratiocinatio servit in omnibus aliis curvis, quando ad duo anguli recti latera similiter referuntur. Idem erit non tantum de curvarum sed et spatiorum momentis; et quando eveniet, ut unum momentum quadretur, semper habebitur et quadratura alterius, non quidem omnium portionum attamen certae, et habemus exemplum quo portiones quaedam certae figurarum quadrari possunt. Et videndum an non eorum ope aliquando perveniri possit, ad aliquam portionem arcus circuli dimetiendam; tametsi ejus ratio ad totam Circumferentiam haberi nequeat.

Simili stratagemate uti licet in figuris recurrentibus, cum in ultimo casu momenta ex vertice v. g. et momenta ex basi coincidunt; quod facit ut figura sinuum tota (etsi non partes) mensurari possit, et alia id genus.

Si Angulus ita sumtus sit, ut non bisecetur ab axe figurae curvilineae, tunc quoniam nihilo minus semper patet centri gravitatis figurae locus haberi poterit ratio momentorum.

8 referuntur. *(1)* Ubi fieri poterit, ut una sit *(2)* Idem *L* 10 semper *erg. L* 10 f. qvidem *(1)* semper attamen in certo casu *(2)* omnium ... attamen | in certa, *ändert Hrsg.* | et *L* 18 Angulus *(1)* rectus *(2)* ita *L*

---

3 momentum ex AC: Der korrekte Ausdruck für das Integral wäre $\int \frac{\sqrt{a^4+x^4}}{x}dx$. Leibniz behält den fehlerhaften Term bis zum Ende der Überlegung Z. 7 bei. 4 $ACE \sqcap$ curv.: Der Kurvenbogen wird in Fig. 4 und im Text Z. 1 mit MEG bezeichnet.

$t \sqcap \frac{1}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ et $\frac{at}{x} \sqcap$ Elemento curvae, $\sqcap \frac{a}{x^2}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap z$. Ergo $z^2 \sqcap \frac{a^2}{x^4}, a^4+x^4$ sive $z^2 \sqcap \frac{a^6}{x^4}+a^2$. Habetur ergo $\int z^2dx$. ergo $\int xzdz$. $x^4z^2-a^2x^4 \sqcap a^6$. et $x^2 \sqcap \frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ et $x \sqcap \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$. Ergo $\int zdz\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$ absolute habetur, et talis figura quadrari potest. $\int \frac{a^2dx}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ et $\int \frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ sunt corresolubiles.

$t^2 \sqcap \frac{1}{x^2}\overline{a^4+x^4} \sqcap \frac{a^4}{x^2}+x^2$, quae habentur. Jam $\int \overline{t^2dx}$ corresol. $\int \overline{txdt}$ (NB. faciendum signum quod exprimat corresolubilitatem +). Ergo quia $\int \overline{t^2dx}$ id est $\int\overline{\frac{a^4}{x^2}+x^2}$ haberi potest, et $t^2x^2 \sqcap a^4+x^4$. et $x^4-t^2x^2+\frac{t^4}{4} \sqcap \frac{t^4}{4}-a^4$. et $x^2 \sqcap t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}$ et $x \sqcap \sqrt{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$. ideo habebitur $\int t\sqrt{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$. Porro $\int \overline{x^2dt}$ corresol. $\int \overline{txdx}$. Ergo ex $\int\overline{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$ habetur $\int \overline{txdx} \sqcap \int \sqrt{a^4+x^4}$: Quod est m e m o r a b i l i s s i m u m.

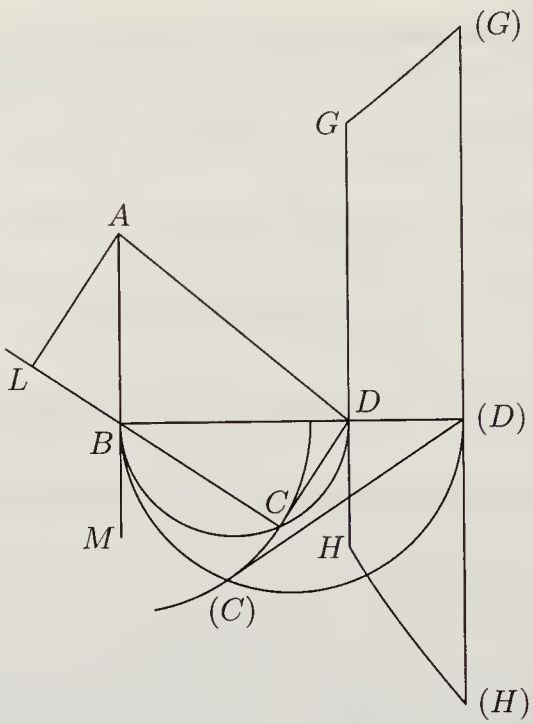
$\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap p$. $\int\overline{pxdx} \sqcap \int \frac{a^2}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$ curvae longitudo. At $\int\overline{pxdx}$ corresol. $\int\overline{x^2dp}$. Ergo $x^6p^2 \sqcap a^8+a^4x^4$ et haberi poterit x^2 per duo binomia Cardanica, quorum summa pendebit ex dimensione curvae Hyperbolae.

$p^2 \sqcap \frac{a^8}{x^6}+\frac{a^4}{x^2}$. Jam $\int p^2dx$ corresol. $\int\overline{xpdp}$. At $\int\overline{xpdp}$. dabit rursus figuram satis mirabilem cujus haberi potest quadratura.

1 et | $\frac{a^2t}{x}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ Elemento *L* 5 $\int t^2dx$ *(1)* $\sqcap$ *(2)* corresol. *L* 9 $\int\overline{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$

(1) seu ex qvad. Hyp. *(2)* habetur *L*

5–9 t^2: Im vorliegenden Abschnitt ändert Leibniz die zunächst gewählte Variable p in t um, verbessert aber unvollständig. Im Text wurde eine Angleichung vorgenommen. 7 $x^2 \sqcap$: s. Erl. zu S. 39 Z. 5.



[*Fig. 5*]

$BD \sqcap x$. $AB \sqcap a$. $AD \sqcap \sqrt{x^2 + a^2} \sqcap DG$. Circulus circa BD alius circulus centro B radio $BC \sqcap AB$, ductus secet priores in punctis $C.(C)$. Jungantur $CD \sqcap \sqrt{x^2 - a^2}$ et transferantur in DH. $(D)(H)$. Exit tam curva $G(G)$ quam curva $H(H)$ Hyperbolica. Quodsi jam unius planum sit alteri perpendiculare et in se invicem ducantur, fiet $\sqrt{x^4 - a^4}$. Notabilis relatio inter haec Triangula: ABD, et BCD duo habent latera communia, unumque angulum, sed non latera homologa adeoque nec eadem nec similia sunt, dubitandum tamen non est aliquid in ipsis latere notabile.

In productam CB in L. ducatur AL perpendicularis seu parallela DC et producatur AB in M. Erit ang. $MBC \sqcap$ angulo LBA. Ergo [ang.] $LAB \sqcap$ ang. DBC. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}} ALB, BCD$ similia, et erit ut AL ad AB, ita $AB \sqcap BC$ ad BD et $AL \sqcap \frac{a^2}{x}$.

1 *Fig. 5*: Leibniz hat die Figur in mehreren Ansätzen erarbeitet. Verworfene und ersetzte Elemente werden nicht wiedergegeben.

7. SCHEDIASMA DE METHODO TANGENTIUM INVERSA AD CIRCULUM APPLICATA

Oktober 1674

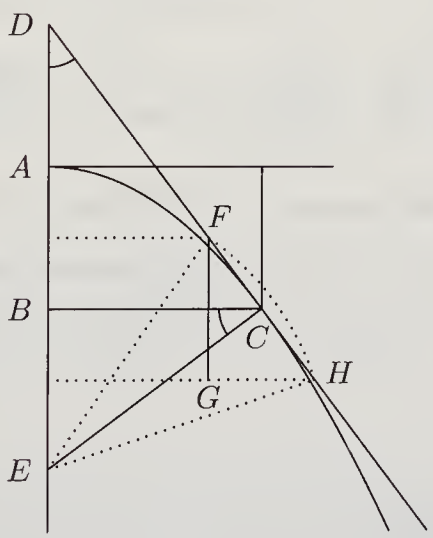
7_1. PLAGULA PRIMA

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 V 1 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. mit zahlreichen Randbemerkungen. Bl. 2 v° durch Streichung ausgegliedert (= Teil 2).
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Octob. 1674.

Schediasma de Methodo Tangentium inversa, ad Circulum applicata, ubi multa de hoc argumento generaliora. Et plagula tertia quaedam valde notabilia de formis aequationum ex aliis productarum et plagula 4ta de Locis ad superficiem.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

9–13 Schediasma ... plagula |5ta *ändert Hrsg.*| de ... superficiem *erg. L*

Data aequatione exprimente relationem lineae BE, ad lineam AB invenire relationem lineae BC. ad eandem.

Esto $AB \sqcap x$. $BE \sqcap z$. $BC \sqcap y$. $EC \sqcap p$. Relatio inter z et x expressa aequatione, v. g. (1) $z^2 \sqcap a^2 - x^2$. Erit (2) $p^2 \sqcap a^2 - x^2 + y^2$. In qua aequatione tam x quam y duos habent valores aequales, a autem et p non nisi unum. Conferenda ergo haec aequatio est cum alia, in qua duas constat incognitas duos habere valores aequales; $x + b \frown x + b$, dabit $x^2 + 2bx + b^2 \sqcap 0$. Ducatur in $y^2 + 2cy + c^2 \sqcap 0$, fiet:

[(3)] $x^2y^2 + 2bxy^2 + 2cx^2y + b^2y^2 + 4bcyx + c^2x^2 + 2cb^2y + 2bc^2x + b^2c^2 \sqcap 0$.

Sed revera video hanc aequationem non pertinere ad rem, ita enim proposita aequatio foret divisibilis in duas, sic ergo malo:

(4) $x + y + b \frown x + y + b \sqcap x^2 + 2xy + 2xb, + y^2 + 2yb, + b^2 \sqcap 0$.

Aequatio autem 2, nempe $y^2 - x^2 + a^2 \sqcap 0$, ut similis reddatur quartae videndum est.

$$-p^2$$

Quam in rem explicare necesse est ipsas y. et x. nimirum, ponamus: $y \sqcap z + c$. et $x \sqcap v + d$. Unde: $y^2 \sqcap z^2 + 2zc + c^2$. $x^2 \sqcap v^2 + 2dv + d^2$.

---

3 *Nebenbetrachtung:* $AB \sqcap x$. $AE \sqcap v$. $BE \sqcap v - x$, $BC \sqcap y$. $-v^2 + 2vx - x^2 + p^2 \sqcap y^2$. Pone $\frac{FG}{GH} \sqcap \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. $FG \sqcap \frac{a}{a}$, $GH \sqcap \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$. $FH \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2 - x^2}{a^2}}$ sive $FH \sqcap \frac{\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$. Jam $\frac{FH}{FG} \sqcap \frac{DC}{DB} \sqcap \frac{EC \sqcap p}{BC \sqcap y}$. Ergo $\frac{p}{y} \sqcap \frac{\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$. Ergo $p \sqcap \frac{y\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$ et $p^2 \sqcap \frac{2y^2a^2 - y^2x^2}{a^2}$. Unde aequatio: $-a^2v^2 + 2vxa^2 - x^2a^2 + 2y^2a^2 - y^2x^2 \sqcap y^2a^2$ sive $-a^2v^2 + 2xva^2 - x^2a^2 + y^2a^2 - y^2x^2 \sqcap 0$ et mutatis signis: $\odot a^2v^2 - 2xva^2 + x^2a^2 - y^2a^2 + y^2x^2 \sqcap 0$ sive $\mp v \pm x \sqcap \frac{y}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ quae tantum determinanda est ad duas radices aequales.

20 $y\sqrt{a^2 - x^2}$ *L ändert Hrsg.*

---

4 f. duos ... aequales: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f. 13 ponamus: Im Folgenden steht z nicht mehr für BE.

Unde: (5) $z^2 - v^2 + 2cz - 2dv + c^2 \sqcap 0$. Et loco aequationis 4 scribatur:

$$\begin{array}{l} -d^2 \\ +a^2 \\ -p^2 \end{array}$$

(6) $v^2 + z^2 + 2vz + 2bv + 2bz + b^2 \sqcap 0$. Multiplicetur utraque aequatio per (7) $v + \frac{l}{a}z + m \sqcap 0$. et fient similes inter se. Nam 6ta per 7^{mam} dabit:

$$\begin{array}{l} v^3 + \frac{l}{a}z^3 + \frac{l}{a}v^2z + \quad vz^2 + 2b\,v^2 + \frac{2lb}{a}z^2 + \frac{2bl}{a}vz + b^2\ v + \frac{b^2l}{a}z + mb^2 \sqcap 0 \\ \qquad + 2\ \ldots + \frac{2l}{a}\ \ldots + m\ ..\ + m\ ..\ + 2b\ ..\ + 2bm\ ..\ + 2bm\ .. \\ \qquad\qquad + m\ .. \end{array}$$

Sed video me non quidem errorem admisisse, sed tamen imperfectionem reliquisse, et incognitas habere debito pauciores, itaque resumam non tantum, sed et numeros adjiciam, ut facilius calculi error in progressu vitetur:

Itaque sumamus: (1) $1x + \frac{6l}{a}y - 7m \sqcap 0$, et quadrando fiet:

$$\begin{array}{l} (2)\ \ x^2 + \boxed{2}\frac{6l}{a}yx - \boxed{2}7mx, + \frac{36l^2}{a^2}y^2 - \boxed{2}42\frac{lm}{a}y + 49m^2 \sqcap 0 \\ \hline 1\ +12\qquad -14\qquad +36\qquad -84\qquad +49 \end{array}$$

Ducatur haec aequatio in aliam $x + \frac{4n}{a}y - 5q \sqcap 0$. ponendo $n \sqcap 2$. et fiet:

---

15 *Kontrollrechnung:*

49	84
1	14
12	98
36	
98	

1 $\sqcap$ 0. *(1)* Multiplicetur utraqve aeqvatio per v: (6) $x^2+2xy+2bx,+y^2$ *(2)* Et *L* 10 f. reliqvisse, *(1)* unamqve *(2)* et *(a)* incognitam habere debito minorem *(b)* incognitas *L*

---

5 (6): In der Gleichung fehlen die Terme $+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd+2cv+2cz+2dv+2dz$. Leibniz rechnet konsequent weiter bis Z. 9, wo er den Faktor 2 vor dem Term vergisst, und setzt dann neu an. 11 numeros: Leibniz verwendet im Folgenden zunächst stillschweigend 2 als Kontrollzahl für y.

(3)

$$+x^3 + \boxed{2}\frac{6l}{a}\,x^2y - \boxed{2}7m\,x^2 + \frac{36l^2}{a^2}\,xy^2$$

$$+\frac{144l^2n}{a^3}y^3 \quad + \quad \frac{4n}{a} \;\ldots \qquad +\boxed{2}\frac{24ln}{a^2}\;\ldots$$

$$-245m^2q \qquad\qquad -\quad 5q\;..$$

$$-245 \quad + \quad 144 \quad + 1 + \quad 16 \quad - \quad 19 \quad + \quad 84$$

$$-\boxed{2}\frac{42lm}{a}\,xy + \quad 49m^2\,x$$

$$-\boxed{2}\frac{28mn}{a}\;.. \qquad -\boxed{2}\frac{168lmn}{a^2}\,y^2 + \quad \frac{196m^2n}{a} \quad y$$

$$-\boxed{2}\frac{30lq}{a}\;..\;+\boxed{2}35qm\;..-\quad \frac{180l^2q}{a^2}\;..+\boxed{2}\frac{210lmq}{a}\;..$$

$$-\quad 200 \quad + \quad 119 \quad - \quad 456[!] \quad + \quad 616 \qquad \sqcap\, 0$$

1–8 *Neben- und Kontrollrechnungen:*

49	16	48	84	49				24	36	168		49	42	196
5	9	36	56	70				7	5	2		4	5	420
245	144	84	60	119				168	180	336		196	210	616
			200							180				
										416 [!]				

245	144	1	14	144	56	70	245
19	1	12	84	4	336	420	5
200	16	36	98	48	392	490	60
416	84	49		196			180
880	119	98		392			490
	616						
	880 [!]						

1 (3): In den Neben- und Kontrollrechnungen unterlaufen Leibniz kleinere Flüchtigkeitsfehler, die sich teilweise kompensieren und die weitere Überlegung nicht beeinträchtigen.

Esto jam aequatio data: (4) $v^2 - \omega^2 + a^2 - p^2 \sqcap 0$ (loco superioris: $y^2 - x^2 + a^2 - p^2 \sqcap 0$).

Esto (5) $v \sqcap x + c$, et (6) $\omega \sqcap y + d$, fiet: $x^2 + 2cx + c^2 - d^2 - y^2 - 2dy \sqcap 0$. $+ a^2 - p^2$

(6) $1x^2 + \boxed{2}\, 9cx \left\{ \begin{array}{l} \odot a \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + 81\, c^2 - 4y^2 - \boxed{2}\, 8dy \,[\sqcap 0]. \\ - 16\, d^2 \\ + 36\, a^2 \\ - 100\, p^2 \end{array} \right.$

$\boxed{1 \quad +18 \quad 81} \quad - 16 \quad - 4 \quad - 16$

$36 \quad \boxed{-100}$

---

6 *Nebenbetrachtung, durch Umrahmung ausgegliedert:* Quod facile in numeris exequemur, nam fingendo $a \sqcap p - e$, fiet $v^2 - \omega^2 \boxed{+p^2} - 2pe + e^2 \boxed{-p^2} \sqcap 0$ et $p \sqcap \frac{v^2 - \omega^2 + e^2}{2e}$. Cumque sit $y \sqcap 2$. ponendo $d \sqcap 4$, fiet $\omega \sqcap 6$. Eodem modo quia $x \sqcap 1$. ponendo $c \sqcap 9$, fiet $v \sqcap 10$. $p \sqcap \frac{64 + e^2}{2e}$ pone $e \sqcap 4$, fiet: $p \sqcap \frac{64 + 16}{2 \frown 4} \sqcap 10, a \sqcap p - e \sqcap 10 - 4 \sqcap 6$.

1 *(1)* Hactenus incognitas habemus *(a)* tres, *(b)* qvatuor, l. m. n. p. *(2)* Esto L 14 c $\sqcap$ *(1)* 6 fiet v $\sqcap$ 7 *(a)* | et p $\sqcap$ $\frac{\boxed{49 - 36}\, 13 + 1}{2} \sqcap 7$ *streicht Hrsg.* | *(b)* 2p $\sqcap$ $\frac{13 + e^2}{e}$ sive e + $\frac{13}{e}$, sive 2pe − e² $\sqcap$ 13. ponendo e $\sqcap$ 26, fiet: *(aa)* 2p $\sqcap$ *(bb)* 4 ⌢ ~~26~~p − 26 ⌢ ~~26~~ $\sqcap$ ~~13~~ $\frac{26}{2}$ *(2)* 8 *(3)* 9 *L*

---

2 (6): Leibniz wiederholt die Zählung in Z. 6 und bezieht sich in der Folge stets auf die zweite der mit (6) bezeichneten Gleichungen. 7 $\odot a$: Der Homogenitätsfaktor a mit der Kontrollzahl 1 ist zu unterscheiden von dem a mit der Kontrollzahl 6.

Quam aequationem 6 multiplicemus per aliam (7) $x + \frac{16r}{a}y - 15s \sqcap 0$ fiet:

$$(8)\quad 1x^3 + \boxed{2}\ 9c\,x^2 + \quad \odot a\,x - 4y^2x - \boxed{2}\quad 8d\,yx$$
$$- \quad 15s\,x^2 - \boxed{2}\,135sc\,..\qquad + \boxed{2}\,\frac{14cr}{a}\ ..$$
$$+ \ \frac{16\odot \not{a}r}{\not{a}}\,y - \frac{64r}{a}y^3 - \boxed{2}\,\frac{128dr}{a}\,y^2 + \frac{16r}{a}\,x^2y \qquad [\sqcap 0]$$
$$+\boxed{2}\,120ds\,y \qquad + \quad 60s\,y^2 \qquad -15\odot as$$

Si metuemus ne forte non satis sit incognitarum, in effectu, (etsi numerus sufficere videatur) quia in aeq. 6. neque x^2, neque y^2, habeant arbitrariam, ideo altera ab ipsis, v. g. y^2, potest intelligi multiplicata per arbitrariam, ut $\frac{b}{a}$, nam $a^2 - \frac{b}{a}y^2$, est ad Ellipsin. Data autem Quadratrice Ellipseos, dabitur et Circuli. Idem est de Hyperbola, si b sit quantitas negativa, adeoque utile fuisset adhibere b, sed et facile suppleri potest.

Habemus ergo aequationes duas conferendas inter se, in quibus certum est errorem calculi esse nullum:

47,10 *Kontrollrechnungen:*

16			1
100			18
4			81
32			100
142	[*!*]		36
			136

2–5 *Kontrollrechnungen:*

32	256	15	60
288	64	270	240
320	320	15	300
		300	

Collatitiae

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ x^3 + & \frac{144l^2n}{a^3}\,y^3 & + \boxed{2}\,\frac{6l}{a}\,x^2y & + & \frac{36l^2}{a^2}\,xy^2 & - \boxed{2}\,7m\,x^2 & & \\ & & + \quad \frac{4n}{a} \;\ldots & + \boxed{2}\,\frac{24ln}{a^2} \;\ldots & - & 5q \;.. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 \\ - \boxed{2}\,\frac{168lmn}{a^2}\,y^2 & & - \boxed{2}\,\frac{42lm}{a}\,xy & + & 49m^2\,x & + & \frac{196m^2n}{a}\,y & - 245\,m^2q & \sqcap\, 0. \\ - \quad 180\frac{l^2q}{a^2} \;.. & & - \boxed{2}\,\frac{28mn}{a} \;.. & + \boxed{2}\,35qm \;.. & & + \boxed{2}\,\frac{210lmq}{a} \;.. & & & \\ & & - \quad \boxed{2}\,\frac{30lq}{a} \;.. & & & & & & \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{ccccccc} & [1 & & 2 & & 3 & & 4] \\ x^3 - & \frac{64r}{a}\,y^3 & + & \frac{16r}{a}\,x^2y & - & 4\,xy^2 & + \boxed{2}\,9c\,x^2 & \\ & & & & & - \quad 15s \;.. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & [5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9] \\ + & 60s\,y^2 & - & \boxed{2}\,8d\,xy & + & \odot a\;x & + & 16\odot r\;y & - 15\odot as & \sqcap\, 0. \\ - \boxed{2}\,\frac{128dr}{a} \;.. & & + \boxed{2}\,\frac{144cr}{a} \;.. & & - \boxed{2}\,135sc \;.. & & + \boxed{2}\,120ds \;.. & & & \end{array}$$

Habebimus jam aequationes collatitias novem, literas autem incognitas, $c, d, l, m, n, q, r, s, \odot$. etiam novem. Inveniri ergo poterunt omnes, ac proinde ipsa denique $\odot$, in qua latet p, cujus causa caeterae quaeruntur. Sed ut calculus sine erroris metu expediri possit, iidemque, quibus hactenus usi sumus, numeri serviant, adjiciendae sunt literae quaedam

arbitrariae, quae in medio calculo probationi inserviant, sub finem autem vel nihilo vel unitati, vel alteri cuidam quantitati, quo perinde sit, ac si initio adscriptae non fuissent, aequales ponantur.

Interim in antecessum dici potest, valorem ipsarum $\underline{\underline{l}}. \underline{\underline{n}}. \underline{\underline{r}}$, haberi ex collatitiis $\underline{1}. \underline{2}. \underline{3}.$ nullis aliis in earum valorem ingredientibus, $\underline{\underline{s}}$ habetur ex aeq. $\underline{9}.$ per $\odot. m. q$, $\underline{\underline{d}}.$ ex aeq. $\underline{6}$ per $m. q. c$, $\underline{\underline{q}}$ ex aeq. $\underline{4}.$ per $m. c. \odot$.

Restant aequationes tres, $\underline{5}. \underline{7}. \underline{8}$, ex quibus inveniendae, $c. m. \odot$, ex quibus $\underline{\underline{m}}$ optime invenietur per $\underline{5}.$ ope $c. \odot$. et hactenus omnes aequationes lineares, seu simplices fuere. Quod inde scio, quod pro cujuslibet literae valore hactenus eam elegi aequationem, in qua ipsa simplex esset et non nisi in denominatore; et per nullam incognitam restantem multiplicaretur actu vel potentia; id est neque per ipsam immediate neque per aliam quae in ipsam resolvitur. Restant aequationes $\underline{7}$ et $\underline{8}.$ pro c et $\odot$. Et per aequationem $\underline{7}$ habebitur valor ipsius $\underline{\underline{c}}$, quadraticus. Satis enim scio altius ascendere non posse. Denique ultimo valor ipsius $\odot$ ad quadrato-quadraticum ascendet.

Video in eo a me erratum quod sumsi s haberi ex aequatione 9 per $\odot. m. q.$ quod verum est, sed ita intrabit $\odot$ in denominatorem, quod tamen quamdiutissime licet vitandum.

---

1 *Am Rande:*

c	9	א	38	γ	22
d	4	ב	66	β	10
$\odot$	1	ת	126	δ	80
l	3	ש	10	λ	118
m	7	ל	1184	ξ	388
n	2	ק	5	ψ	170
p	10	Ω	7	φ	230
q	5			θ	1786
r	8			ך	13984
s	15				

10 ipsa *(1)* semel esset aut pure *(2)* simplex *L*

Repetam ergo[:] Valor literarum $\underline{l}.\underline{n},\underline{r}.$ habetur ex collatitiis $\underline{1}.\underline{2}.\underline{3}.$ absolute. $\underline{s}$ habetur ex aeq. $\underline{4}.$ per $c.q.m.$ $\underline{d}$ ex aeq. $\underline{5}.$ per $c.q.m.$ $\underline{q}$ ex aeq. $\underline{6}.$ per $c.m.\underline{\odot}$ vel si malis p^2 habetur ex aeq. $\underline{7}.$ per $c.m.$ Restant duae aequationes $\underline{8}$ et $\underline{9}$, ad habendas $\underline{m}$, et $\underline{c}$.

Aequatio collatitia prima:

$18l^2n \sqcap 8ra^2 + 10\beta a^2$. Ergo $8r \sqcap \dfrac{18l^2n - 10\beta a^2}{a^2}$.

Collatitia 2da:

$\boxed{2}3l + 2n \sqcap \boxed{8r}\dfrac{18l^2n - 10\beta a^2}{a^2}$, sive $2n \sqcap \dfrac{\boxed{2}3la^2 + 10\beta a^2}{9l^2 - a^2}$.

Collatitia tertia:

$9l^2 + \boxed{2}6ln \sqcap -a^2 + 22\gamma a$, sive explicando n, $9l^2, +\boxed{2}3l \frown \dfrac{\boxed{2}3la^2 + 10\beta a^2}{9l^2 - a^2} \sqcap -a^2 + 22\gamma a$. sive ablatis fractionibus et comprehensionibus:

$81\ l^4\boxed{-9l^2a^2} + \boxed{4}9l^2a^2 + \boxed{2}30l\beta a^2 \sqcap \boxed{-9l^2a^2} + 198l^2\gamma a + a^4 - 22\gamma a^3$.

$81.36.60.\not{9}.22 \sqcap \not{9}.198 + 1$ et omissis β et γ, numerisque sumtitiis fiet:

36
60
$\not{9}$
22
199

$l^4 + 4l^2a^2 \sqcap a^4$, sive, $l^4 + 4l^2a^2 + 4a^4 \sqcap 5a^4$, seu $l^2 \sqcap a^2\sqrt{5} - 2a^2$, sive $l \sqcap a\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ et $n \sqcap 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}a, \smile 9\sqrt{5} - 9$. $r \sqcap \dfrac{l^2n}{a^2}$. Itaque, $r.n.l$, pro pure planeque inventis haberi possunt.

Collatitia 4ta:

$-\boxed{2}7m - 5q \sqcap +\boxed{2}9c - 15s - 22\gamma\not{\phi}$, et $15s \sqcap \boxed{2}9c - 22\gamma\not{\phi} + \boxed{2}7m + 5q$.

3 f. et $\underline{c}$. *(1)* Ex m et c inventis facile habetur p, propter qvam caeterae omnes qvaerebantur *(2)*

Aeqvatio *L* 12 et γ, *(1)* fiet: *(a)* $811^4 + \boxed{4}9l^2a^2$ *(b)* $811^4 + \boxed{4}9$ *(2)* numerisqve | sumtitiis *erg.* | fiet: *L*

4 Aequatio: Beim ersten Koeffizientenvergleich vergisst Leibniz das Minuszeichen vor $8ra^2$ und erhält in Z. 18 f. falsche Werte für l, n, r.

Collatitia quinta:

$$-\boxed{2}42\frac{lmn}{a^2} - 45\frac{l^2}{a^2}q \sqcap \overbrace{15s}\llcorner\boxed{2}9c - 22\gamma\phi + \boxed{2}7m + 5q\lrcorner - \boxed{2}\frac{32dr}{a} - 80\delta a \text{ et fiet:}$$

$$4d \sqcap \frac{+\boxed{2}\frac{42lmn}{a^{\not 2}} + \frac{45l^2}{a^{\not 2}}q + \boxed{2}9ca^{\not 2} - 22\gamma a^{\not 2} + \boxed{2}7ma + 5qa - 80\delta a^{\not 2}}{\boxed{2}8r}.$$

Collatitia 6ta:

$+\not\boxed{2}118\lambda a - \not\boxed{2}21lm - \not\boxed{2}14mn - \not\boxed{2}15lq \sqcap -\not\boxed{2}4da + \not\boxed{2}72cr$. Pro $4d$ substituatur ejus valor inventus, ita tamen ut ipsi termini quibus inest q, in unum colligantur locum, fiet:

$$\frac{+45l^2q + 5qa^2}{\boxed{2}8r} - 15lq \sqcap \overbrace{-4da}\frac{-\boxed{2}42lmn - \boxed{2}9ca^2 + 22\gamma a^2 - \boxed{2}7ma^2 + 80\delta a^2}{\boxed{2}8r}$$

$$+72cr - 118\lambda a + 21lm + 14mn$$

omnibusque per $\boxed{2}8r$ multiplicatis, et per $9l^2 + a^2 - \boxed{2}24lr$ divisis, fiet:

1–5 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 1–3:

84	$\overbrace{84}$	18	84	84
45	$\overbrace{45}$	14	45	45
129	129	5	− 129	18
64	18	37	− 15	14
63 [!]	14	22	− 144 − 64 − 80	5
15	5	15		+ 166
48	166			80
	− 22			22
	− 48			− 102
	126 [!]			64

zu Z. 5:

21	$\dot{7}2$
14	− 4
15	68
50	+50
	118

$$5q \quad \sqcap \quad \frac{\begin{array}{l} -\boxed{\cancel{2}}\cancel{42}lmn - \boxed{2}\cancel{9}ca^2 + 22\gamma a^2 - \boxed{2}7ma^2 + \cancel{8}0\delta a^2 \\ +\boxed{2}576cr^2 - \boxed{2}944\lambda ar + \boxed{2}\cancel{168}lmr + \boxed{2}112mnr \end{array}}{-\boxed{2}24rl + 9l^2 + a^2}$$

Collatitia 7ma:

$49m^2 + \boxed{2}35qm \sqcap \odot a - \boxed{2}135sc + 388\xi a$. Et fiet:

$$\odot a \sqcap 49m^2 + \boxed{2}7m \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} + \boxed{2}135sc - 388\xi a.$$

Et pro $15s$ substituendo eius valorem, ex collat. 4. fiet:

$$\odot a \sqcap 49m^2 + \boxed{2}35mq + \boxed{4}81c^2 - \boxed{2}198\gamma c + \boxed{4}63mc + \boxed{2}45qc - 388\xi a.$$

---

1 f. (Nota: numeri lineolis transfixi non ideo minus valent.)

2–7 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 2:

$$\begin{array}{r} 72 \\ \underline{8} \\ 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 118 \\ \underline{8} \\ 944 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 8 & 8 \\ 1 & & 8 \\ & 8 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 21 \\ \underline{8} \\ 168 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \underline{8} \\ 112 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 4 & 40 \\ 5 & & 8 \end{array}$$

zu Z. 4:

$$\begin{array}{l} 49 \\ \underline{70} \\ 119 \sqcap 1 - 270 + \xi a. \text{ Ergo } \begin{array}{l} 118 \\ \underline{270} \\ 388 \sqcap \xi a \end{array} \end{array}$$

zu Z. 7:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{9} \\ 198 \\ \underline{2} \end{array}$$

[*bricht ab*]

---

5 $+\boxed{2}7m$: Das folgende Wiederholungszeichen steht für den Wert von $5q$ in Z. 1 f.

Collatitia octava:

$88m^2n + \boxed{2}105lmq \sqcap 8\odot ra + \boxed{2}60dsa + 170\psi a^2.$

Collatitia nona:

$245m^2q \sqcap 15\odot as + 230a^2\varphi.$

Quas vero duas aequationes, et incognitas in illis m, et c ut commodius evolvamus, pro $\odot a$ in nona, substituamus ejus valorem ex octava, fiet:

$$(\☿)\ 245m^2q \sqcap \frac{98m^2n + \boxed{2}105lmq - \boxed{2}60dsa - 170\psi a^2}{8r} \frown 15s, +230a^2\varphi$$

Jam ut valores ipsarum $q.\ d.\ s.$ facilius huic aequationi inseramus; ideo in valore ipsius q collatitiae 6^{tae} pro

(9) $9l^2 + a^2 - \boxed{2}24rl$, ponemus $-38\aleph a$ et pro

(10) $-\boxed{2}6ln - \boxed{2}a^2 + \boxed{2}24lr + \boxed{2}16nr, \frown 7m$, ponemus $462\beth am$ et pro

(11) $22\gamma a^3 + 80\delta a^3 - \boxed{2}944\lambda a^3$ ponemus $-1786\theta a^3$ et denique pro

---

2–12 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 2:

88	8	88
+210	120	210
298	− 128 ⊓ 170	298
		−120
		−170
		008

zu Z. 4:

245
15
230

zu Z. 10:

48
10
38

zu Z. 11:

−12	+48
− 2	+32
−14	80
	−14
	ב ⊓ 66
	7
	462

zu Z. 12:

80	944
22	2
102	1888
	102
	1786

---

2 $88m^2n$: Richtig wäre $98m^2n$ und somit $+180\psi a^2$ am Ende der Gleichung. In der folgenden Gleichung ☿ verwendet Leibniz den richtigen Wert $98m^2n$, bleibt aber bei dem falschen $170\psi a^2$.

12 $-\boxed{2}944\lambda a^3$: Richtig wäre $-\boxed{2}944\lambda a^2 r$; das Versehen hat keine Auswirkungen.

(12) $-\boxed{2}a^3 + \boxed{2}64r^2a, \frown 9c \sqcap 1134\text{ת}a^2c$ et fiet

(13) $5q \sqcap \frac{462\phi\text{ב}m + 1134\phi\text{ת}c - 1786a^2\theta}{-38\text{א}\phi}$. Eodem modo, ut ipsam d. quanta licet brevitate exprimamus, ideo pro

(14) $9\frac{l^2}{a} + a, \frown 5q.$ ponamus $50\omega q$. Jam in ejusdem d valore, pro $\boxed{2}\frac{6ln}{a} + \boxed{2}a$,

$\frac{-\boxed{2}60\omega ln - \boxed{2}10\omega a^2 + \boxed{2}240\omega lr + \boxed{2}160\omega nr}{-38\text{א}a}, \frown 7m$, vel potius paucis: 5

(15) $\boxed{2}\frac{6ln}{a} + \boxed{2}a + \frac{660\omega\text{ב}}{-38\text{א}}, \frown 7m \sqcap \frac{128\text{ג}}{-38\text{א}} \frown 7m$

(16) pro $\boxed{2}a^2, +\frac{1260\text{ת}\omega a}{-38\text{א}}$,, $\frown 9c \sqcap \frac{1184\text{ל}}{-38\text{א}} \frown 9c$

(17) pro $-22\gamma a - 80\delta a + \frac{17860a\theta\omega}{+38\text{א}}$ poni potest: $\frac{13984}{38\text{א}}\text{פ}a$. Et fiet

(18) $4d \sqcap \frac{-128a\text{ג} \frown 7m, -1184\text{ל}a \frown 9c, +13984\text{פ}a^2}{38\text{א} \frown \boxed{2}8r}$. Jam in aequatione (☿) habemus praeter alia, etiam 10

(19) $+\boxed{2}105lmq \frown 15s, -\boxed{2}900ds^2a$. Et ante omnia per collatitiam quartam

---

1–8 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 1:

128	126	
2	9	
126	ת ⊓ 1134	

zu Z. 2:

462	−1786	4
1134	1596	−190 ∤ + 5
1596	− 190	− 38

zu Z. 4-6:

480	38	660
320	− 14	−532
800	152	128 ג
120	38	
20	−532	
660		
−532		
128		

zu Z. 7:

1260	24	
76	1184 ∤ 31	
1184	38	
	3	

zu Z. 8:

38	17860
102	3876
76	13984
380	
3876	

$$
\begin{array}{llll}
(20)\ 225s^2 \sqcap \boxed{4}\,81c^2 & -\boxed{4}\,22\gamma 9c & +\boxed{8}\,63mc & +\boxed{4}\,45qc\ . \\
& +22\frown 22\gamma^2 & -\boxed{4}\,22\gamma 7m & -\boxed{2}\,22\gamma 5q \\
& & +\boxed{4}\,49m^2 & +c\boxed{4}\,35mq \\
& & & +\quad 25q^2
\end{array}
$$

Ideo valor ipsius d. in artic. 18. duci debet in valorem ipsius s^2, in artic. 20, unde fit, ut ipsius d. valor ducendus sit, non tantum in valorem ipsius q, sed etiam in valorem ipsius q (artic. 13) quadratum. Ac proinde necesse est quadrari etiam $5q$. scilicet

$$
\left.\begin{array}{l}
(21)\ 25q^2 \sqcap 462\frown 462\beth^2 m^2 + \boxed{2}\,462\beth m1134\text{ת}c - \boxed{2}\,462\beth m1786a\theta \\
\qquad + 1134\frown 1134\text{ת}^2c^2 - \boxed{2}\,1134\text{ת}c1786a\theta \\
\qquad\qquad + \quad 1786\frown 1786a^2\theta^2
\end{array}\right\}, \smile 38\frown 38\aleph^2.
$$

Multiplicandus valor $225s^2$, ex artic. 20 per $4d$ ex artic. 18. Ergo multiplicandus valor ipsius $4d$, ex artic. 18. per valorem ipsius $25q^2$ ex artic. 21; item multiplicandus valor dictus ipsius $4d$, per valorem ipsius $5q$ ex artic. 13. Porro cum in artic. 19. etiam contineatur $15s5q$, ideoque multiplicando s per q. fit ut rursus multiplicari debeat q, per q. id est ut opus sit valore ipsius q quadrato. Factis illis multiplicationibus omnibus, per valores dictos, nullae amplius, quae nos incommodent, incognitae supererunt in aequatione ☿, exceptis duobus, m, et c. Quoniam autem operatio futura esset valde prolixa, opus est rursus brachylogia, literisque novis, quae cognitas, vel quasi cognitas, terminorum, quos dabunt incognitae $m.c$, exprimant. In quo danda opera est, ut literae fictitiae sem-

---

55,9–11 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 9:	128	1184	+13984	38	~~2432~~ ⨍4	*zu Z. 11:*	15
	7	9	−10656	16	~~608~~		15
	896	10656	− 896	228			75
			−11552	38			15
			2432	608			225
							4
							900

5 in |artic. *erg.*| 20 *(1)*. qvod rursus faciendum est brachylogice, *(2)*, unde *L* 9+11 ⌢ 38$\aleph^2$ |Multiplicandus ... Ergo *erg.*| *(1)* multiplicando jam valorem *(2)* multiplicandus *L* 17 et c. *(1)* qvarum terminos, ut rursus brachylogice comprehendamus *(2)* Qvoniam *L*

per separentur a veris, quo sub calculi finem statim rejici possint. Termini autem hi erunt: m^3 (tum ob ductum, q in m^2, et s in m^2, et s in mq, tum ob ductum s^2 in d in quo continetur d in q^2). c^3 (ob $s^2d.dq^2$). m^2c (ob $m^2q.sm^2.smq$, et $s^2d.dq^2$). c^2m (ob smq et $s^2c.dq^2$). m^2 (ob $\overset{*}{m^2q}$, $\overset{*}{m^2ns}$, $\overset{*}{mqs}$, ds^2, dq^2, ds^2c, qs). c^2 (ob $dq^2.qs$). mc (ob $\overset{*}{mqs}.s^2d.dq^2$). m (ob $\overset{*}{mqs}.\overset{*}{s^2d}.\overset{*}{dq^2}.\overset{*}{sd}.\overset{*}{s\psi}$) c (ob $\overset{*}{s^2d}.\overset{*}{dq^2}.\overset{*}{qs}.\overset{*}{s\psi}$). et denique Terminus purus (ob $\overset{*}{s^2d}.\overset{*}{dq^2}.\overset{*}{qs}.\overset{*}{s\psi}$). Notandum autem omnes terminorum origines asteriscis notatas, non nisi quantitatibus fictitiis constare, et sub finem calculi rejici posse: in caeteras quoque plerasque omnes, ingredi fictitias, quas explicando aut comprehendendo distinguemus.

Cognita ipsius $\underline{\underline{m^3}}$, est

$$\left.\begin{array}{l} \overset{((1)3)}{\frac{+66\text{ב}}{38\text{א}}} + \overset{((7)1)}{\frac{\boxed{2}2n}{8r}} - \overset{((8)6)}{\frac{2n66\text{ב}}{38\text{א}8r}} - \overset{((8)0)}{\frac{\boxed{4}3l66\text{ב}}{38\text{א}8r}} + \overset{((4)0)}{\frac{\boxed{2}3l66\text{ב}66\text{ב}}{38\text{א}8r38\text{א}}} \\ \qquad \overset{(1(0))}{-\frac{128\text{ג}66\text{ב}66\text{ב}}{38 \frown 38\text{א}^2}} - \overset{((4)4)}{\boxed{4}128\text{ג}} - \overset{((4)6)}{\boxed{4}128\text{ג}66\text{ב}} \\ \hline \boxed{2}38\text{א} \frown 8r \end{array}\right\} \sqcap \frac{2\text{ק}a^2}{\boxed{2}\text{א}^3 8r}.$$

---

6 *Nach* purus, *gestrichen:* error

10–14 *Nebenrechnung zur Neunerprobe:*

3
1
6
4
6
20 ⊓ 2

12 ⊓ *(1)* $\frac{5\text{ק}a^2}{\boxed{2}\text{א}^3 8r}$ *(2)* $\frac{2\text{ק}a^2}{\boxed{2}\text{א}^3 8r}$. *L* 16 *(1)* 3 1 6 4 14 ⊓ 5 *(2)* 3 *L*

10–14 Leibniz unterlaufen Fehler bei der Berechnung der Terme und bei der Neunerprobe, die das Ergebnis beeinträchtigen. Den zunächst ermittelten Wert ק = 5 ersetzt er durch ק = 2, ändert im Text aber nur unvollständig. In N. 7_2 setzt er neu an.

Obiter autem explicandum est compendium, quo utor in hoc calculi per numeros examine. Nimirum, pro Numeris ipsis eorumve collectorum summa, pone eorum Residuum novenarium; quandoquidem in calculis prolixioribus, qualis iste est, abjectione novenarii utendum est, et loco numerorum addendorum, subtrahendorum, multiplicandorum eorum residuus in characteribus, post abjectionem novenarii adhibetur, quem appellabo numeri cujuslibet Enneadicum. Ita ut omnia ad communem denominatorem $\boxed{2}$38א38א38א8r revocarentur, necesse est v. g. 66ב, cujus Enneadicus est 3 multiplicari per $\boxed{2}$38א38א8r, cujus Enneadicus est 1. Ergo loco 66ב ^ [$\boxed{2}$]38א ^ 38א8r ponemus 3. Eodem modo $-2n$66ב cujus Enneadicus 3, (: quanquam enim Enneadicus a 2 ^ 66 sit 6, nam Enneadicus a 66 est 3. tamen Enneadicus a -2 ^ 66 est 3. Sumenda enim differentia ipsius Enneadici numeri affirmativi a 9:) multiplicetur per $\boxed{2}$38א38א cujus Enneadicus 8, fiet Enneadicus producti 6. Omnium horum Enneadicorum summa habet Enneadicum 5, ideoque compendii causa pro cognita ipsius m^3, pono 5קa^2. Caeteroquin notandum Enneadicos numerorum essentialium, ab Enneadicis factitiorum separandos, cum unum quendam terminum cont[i]ngere volumus v. g. pro $-\boxed{4}$128ג ^ 38א38א non debet scribi +4 Enneadicus, sed $\boxed{-4}$8. Nam et signa inter essentiales numeros haberi possunt nam $-$ idem est quod $\boxed{-1}$. Cujus observationis ratio haec est, ut semper examinis ratio constet.

Sed aliud est cum brachylogia utimur, quae non tantum in numeros fictitios, sed verum calculum extendatur ut hoc loco, tunc enim istorum nulla habetur distinctio; vel ideo quia postea sub finem calculi ad illa ipsa quibus compendiosior expressio substituta est, rediri debet. Quod in Brachylogia Enneadica numerorum sumtitiorum non fit. His observatis semper calculus examini suberit; per singulas partes non minus ac si nulla adhibita fuisset brachylogia Enneadica, ut e. g. pro 1134תc. id est 126ת9c, [poni] poterit: 9ת9c vel 81תc pro 126 ponendo ejus Enneadicum 9. quoniam hic 9 poni malim quam 0. Sed et 81תc malim poni quam 9תc ut scilicet Enneadici duo in se ducantur quemadmodum et duae literae, faciliusque sit examen.

9–11 Nota in abjectione novenarii ubi mixtum est, semper -1 significat +8. et ita de caeteris, nam intelligi debet: $9 - 1$, sed nunquam a⟨n⟩te multiplicationem vel divisionem.

3 f. abjectione *(1)* characterum *(2)* novenarii *L* 23 pro *(1)* 17866a$\theta\omega$ poni poterit *(2)* 1134תc. *(a)* poni poterit *(b)* id *L* 28 f. sed ... divisionem *erg. L*

Cognita ipsius $\underline{c^3}$, est $\boxed{4}\frac{-1184\text{ל}a}{38\text{א}}$ ((1)7) $+\boxed{4}\frac{1184\text{ל}a126\text{ת}}{38\text{א}38\text{א}\boxed{2}8r}$ ((2)0) $\frac{-1184\text{ל}a126\text{ת}126\text{ת}}{38\text{א}38\text{א}38\text{א}\boxed{2}8r} \sqcap \frac{7\Omega}{\boxed{2}8r}$ (0).

Cognita ipsius $\underline{m^2c}$ est $\frac{126\text{ת}}{38\text{א}}$ [*bricht ab*]

Ne hic ob angustiam chartae arctati, labamur, plagula separata calculus iste continuatur. Ubi et resumta est investigatio cognitae ipsius m^3.

[*Teil 2, gestrichen*]

$x + y - b \frown x + y - b \sqcap x^2 + 2xy + y^2 - 2by + b^2 \sqcap 0.$

$x^2 + 2xy + y^2 - 2bx - 2by + b^2 \frown$ y^3 vel ponendo pro b ejus valorem $x + y$, fiet,

lx^3

my^2x

nyx^2

py^2

qyx

rx^2

sy

tx

a

$x^2\boxed{+2xy}\ \boxed{+y^2}\ \boxed{-2yx}\ \boxed{-2y^2} + x^2 + 2xy\boxed{+y^2}$. Rectius sic, ponendo pro $y - b$ ejus valorem $-x$, fiet: $1x^2 - 2x^2 + 1x^2 \sqcap 0$, eodem modo ponendo pro $x - b$ ejus valorem $-y$,

---

7–66,7 NB. Deleta est haec pagina, non quod sit inutilis, sed ne inter praecedentem et novam plagulam, qua praecedens continuatur, aliquid interjectum esset.

8 −2bx *erg. L*

---

2 $\underline{c^3}$: Leibniz berechnet den Koeffizienten von c^3 falsch; richtig durchgeführt ist die Rechnung auf S. 68 Z. 2. 4 plagula separata: N. 7_2. 7 $x + y - b$: Im Ergebnis der folgenden Multiplikation fehlt der Term $-2bx$. Leibniz hat ihn in der nächsten Zeile nachträglich ergänzt, ohne die Umformung in Z. 18 zu berichtigen. 8 Vgl. zum Folgenden J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, S. 507 f.

fiet: $1y^2 - 2y^2 + 1y^2 \sqcap 0$. Jam terminos y multiplicemus per unam, et x per alteram et compositos per utramque:

$y^3 \frown y^2 - 2y^2 + y^2$ vel per $x^2 - 2x^2 + x^2$.

lx^3
my^2x
nyx^2
py^2
qyx
rx^2
sy
tx
a

$y^2 - 2y \frown \underbrace{b - x}_{y} + \underbrace{b^2 - 2bx + x^2}_{y^2}$

$\underbrace{x + y - b}_{-x} \sqcap 0$. Ergo

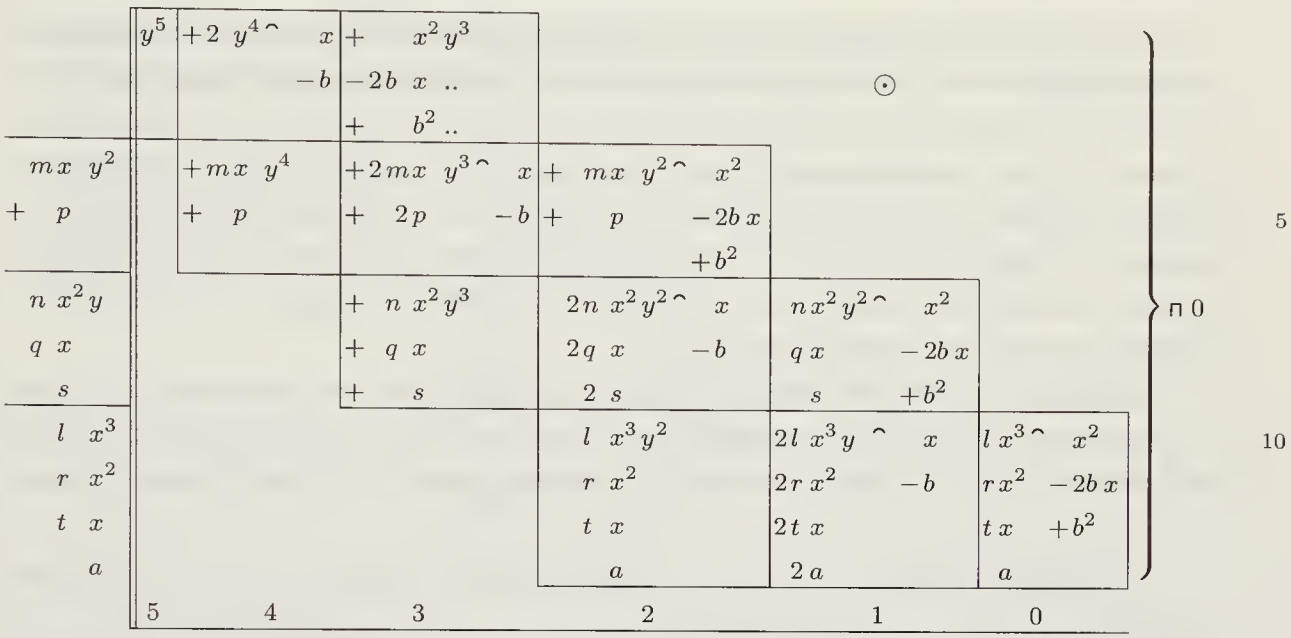
$x^2 - 2x^2 + x^2 \sqcap 0.$

$\sqcap x^2 + 2x \frown \underbrace{y - b}_{-x} + \underbrace{b^2 - 2by + y^2}_{x^2} \sqcap 0.$

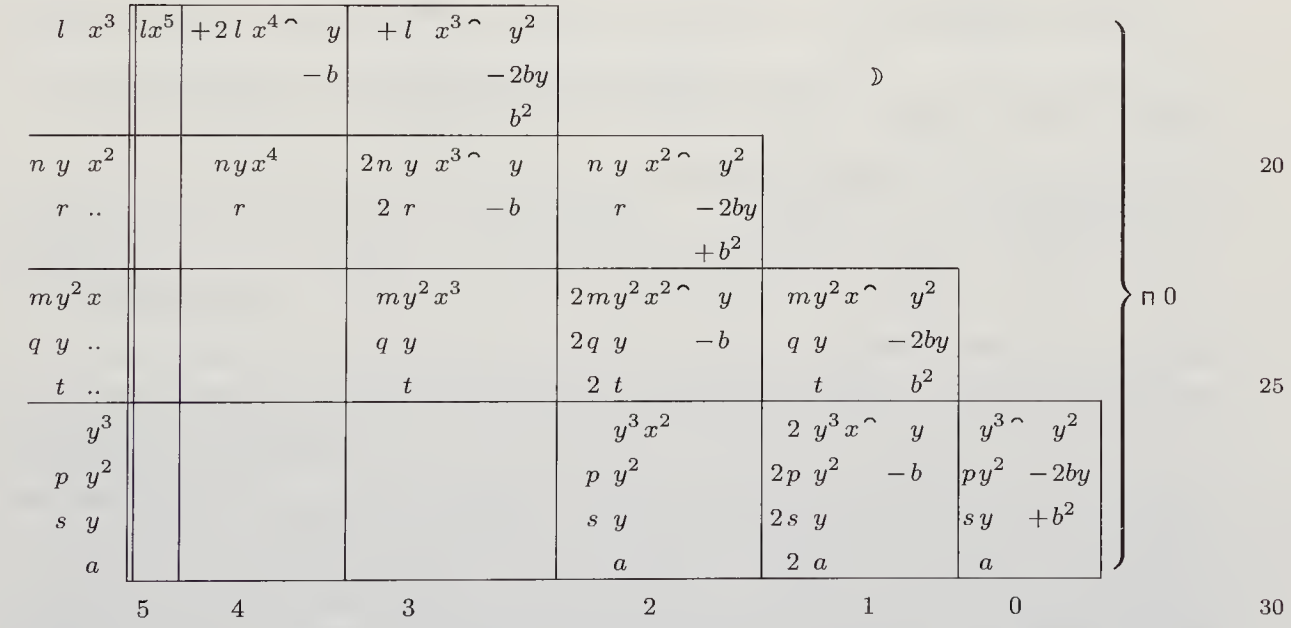
$+ y \underbrace{+ x - b}_{-y} \sqcap 0.$

$y^2 - 2y^2 + y^2 \sqcap 0.$

$y^2 + 2y \frown \underbrace{x - b}_{-y} + \underbrace{x^2 - 2bx + b^2}_{y^2} \frown y^3$
lx^3
my^2x
nyx^2
py^2
qyx
rx^2
sy
tx
a



Jam alteram x sumendo pro incognita, et multiplicando per $x^2 + 2x \frown \underbrace{y - b}+$ $\underbrace{y^2 - 2by + b^2}$ fiet alia aequatio



Cum ergo priore aequatione ⊙, y determinetur ad duas radices aequales, et posteriore ☽, determinetur x ad duas radices aequales; hinc jungendo has duas aequationes inter se, fiet una ex ipsis composita, in qua utraque incognitarum duos habet valores aequales. Si unam ex altera auferas plurimi termini destruentur, nec poterit applicari producta ad datam quamlibet, sed si addas alteram ad alteram, hinc statim habetur fundamentum Regulae ab Huddenio Slusioque inventae, a Slusio primum publicatae. Nam ubi junxeris in unam aequationem, potes eam in duo latera divellere, latus unius et latus alterius incognitae et inde fiet regula Slusiana.

Nimirum data quaelibet aequatio duarum incognitarum, ut determinetur ad duas radices aequales ab uno latere aequationis relinque terminos unius incognitae, in alterum latus transfer terminos alterius incognitae, terminos autem ex utraque incognita, simul

---

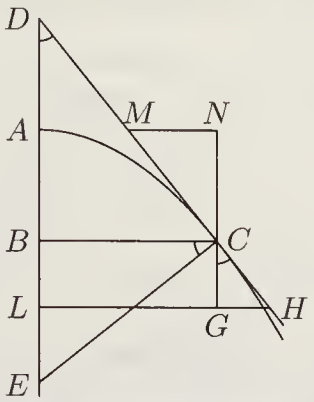
9 *Nebenbetrachtung:* $xy + y^2 \sqcap x^2$ Aequatio data. Unde $xy + y^2 \sqcap x^2 - xy$. Unde: $xl + 2yl \sqcap 2x^2 - xy$. Unde $l \sqcap \frac{2x^2 - xy}{x + 2y}$. Item $xy + y^2 \sqcap x^2 - yx$. Unde $xy + 2y^2 \sqcap 2xm - ym$. Unde $m \sqcap \frac{xy + 2y^2}{2x - y}$. Unde $lm \sqcap \frac{2x^3y\boxed{-x^2y^2} + 3\textcircled{4}y^2x^2 - 2y^3x}{2x^2 + 3\textcircled{4}yx\boxed{-yx} - 2y^2}$. Ergo $lm \sqcap yx$. quod

6–8 Nam ... Slusiana *erg. L* 12 *(1)* xy ⊓ a^2. ly ⊓ a^2,l ⊓ $\frac{a^2}{y}$ ⊓ x. *(a)* $xy + y^2 \sqcap a^2 + x^2$, pone $xy + 2y^2 \sqcap a^2 + 2x^2 + xy$, sive $lx + 2ly \sqcap \cancel{a^2} + 2x^2 + xy$. l ⊓ $\frac{\cancel{a^2} + 2x^2 + xy}{x + 2y}$. $xy + 2y^2 \sqcap \cancel{a^2} + 2xm + my$, et m ⊓ $\frac{xy + 2y^2}{2x + y}$. lm ⊓ $\frac{4x^3+2x^2y+2xy^3 + 4y^3}{+1... \quad +1}$ $\frac{}{3x^2 + 4yx}$ *(b)* $xy + y^2 \sqcap a^2 + x^2$. ml ⊓ yx. $xy + y^2 \sqcap x^2$, Ergo $xl + 2ly \sqcap 2x^2$ sive l ⊓ $\frac{2x^2}{x + 2y}$. *(aa)* x^2– *(bb)* $2y^2 \sqcap 2xm - my$ erit m ⊓ $\frac{2y^2}{2x - y}$. Ergo ml ⊓ $4x^3 - 4x^2y + 4y^2x + 4y^3$ *(2)* An sic: *(3)* $xy + y^2$ *L*

---

6 Huddenio Slusioque: Leibniz stützt sich bei seiner Aussage, dass J. Hudde ebenfalls die von R.-Fr. de Sluse im Tangentenbrief, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147, publizierte Tangentenmethode entdeckt hatte, möglicherweise auf mündliche Mitteilungen von Huygens; vgl. die Erl. zu VII, 4 N. 41 S. 712 sowie den Brief von Huygens an H. Oldenburg vom 27. September 1672 (*HO* VII S. 228 f.). 9–63,2 Nimirum ... aequalem: Die hier formulierte Regel, die weitgehend der Sluseschen Regel zur Bestimmung der Subtangente entspricht, wird von Leibniz im Folgenden erfolglos auf die Lösung des inversen Tangentenproblems angewandt. Dies beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

et relinque, et transfer, cuilibet termino praefige numerum exponentis incognitae a cujus latere reperitur; terminum autem in quo neutra est incognitarum pone nihilo aequalem.



[*Fig. 2*]

---

calculi proba est.

Jam eodem modo tractemus aequationem ⊙ unde fiet omissa quantitate quae pro cognita supponitur: ↄ $\not{2}x^2a^2 - \not{2}xva^2 + \not{2}y^2x^2 \sqcap \not{2}y^2a^2 - \not{2}y^2x^2$ quae jam determinata est ad duas utriusque incognitae radices aequales. Cujus aequationis ope habetur valor ipsius v, qui inseratur in priore, erit scilicet $v \sqcap \frac{\not{2}x^2a^2 + 2\not{4}y^2x^2 - \not{2}y^2a^2}{\not{2}xa^2}$ et $v^2 \sqcap \frac{x^4a^4 + 4x^4a^2y^2 - 2x^2y^2a^4, +4y^4x^4 - 4y^4a^2x^2 + y^4a^4}{x^2a^4}$. Eumque valorem inserendo in aeq. ⊙ fiet $\boxed{x^4a^4}\ \boxed{4x^4a^2y^2}\ \boxed{-2x^2y^2a^4} + 4y^4x^4 - 4y^4a^2x^2 + y^4a^4\ \boxed{-\textcircled{2}x^4a^4}\ \boxed{-4y^2x^4a^2}\ \boxed{+2y^2x^2a^4} + \textcircled{2}x^4a^4 - 2y^2x^2a^4 + 2y^2x^4a^2 \sqcap 0$ sive $+4y^4x^4 - 4a^2x^2y^4 + 2a^2y^2x^4 + a^4y^4 + a^4x^4 - 2a^4y^2x^2 \sqcap 0$.

Examinanda sunt ista, continerent enim compendium elegans, si eorum ope perveniri posset ad methodum Tangentium inversam. Sumamus exemplum Cartesii, et neutram incognitarum explicemus.

---

3 *Fig. 2*: Die von Leibniz skizzierte Kurve entspricht nicht der Parabelgleichung in S. 64 Z. 1, sondern $AB = x = \frac{y^2}{2a}$. 5 aequationem ⊙: Gemeint ist die Gleichung ⊙ S. 44 Z. 19, zu der ein Hinweisstrich führt. 14 exemplum Cartesii: Die Ankündigung bezieht sich vermutlich auf N. 8.

Exemplo opus. Curva AC. esto parabola: $BC \sqcap x \sqcap \frac{y^2}{2a}$. Fiet proxima applicata: $\frac{y^2 + 2\beta y + \beta^2}{2a} \sqcap LH$. et $GH \sqcap \frac{2\beta y}{2a}$. Ergo si ignoremus curvam esse parabolam, sciamus autem rationem GH ad CG seu ad β. Videamus an hac methodo invenire possimus. Nimirum ponendo ut supra [$AB \sqcap x$. $AE \sqcap v$. $BE \sqcap v - x$. $BC \sqcap y$]: erit semper aequatio generalis: $-v^2 + 2vx - x^2 + p^2 \sqcap y^2$, et $\frac{p \sqcap EC}{y \sqcap BC} \sqcap \frac{CH}{CG \sqcap \beta}$. Jam $CH \sqcap \sqrt{\frac{a^2\beta^2 + \beta^2 y^2}{a^2}}$, sive $\frac{\beta}{a}\sqrt{a^2 + y^2}$ eritque $\frac{p}{y} \sqcap \frac{\beta\sqrt{a^2 + y^2}}{\beta a}$, et $p \sqcap \frac{y\sqrt{a^2 + y^2}}{a}$, et $p^2 \sqcap \frac{y^2a^2 + y^4}{a^2}$, unde $-a^2v^2 + 2vxa^2 - a^2x^2 \boxed{+y^2a^2} + y^4 \sqcap \boxed{y^2a^2}$, sive $y^4 \sqcap a^2v^2 - 2vxa^2 + a^2x^2$, sive denique $y^2 \sqcap \overset{2}{\mp} av \overset{0}{\pm} ax \overset{1}{}$, quae ad duos determinata valores regula nostra, dabit: $2y^2 \sqcap ax$ et pro y^2, substituendo ejus valorem inventum, in aeq. $y^2 \sqcap -av + ax$, fiet $2ax \sqcap -av + ax$, sive $v \sqcap -x$. Quod est absurdum. An ita? Ut aequationem inventam determinemus ad duos valores aequales, fiet $l \sqcap \frac{2y^2}{a}$. Atqui $\frac{l}{y} \sqcap \frac{\beta}{\beta\frac{y}{a}}$, sive $\frac{a}{y}$. Quod falsum[,] foret enim $l \sqcap a$. Error ergo in calculo. Nimirum $2ly \sqcap ax$. Ergo $l \sqcap \frac{ax}{2y}$. Jam $\frac{l}{x} \sqcap \frac{a}{y}$. Hinc ergo comparando per quendam speciem Regulae falsi sequitur x latere in v, ⟨uti⟩ et verum, ac proinde fieri $2ax \sqcap 2y^2$. Quod et verum est. Sed nescio an haec divinatio semper sit successura in altioribus.

---

1 *Über* parabola: $y^2 \sqcap 2ax$. Ergo $\frac{2ax - 2ax + a\beta}{2}$ [*bricht ab*]

11 l $\sqcap$ | $\frac{2x^2}{a}$ *ändert Hrsg.* | Atqvi *L* 13 per ... falsi *erg. L*

---

4 supra: Leibniz verweist mit einem Strich auf die Angaben zu Beginn seiner Anmerkung zu S. 44 Z. 3. 5 Jam CH: Leibniz übersieht, dass er nach dem Wechsel von $BC = x$ zu $BC = y$ zu $CH = \sqrt{\beta^2 + \frac{a^2\beta^2}{y^2}}$ übergehen müsste. Er rechnet konsequent weiter, bis er die Unstimmigkeit feststellt.

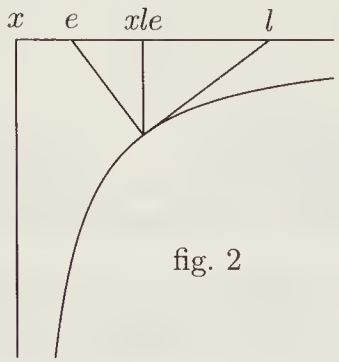


fig. 2

[*Fig. 3*]

Curva AC esto hyperbola, $AB \sqcap x.$ et $BC \sqcap \frac{a^2}{x} \sqcap y.$ Differentia $-\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{x-\beta}$, unde $\frac{-xa^2+\beta a^2+xa^2}{x^2-x\beta} \sqcap \frac{\beta a^2}{x^2} \sqcap GH.$ et $CH \sqcap \frac{\beta}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$. Unde ut obiter patet superficiem curvam ex revolutione Hyperbolae circa Tangentem verticis Hyperbolae cujusdam quantitate mensurari. Ergo $p \sqcap \frac{y\sqrt{a^4+x^4}}{x^2}$ et $p^2 \sqcap \frac{y^2a^4+y^2x^4}{x^4}$, unde $-e^2x^4 + y^2a^4 \boxed{+y^2x^4} \sqcap \boxed{y^2x^4}$. $y^2a^4 \sqcap e^2x^4$, sive $ya^2 \sqcap ex^2$. Unde $l \sqcap \frac{ya^2}{2xe}$. $\frac{l}{y} \sqcap \frac{\beta}{\frac{\beta a^2}{x^2}}$, sive $\frac{x^2}{a^2}$, sive $l \sqcap \frac{x^2y}{a^2}$. Ergo $\frac{a}{e} \sqcap \frac{y^2}{a^2}$, sive $e \sqcap \frac{a^3}{y^2}$ sive $ya \sqcap \frac{a^3x}{y^2}$. Sed haec consequentia falsa, nec inde sic habetur valor ipsius e. Quaeratur $m \sqcap \frac{ex^2}{a^2}$, at $\frac{m}{x} \sqcap \frac{\beta a^2}{x^2}$, sive $m \sqcap \frac{\beta a^2}{x}$.

---

2 *Am Rande:* $yx \sqcap a^2.\ yx \sqcap yl.\quad l \sqcap x.\ \frac{a^4}{x^3} \sqcap e.$

6 *Am Rande:* $2ya^2 \sqcap ex^2.$

8–66,1 *Am Rande:* $BE \sqcap e.\ MN \sqcap m.$

4 f. verticis *(1)* | patet *streicht Hrsg.* | aeqvari *(2)* Hyperbolae L

---

1 *Fig. 3*: Eine gestrichene fragmentarische Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben. 6 Unde $l \sqcap$: Die Anwendung der Tangentenrechnung ist nicht zulässig.

e ergo sic explicanda, ut simul fiat $l \sqcap \frac{x^2y}{a^2}$ et $m \sqcap \frac{a^2}{x}$. Quod fiet ponendo $e \sqcap \frac{a^4}{x^3}$, vid. fig. 2. Ita enim ex $ya^2 \sqcap ex^2$, fiet: $ya^2 \sqcap \frac{a^4x^2}{x^3}$, sive $yx \sqcap a^2$, quod est verum.

Expendenda haec accuratius[,] nam si succederent, compendium calculi elegans darent. Et quaerendus est modus divinandi semper valorem ipsius e. ex datis.

Non opus erat $ya^2 \sqcap ex^2$, quaerere, nam statim patet, quia $\frac{CG}{GH} \sqcap \frac{CB}{BE}$. Eodem modo in caeteris, statim ergo aequatio habetur trium incognitarum, $y.\,e.\,x.$

⊙ Vide partem tertiam sign. ⊙.

7_2. PARS SECUNDA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 3. 1/2 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 3 r°. Bl. 3 v° leer. — Bl. 3 bildete ursprünglich die obere Hälfte eines vollen Bl. 2°. Leibniz hat auf die abgetrennte untere Hälfte später, in hannoverscher Zeit, eine Aufzeichnung über Differentialgleichungen geschrieben (LH 35 VIII 30 Bl. 161; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Schediasmatis de Methodo Tangentium inversa ad Circulum applicata
pars 2da.

Habitis valoribus ipsius $15s$. in collatitia 4. ejusque quad. $225s^2$ artic. 20. ipsius $5q$. artic. 13. ejus quadrato $25q^2$, artic. 21. et ipsa d, artic. 18. explicemus aequationem ☿. Quae ut repetatur nunc sit

$$(22)\ -245m^2q + 230a^2\varphi + \frac{98m^2n + \boxed{2}105lmq - \boxed{2}60dsa - 170\psi a^2}{8r} 15s \sqcap 0.$$

2 yx ⊓ a^2, *(1)* unde *(a)* 2x *(b)* yx^2 ⊓ 2xyl, et l ⊓ $\frac{x}{2}$. deberet esse x. sed ita res non satis explicata, an ita: m *(aa)* ⊓ y *(bb)* seu x^3y *(2)* qvod *L* 6 habetur *(1)* unius *(2)* trium *L* 7 partem 2^{dam} *L ändert Hrsg.*

7 Vide: s. u. N. 7_3. 16 collatitia 4.: N. 7_1 S. 51 Z. 22. 19 $-170\psi a^2$: Leibniz übernimmt den falschen Wert 170 für ψ aus N. 7_1 S. 54 Z. 2.

Erit cognita ipsius

$$m^3:\quad \begin{array}{c}(3)((3))\\ \dfrac{+66\text{ב}}{38\text{א}}\\ (2)\\ m^2q\end{array}\qquad \begin{array}{c}(0)\\ \dfrac{+\boxed{2}\,3l66\text{ב}66\text{ב}}{8r,\frown -38\text{א}\frown -38\text{א}}\\ \\ mq^2\end{array}\qquad \begin{array}{c}(0)\\ \dfrac{+\boxed{2}\,3l66\text{ב}\boxed{2}}{8r\frown -38\text{א}}\\ \\ mqm\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{mqs}$$

$$\begin{array}{c}(7)((5))\\ \dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}\boxed{4}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r}\\ (4)\\ dm^2\end{array}\qquad \begin{array}{c}((6))\\ \dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}\boxed{4}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}\\ (8)\\ dmq\end{array}\qquad \begin{array}{c}(0)\\ \dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}66\text{ב}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}\\ \\ dq^2\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{ds^2}$$

---

3 *Zum ersten Term:* NB. *Darunter:*

$$\text{NB.}\quad \begin{array}{c}(4)((4))\\ \dfrac{2n\boxed{2}}{8r}\\ (8)\\ m^3\end{array}\qquad \text{NB.}\quad \begin{array}{c}(3)((6))\\ \dfrac{+2n66\text{ב}}{8r\frown -38\text{א}}\\ (7)\\ m^2q\end{array}.$$

Hi duo Termini signo NB. notati in locum

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m^2}$$

priorem etiam signo NB. notatum transferendi sunt. Ergo fiet: $\frac{24}{8}\,\frac{\text{ק}}{a}$ sive $\frac{6\text{ק}}{8}m^3$.

Nebenrechnungen: $\frac{24}{8}\sqcap 3$. $\frac{6}{8}\sqcap 3$.

2–68,19 Bei der Neunerprobe unterlaufen Leibniz Rechenfehler. Das von ihm verwendete Verfahren zur Kürzung von Neunerprobenwerten aus Zählern und Nennern von Brüchen ist nicht zulässig, wie er selbst erkennt.

$$c^3 \quad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r}{\overset{(5)}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-1184\text{ל}a^2\boxed{4}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-1184\text{ל}a^2\boxed{4}126\text{ת}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-1184\text{ל}a^2\,126\text{ת}126\text{ת}}{}}}$$

$$\overset{(4)}{\underbrace{dc^2 \qquad dqc \qquad dq^2}_{ds^2}}$$

fiet $\frac{5}{4}\,\frac{\Omega}{a}$.

Quod ut obiter dicam notabile est, semper ex Enneadicis tolli posse fractiones quia v. g. pro 5. poni potest 32. qui est divisibilis per 4. Ita si sit $\frac{6}{8}$, potest substitui 3. Imo error, non licet. $2\,\hat{}\,6 \sqcap 5\,\hat{}\,6$ in Enneadicis non vero $2 \sqcap 5$. Itaque non licet utraque tollere 6. $2\,\hat{}\,3 \sqcap 4\,\hat{}\,6$. non vero $2 \sqcap 4\,\hat{}\,2$. Ideo etsi $\frac{2}{4} \sqcap \frac{6}{3}$. non tamen $\frac{2}{4} \sqcap 2$. Unde patet divisiones non permissas in Enneadicis, nec comprehensiones, nec fractiones.

$$m^2c \quad \underset{-38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{-126\text{ת}}{}}} \qquad -\boxed{2}\,\underset{8r38\text{א}38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{\boxed{2}\,3l\,\boxed{2}\,66\text{ב}126\text{ת}}{}}} \qquad \underset{8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{\boxed{2}\,3l66\text{ב}\boxed{2}}{}}} \qquad \underset{8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{\boxed{2}\,3l126\text{ת}\boxed{2}}{}}}$$

$$\underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r}{\overset{(5)((1))}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-128\text{ג}a^2\boxed{8}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(6)((6))}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-128\text{ג}a^2\boxed{4}66\text{ב}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-128\text{ג}a^2\,\boxed{4}126\text{ת}}{}}}$$

$$\underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}{\overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-128\text{ג}a^2\,\boxed{2}\,66\text{ב}126\text{ת}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r}{\overset{(4)((8))}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-1184\text{ל}a^2\boxed{4}}{}}} \qquad \underset{8r38\text{א}\boxed{2}8r\,\hat{}\,-38\text{א}}{\overset{(6)((6))}{\frac{-\boxed{2}\,\hat{}\,-1184\text{ל}a^2\boxed{4}66\text{ב}}{}}}$$

6 $\frac{5}{4}\,\frac{\Omega}{a}$ | vel $\frac{32}{4}\,\frac{\Omega}{a}$ vel $8\,\frac{\Omega}{a}$ *gestr.* |. *L* 8–11 Imo ... $2 \sqcap 4\,\hat{}\,$ | 3. *ändert Hrsg.* | Ideo ... fractiones *erg. L*

13 m^2c: Bei der Berechnung der Koeffizienten von m^2c unterlaufen Leibniz einige Flüchtigkeitsfehler.

$$\begin{array}{ll} (0) & \\ \dfrac{-\boxed{2}\ \frown\ -1184\text{ל}a^2 66\text{ב}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\ \frown\ -38\text{א}38\text{א}} & \dfrac{3B}{8} \end{array}$$

c^2m [*bricht ab*]

7_3. PLAGULA TERTIA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Methodi Tangentium inversae ad circulum applicatae plagula III^{tia}

Aequatio $x + \frac{l}{a}y - m \sqcap 0$. quadrata, dat:

$$☿\ x^2 + \frac{2l}{a}\ xy - 2m\ x + \frac{l^2}{a^2}\ y^2 - \frac{2lm}{a}\ y + m^2 \sqcap 0$$

in qua utraque incognita duas habet radices aequales. Multiplicetur per quamlibet aliam formulam plenam quantum ad comparationem cum sequenti aequatione faciendam satis est, elevatam, hoc loco, $x + \frac{n}{a}y - q \sqcap 0$ fiet:

$$\begin{array}{llll} \odot & & & -\ q\ x^2 \\ & \dfrac{2ln}{a^2}\ xy^2 + \dfrac{n}{a}\ yx^2 + \dfrac{l^2n}{a^3}\ y^3 & & \\ & +\ x^3 + \dfrac{l^2}{a^2}\ ..\ + \dfrac{2l}{a}\ .. & & -2m\ .. \\ & & -\ \dfrac{2lq}{a}\ xy + 2mq\,x - \dfrac{l^2q}{a^2}\ y^2 + \dfrac{2lmq}{a}\ y - qm^2 & [\sqcap 0] \\ & & -\ \dfrac{2mn}{a}\ .. \qquad -\ \dfrac{2lmn}{a^2}\ .. + \dfrac{m^2n}{a}\ .. & \\ & & -\ \dfrac{2lm}{a}\ .. + m^2\ .. & \end{array}$$

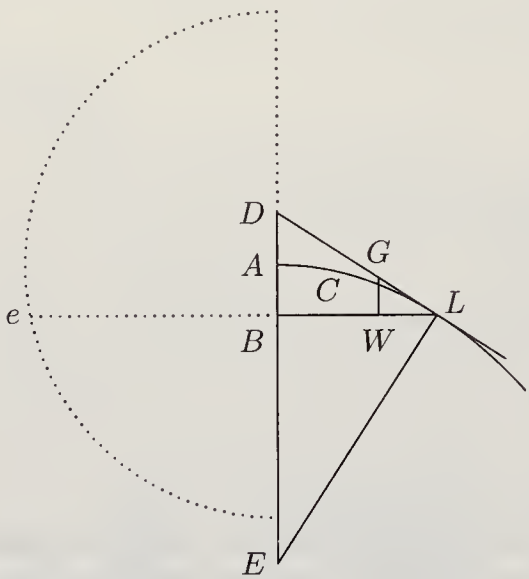
7 Methodi ... inversae | ad ... applicatae *erg.* | *(1)* schediasmatis *(2)* plagu *(3)* plagula III^{tia} *erg. L*
10–12 in ... seqventi | aeqvatio *ändert Hrsg.* | faciendam ... loco *erg. L*

Esto jam aequatio $v^2 + \frac{b}{a}\omega^2 + a^2 \sqcap 0$. et pro v, ponendo $x + c$, pro ω ponendo $y + d$. $-p^2$

fiet:

---

1 *Zu* aequatio ... ⊓ 0, *mit Hinweisstrich verbunden*:



Cujus ut originem intelligas, inspice figuram, in qua AB sit v, BL sit ω. ACL, curva ad quam sunt ordinatae BL, jam EL appellemus, p quae ad curvam perpendicularis est, et ponamus ipsius BE valorem sive relationem ad ipsam AB abscissam quadam aequatione expressam haberi, ponamus exempli causa BE esse ut sinus. Descriptoque circulo ex centro A, sinus Be, semper aequari ipsis BE perpendicularium curvae ACL, intervallis in axe, ab ordinatis BL, ajo si his datis, AB, et BE, ipsa BL reperiri potest, haberi circuli quadraturam; adeoque ex Methodo Tangentium inversa sequi figurarum omnium Quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem analyticam reddi posse. Pro valore sinus $\sqrt{a^2 - v^2}$ substituamus valorem Ellipticae et Hyperbolicae applicatae generalem $\sqrt{a^2 + \frac{b}{a}v^2}$ fiet aequatio $v^2 + \frac{b}{a}\omega^2 + a^2 - p^2 \sqcap 0$. Quae si ad duas determinabitur radices aequales, eliminabitur incognita p, et sola restabit, adeoque ex data v, inventa erit ω, unde sequitur quadratura Circuli, quia semiquadratum ipsius BL, aequabitur portioni circuli $ABeA$.

15 ipsa BL *(1)* aeqvatione qvada *(2)* reperiri *L* 20 generalem *(1)* $\sqrt{a^2 \mp \frac{b}{a}v^2}$ *(2)* $\sqrt{a^2 + \frac{b}{a}v^2}$ *L*

---

20 $\sqrt{a^2 + \frac{b}{a}v^2}$: Leibniz ersetzt das ursprüngliche Doppelvorzeichen durch Plus und lässt stattdessen für b auch negative Werte zu; in der folgenden Gleichung sind v und ω vertauscht. 21 determinabitur: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

$$\text{♀}\quad x^2 + 2c\,x \left\{ a\odot \begin{cases} +c^2 \quad +\frac{b}{a}y^2 + \frac{2bd}{a}y \sqcap 0. \\ +\frac{b}{a}d^2 \\ +a^2 \\ -p^2 \end{cases} \right.$$

Multiplicetur haec aequatio per $x + \frac{r}{a}y - s$. fiet:

$$\begin{array}{l} x + \frac{r}{a}\ y\ -\ s \\ \hline \text{☽}\ x^3 + 2c\,x^2 + a\odot x + \frac{b}{a}y^2x + \frac{2bd}{a}\,yx\ +\ r\odot\ y + \frac{rb}{a^2}y^3 + \frac{2bdr}{a^2}\,y^2 + \frac{r}{a}yx^2 \\ \quad -\ s\ ..\ -2cs\ ..\qquad +\frac{2cr}{a}\ ..\ -\frac{2bds}{a}\ ..\qquad -\ \frac{bs}{a}\ ..\qquad -sa\odot \end{array}$$

Jam conferendo cum simili $\odot$ quae duas habet radices aequales

(1) ex y^3, $\quad r \sqcap \frac{+l^2n}{ab}$.

(2) ex x^2y, $\quad \frac{n}{\not\phi} + \frac{2l}{\not\phi} \sqcap \boxed{\frac{r}{a}}\frac{l^2n}{a\not{^2}b}$. sive $abn - l^2n \sqcap -2lab$, sive $n \sqcap \frac{+2lab}{+l^2 - ab}$.

(3) ex xy^2, $\frac{2ln}{a^2} + \frac{l^2}{a^2} \sqcap \frac{b}{a}$, sive $\frac{2l2lab}{l^2a\not{^2} - a\not{^3}b} + \frac{l^2}{a\not{^2}} \sqcap \frac{b}{\not\phi}$, sive $2\textcircled{4}l^2ab + l^4\boxed{-l^2ab} \sqcap$ $\boxed{l^2ab} - a^2b^2$ sive $l^4 + 2l^2ab + a^2b^2 \sqcap 0$, sive $l^2 + ab \sqcap 0$. sive $l \sqcap \sqrt{-ab}$.

Unde $n \sqcap \frac{2ab\sqrt{-ab}}{-ab - ab} \sqcap -\sqrt{-ab}$, et $r \sqcap -n \sqcap +\sqrt{-ab}$.

---

13 *Zu* $l \sqcap \sqrt{-ab}$ *am Rande:* Unde jam sequitur in Circulo et Ellipsi amplius progredi non licere, ubi b est quantitas affirmativa, est enim radix quadrata ex negativo impossibilis. Continuemus tamen Hyperbolae causa.

16 qvantitas *(1)* negativa *(2)* affirmativa *L*

---

15 in Circulo et Ellipsi: Leibniz hätte, nachdem er richtig negativa durch affirmativa ersetzt hat, auch Kreis bzw. Ellipse durch Hyperbel ersetzen müssen und umgekehrt.

(4) ex x^2, $-q-2m \sqcap 2c-s$. Ergo $s \sqcap 2c+q+2m$.

(5) ex y^2, $-l^2q-2lmn \sqcap 2bd\,(r)\,l\,\boxed{-bsa}\ \underbrace{-2bca-baq-2bam}$, sive

$$d \sqcap \frac{2bca+baq+2bam-l^2q\boxed{-2lmn}+2l^2m}{2bl}.$$

(6) ex xy, $\boxed{-\not2lq}\ \boxed{+2lm\boxed{-2mn}}\ \boxed{-2lm} \sqcap \underbrace{+\not2bd}+\not2c\,(r)\,l$ et

$$\frac{2\not4bca+\not2baq+2\not4bam\boxed{-\not2l^2q}+2\not4l^2m}{l}$$

$$q \sqcap \frac{\boxed{+abc\boxed{-cl^2}}-(2)\,bca\boxed{-2bam+2abm\boxed{-2l^2m}}}{ba} \sqcap -c.$$ Ideoque

$$d \sqcap \frac{\not2\not bca\boxed{-bac}\ \boxed{+2bam}\ \boxed{+bac}\ \boxed{-2bam}}{\not2\not bl} \sqcap \frac{ca}{l}.\ s \sqcap \boxed{2c\boxed{+q}-c}\,c+2m.$$

(7) ex x, $\boxed{-2mc\boxed{+2mq}}+m^2 \sqcap a\odot-2c^2-2\,(4)\,cm$. Ergo $\odot \sqcap \frac{m^2+2cm+2c^2}{a}$.

(8) ex y, $2lmq+m^2n \sqcap r\ \underbrace{\odot a}\ -\ 2bds$. Unde fiet:

$-c$, $-l$, l, $\frac{ca}{l}\ c+2m$, $m^2+2cm+c^2$

$$-2lmc-m^2l \sqcap m^2l+2cml+c^2l-\frac{2bc^2a}{l}-\frac{4bcam}{l}$$ sive $+2m^2\boxed{l^2} \frown -ab$

$$\boxed{+4cm\boxed{l^2} \frown -ab}\ \boxed{+c^2\boxed{l^2} \frown -ab}-3\,(2)\,bc^2a+8\,(4)\,bcam \sqcap 0.$$

71,14 *Nebenrechnungen:* $r \sqcap l \sqcap \sqrt{-ab}$
$n \sqcap -\sqrt{-ab}$
$n \sqcap -l$

---

5 (6) ex xy: Richtig gerechnet ergibt der Koeffizientenvergleich eine identische Gleichung. Leibniz unterlaufen Versehen bei den Umformungen, die zu einem falschen Wert für q führen und die weiteren, ebenfalls nicht fehlerfreien Vergleichsrechnungen beeinträchtigen. Leibniz erkennt S. 73 Z. 12 die Unstimmigkeit, nicht jedoch die Ursache.

(9) ex Termino puro: $qm^2 \sqcap sa\odot$, sive $\boxed{-cm^2} \sqcap m^2 + 2cm + 2c^2$, $\frown$ $\textcircled{s}c + 2m \sqcap$ $6cm^2 + 6\boxed{2}c^2m + 2c^3 + 2m^3 \sqcap 0$. Paulo ante praecedens divisa per ab: $\boxed{\begin{matrix}4\ldots\\4\end{matrix}}\ldots$ $\boxed{\begin{matrix}4\ldots\\+1\ldots\end{matrix}}$

$+2m^2 + 3c^2 + 8cm \sqcap 0$ sive $\frac{4}{3}m^2c + 2c^3 + \frac{16c^2m}{3} \sqcap 0$ sive

$2c^3 \sqcap \frac{-4m^2c - 16mc^2}{3}$, ergo $6cm^2 + 6c^2m\frac{-4m^2c - 16mc^2}{3} + 2m^3$ sive

$14\underset{//}{\boxed{18}}cm^{\not 2} + 2\boxed{18}c^{2}\not{m}\underset{//}{\boxed{-4m^2c}}\boxed{-16mc^2} + 6m^{\not 32}$. Jam $2c^2 \sqcap \frac{-4m^2 - 16cm}{3}$

fiet: $14c\not{m}\frac{-4m^{\not 2} - 16c\not{m}}{3} + 6m^{\not 2} \sqcap 0$. sive $\begin{matrix}42c - 4m \sqcap 0.\ 13c \sqcap m.\ \text{Quem va-}\\ \underline{-16c + 6m}\\ 26c + 2m \sqcap 0.\end{matrix}$

lorem inventum superius inserendo fiet: $338\boxed{2,13 \frown 13}\not{c}^{\not 2} + 3\not{c}^{\not 2} + 104\not{c}^{\not 2} \sqcap 0$. quod est absurdum.

Itaque cum ad aequationem impossibilem pervenerimus sequitur problema sic quidem solvi non posse.

Duo examinanda restant, unum an alia multiplicandi forma reddi possit possibile; alterum an ex ipsis impossibilitatibus sive contradictionibus aliquid duci possit ad appropinquationem.

(1) Nota si plena aequatio (duarum incognitarum) ducatur in plenam, producta fiet plena.

(2) Omnis aequatio non plena eatenus plena reddi potest, ut non nisi aliqui termini desint, qui ex duarum incognitarum ductu in se invicem oriantur quod fit explicando incognitas. Et has aequationes vocabo semiplenas. Omnis ergo aequatio duarum incogni-

---

18–74,22 *Zu* (1) ... (9): NB. Hae propositiones non sunt de quantitate, sed de qualitate; ut appareat de his quoque fieri posse demonstrationes, et haberi Analyseos genus.

20 *Zu* (2): $x^2 + x + y + m + xy$

20 (2) *(1)* Si non plena ducitur in plenam, vid *(2)* Omnis *L*

tarum non plena explicando reddi potest semiplena, si utraque incognitarum aeque alte ascendit.

(3) Omnis semiplena ducta in plenam satis elevatam (uno gradu inferiorem) fit plena.

(4) Hemicephala, (in qua potestas summa unius incognitae inferior summa alterius incognitae potestate est) nulla multiplicatione plena reddi potest.

(5) Ex Theoremate primo et tertio junctis sequitur omnem semiplenam ductam in aequalem aut superiorem plenam fieri plenam. Nam omnis plena ipsi aequalis aut altior similis est plenae ex ductu plenae in gradu uno data semiplena inferiorem factae. Jam semiplena in plenam uno gradu inferiorem ducta, fit plena, ergo et in eam quae ex ipsa ducta in plenam. Ergo et in ei similem.

(6) Hemicephala non aliter ad duas radices aequales determinari potest, quam supponendo aliquos formulae duarum Radicum aequalium generalis aut ex ea multiplicando factae terminos nihilo aequales.

(7) Non plena per non plenam non potest credo fieri plena.

(8) Hians est in qua est aliqua superior, nec tamen inferior; ut, si sit x^2, nec tamen x, vel x^2y, nec tamen xy, etc. Unde dico, omnem Hiantem posse reddi continuam, explicando.

(9) Illud explicandum est; quaerendumque exactius, si collatio aequationis propositae per plenam quantum satis est multiplicatae; cum aequatione simili duas cujuslibet incognitae habente radices aequales deprehensa est impossibilis; an inde sequatur; etiam ejusdem per plenam altiorem multiplicatae collationem cum aliqua simili duas radices aequales habente fore impossibilem.

Exempli causa in hac nostra: $x^2 + 2cx + a\odot + \frac{b}{a}y^2 + \frac{2bd}{a}y \sqcap 0$. per $x + \frac{r}{a}y - s$ multiplicata, deprehensum est impossibile esse ut quae inde facta est duas habeat radices aequales cujuslibet ex incognitis. Quaestio est an hinc sequatur impossibile esse, omnino ipsam propositam non habere duas radices aequales. Ita certe sequeretur necessario, si quidem ex illo, quod aequatio aliqua sine impossibilitate cum alia duas radices aequales habente conferri non potest, sequeretur impossibile esse ipsam habere duas radices ae-

2 f. ascendit. *(1)* a 2a 3a 4a b 2b 3b 4b *(2)* (3) Omnis *L* 25 esse, *(1)* | ut *streicht Hrsg.* | *(2)* omnino *L*

16 continuam: wohl synonym mit plenam verwendet. 24 deprehensum: vgl. die Erl. zu S. 72 Z. 5.

quales. Sed hoc an sequatur examinandum est. Sane manifestum est aequationem etiam unius tantum incognitae determinari posse ad duas radices aequales et tamen conferri cum simili duas radices aequales habente non posse; et ideo ut res exitum reperiat, necesse esse ut prius alteri cuidam duas aequales habenti radices reddatur similis; ut per omnia institui queat collatio. Sed ubi jam similis reddita est, quaeritur an jam inde demonstrari possit quod nulli duas radices aequales habenti comparari possit, quia certae cuidam duas habenti radices aequales, utcunque simili comparari non potest. Et hoc est illud in quo haereo, quodque nondum permittit ut pronuntiem impossibilitatem hujus problematis demonstratam.

Examinandum est e. g. an aequatio ♀ per $x.y.a.$ multiplicata, quae aequationi cuidam ☿ per $x.y.a.$ multiplicatae comparari non potest, an tamen inquam, eadem ♀, per x^2, y^2, xy, x, y, a multiplicata, alteri ☿ per x^2, y^2, xy, x, y, a multiplicatae comparari possit. Sane certum est omnem aequationem plenam indefinitam alteri cuilibet plenae indefinitae comparari posse; cum alioqui omnia utrobique sint eadem.

Videndum est item, an duarum quarumlibet plenarum generalium ductus in se invicem, cuilibet plenae generali productae simili comparari possit; ita certe non dubito; nam et superfluum aliquid indeterminati futurum arbitror.

Hinc videndum, an sequatur si

♀ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{/}$ non est $\sim$ ☿ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{//}$ an possit esse,

♀ ⌢ $\underbrace{x^2, y^2, xy, x, y, a.}_{/}$ $\sim$ ☿ ⌢ $\underbrace{x^2, y^2, xy, x, y, a.}_{//}$

Sane si ♀ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{/}$ non est $\sim$ ☿ ⌢ $\underbrace{x.y.a}_{//}$, nec ♀ ⌢ $\underbrace{x.y.a}_{/}$ ⌢ $\underbrace{x.y.a}_{///}$ erit $\sim$ ☿ ⌢ $\underbrace{x.y.a}_{//}$ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{///}$. Sed hinc non sequitur

♀ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{/}$ ⌢ $\underbrace{x.y.a}_{///}$ non esse $\sim$ ☿ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{//}$ ⌢ $\underbrace{x.y.a.}_{////}$

sive ♀ ⌢ $\underbrace{x^2.xy.y^2.x.y.a}_{/}$ ☿ ⌢ $\underbrace{x^2.xy.y^2.x.y.a}_{//}$

---

19 *Zu* $\sim$: simile

3 posse; *(1)* v. g | etiam in *streicht Hrsg.* | aeqvationibus uni *(2)* e. g. aeqvatio: $a^2 - x^2$ ⊓ *(3)* et *L*

Nam sciendum est, $\underbrace{x.\,y.\,a}_{/}\ \widehat{}\ \underbrace{x.\,y.\,a}_{///}$ cum $\underbrace{x.\,y.\,a}_{//}\ \widehat{}\ \underbrace{x.\,y.\,a}_{////}$ conferre idem esse quod $\underbrace{x.^2\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{/}$ conferre cum $\underbrace{x.^2\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{//}$. Restat ergo scrupulus.

Interea cum notem, in aequationibus unius incognitae nunquam haec evenire, sed semper procedere collationem, cum alicujus figurae tangentes quaeruntur, ideoque credibile est, quando id non procedit, signum esse impossibilitatis, frustraque multiplicationes suscipi: Quo considerato, in eam pene sententiam venio, rectius etiam in Methodum tangentium inversam inquiri per duplicem collationem secundum methodum directam; ubi illud quoque commodum manifestum est, quod in altioribus aequationibus multiplicatur nimis numerus terminorum methodo qua usus sum aequationes duarum aequationum similes conferendi; nec satis suppetit fortasse semper incognitarum; (videndum tamen hoc:) Cum contra posteriore quam nunc experiar, id non eveniat.

Praeterea considerandum est, an non fortasse falsa sit hypothesis, quod omnis aequatio duas habens radices aequales, aut ejus multipla, cum ista $x + \frac{l}{a}y\,[+]\,m.$ aut ejus multipla conferri possit. Potest enim fieri, ut utraque incognita duos habeat valores, et tamen in eo valore nulla sit y simplex, pone enim aequationis radicem esse $x + \frac{s}{a}y^2$, et hanc in se ductam conferri posse datae. Respondebis tunc fore $m \sqcap \frac{s}{a}y^2 - \frac{l}{a}y$; sed ut hoc quoque praescindam, non videtur necesse tandem ut aequatio duarum incognitarum duas habens radices aequales per quadratum hujus $x + \frac{l}{a}y + m$ dividi possit; nam forte ne reperiri quidem potest unica ejusmodi aequatio utramque incognitam includens; sufficit enim simpliciter ostendi posse, quod aequatio proposita secundum x, ordinata conferri possit cum hac: $x^2 + 2ex + e^2$, vel ejus multipla, et secundum y ordinata cum hac[:] $y^2 + 2ny + n^2$. et si ad unicam quandam pro utraque incognita aequationem res reduci

---

12 *Zu* falsa sit hypothesis: recte

7 directae *L ändert Hrsg.* 14 habet *L ändert Hrsg.* 15 enim *(1)* inventam esse m, et *(a)* valere $\frac{s}{a}y^2$, $-\frac{l}{a}y$ *(b)* valere $\frac{s}{a}y^2$, sane res *(2)* | et *streicht Hrsg.* | aeqvationem *(3)* aeqvationis *L*

nequeat. Forte enim id ne fieri quidem semper potest, quemadmodum forte non omnis aequatio affecta reduci potest ad puram etc.

Accedit quod video problemata quaedam fore methodi tangentium inversae geometrice solubilia. Ut si Be ponatur esse applicata paraboloeidis aut Hyperboloeidis aut alterius figurae quadrabilis; quae tamen vereor ne collationem ejusmodi respuant. Et operae pretium est tentare, an has solutiones nostra methodo tangentium inversa, et proinde quadraturas analytice ita invenire possimus; signum enim erit certum, in rectam nos Methodum incidisse.

Ponendo ergo Be esse parabolae applicatam, $\sqcap \sqrt{2av}$. Erit $BE^2 \sqcap 2av$, fietque $\omega^2 + 2av \sqcap p^2$. Quam quia Acephala est impossibile erit similem reddere unquam aequationi duarum radicum aequalium duarum incognitarum; et ita dubito collationem procedere, videamus quid fiat si duplici collatione utamur, nimirum tam ω, quam v duos habet valores aequales, sed antequam ordinemus, explicemus ω, nam non sine ratione Cartesium video, pro BE, sumere AE, ut scilicet hoc modo explicetur eo ipso una incognitarum; etsi rationem dissimulaverit; ut erat astutus. Ponendo ergo $\omega \sqcap y + d$, et $v \sqcap x + c$. explicatio erit:

$$\begin{array}{r} y^2 + 2dy + \ d^2 + 2ax \sqcap 0. \\ + 2ac \\ - \ p^2 \end{array}$$

Quamquam ipsius v explicationem non putem necessariam, attamen ita arbitror, nocere non posse; prodesse fortasse posse explicationes.

Jam ordinando aequationem secundum y, fiet:

$$\begin{array}{r} y^2 + 2dy + \ d^2 \sqcap 0. \\ + 2ac \\ - \ p^2 \\ + 2ax \end{array}$$

Conferenda cum hac: $y^2 + 2ey + e^2$. erit $2d \sqcap 2e$, ergo $e \sqcap d \sqcap [-]y$ ex prima collatione, ex altera vero $\boxed{d^2}\ \boxed{e^2} + 2ac - p^2 + 2ax \sqcap \boxed{e^2}$ adeoque $c \sqcap \dfrac{p^2 - 2ax}{2a}$.

Ordinemus jam aequationem secundum x, sed antequam hoc faciamus, utamur inventis in collatione priore, itaque $y^2 + 2dy + d^2$ velut $\sqcap 0$. poterimusne removere. Restabit

12 duplici *(1)* methodo tractetur *(2)* collatione *L* 15 erat *(1)* subtilis *(2)* astutus *L*

13 Cartesium: s. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40.

enim: $\underbrace{x+c}_{v} - \frac{p^2}{2a}$, ⊓ 0. quae conferenda est cum alia quae duas habeat radices aequales:

$x^2 + 2nx + n^2$ ⊓ 0. quod ut fieri possit prior $x + c - \frac{p^2}{2a}$, vel $v - \frac{p^2}{2a}$ ⊓ 0 (video enim explicatione ipsius v non fuisse opus hoc loco) multiplicabitur per hanc formulam: $v+m$, fiet: $v^2 - \frac{p^2}{2a}v - \frac{p^2 m}{2a}$ ⊓ 0 conferenda cum $v^2 + 2nv + n^2$. et habebimus aequationes duas,
$+m$ ..

unam: $-p^2 + 2am$ ⊓ $4an$, alteram: $2an^2$ ⊓ $-p^2 m$. Ex posteriore m ⊓ $\frac{2an^2}{-p^2}$, qui valor inseratur priori, fiet: $-p^2 + \frac{4a^2n^2}{-p^2}$ ⊓ $4an$, sive $p^4 + 4anp^2 + 4a^2n^2$ ⊓ 0. sive ∓p^2 ∓ $2an$ ⊓ 0. sive p^2 ⊓ $-2an$. Jam n ⊓ $-v$. ergo p^2 ⊓ $2av$. In quo fateor tamen errorem necessario subesse. Causa erroris manifesta est, sed non remedium; certe enim, dum pono $y^2 + 2dy + d^2$ ⊓ 0. eo ipso pono ω^2 ⊓ 0. quod est absurdum: Video ergo explicationem hic nocuisse.

An ergo non explicando sed multiplicando procedendum est, id ex his videtur sequi a posteriori; etsi non satis omnium horum a priori demonstrationes videam; nisi haec forte est, quod frustraneum videatur explicare quae in unum rursus conjungi possint.

An ergo resumemus aequationem, $\omega^2 + 2av - p^2$ ⊓ 0. et ordinando secundum ω^2, fiet: $\omega^2 + 2av$ ⊓ 0. Eam multiplicemus per $\omega + h$. fiet:
$- p^2$

$$\omega^3 + 2av\,\omega + 2hav,$$
$$- p^2 \,..\quad hp^2$$

sumamus aequationem duarum radicum aequalium: $\omega^2 + 2e\omega + e^2$ et multiplicemus per $\omega + g$, fiet:

$$\omega^3 + 2e\,\omega^2 + e^2\,\omega$$
$$+ g\,..\; + 2eg\,..\; + e^2 g.$$

4 $+n^2$. *(1)* eritque v ⊓ p$\sqrt{\frac{-m}{2a}}$ *(2)* et *L* 8 subesse. *(1)* Sed jam video ubi erraverim, nimirum nunc x, nunc *(2)* Causa *L* 10 f. nocuisse. *(1)* An ergo rectius ponam Cartesiano more, *(a)* AE *(aa)* ⊓ v, *(bb)* ⊓ *(b)* AE ⊓ v, *(aa)* erit *(bb)* erit *(2)* An *L*

15 per $\omega + h$.: Im folgenden Ausdruck fehlt der Term $+h\omega^2$. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit und setzt neu an, erkennt aber nicht die Ursache.

Sed ne hoc quidem procedere patet; itaque necessaria est explicatio ne aequatio sit hiat[i]ca, et postea multiplicatio, fiet scilicet:

$$\begin{array}{l} y^2 + 2dy + \ d^2 \sqcap 0. \\ \qquad\qquad\quad - \ p^2 \\ \qquad\qquad\quad + 2av \end{array}$$

Multiplicetur per $y + h$, fiet:

$$\begin{array}{l} y^3 + 2d\ y^2 + \ d^2\ y + \ hd^2 \sqcap 0. \\ \quad + \ h\ ..\ - \ p^2\ ..\ - \ hp^2 \\ \qquad\qquad + 2av\ ..\ + 2hav \\ \qquad\qquad + 2dh\ .. \end{array}$$

Conferenda cum:

$$\begin{array}{l} y^3 + 2e\ y^2 + \ e^2\ y + e^2 g \quad \sqcap 0. \\ \quad + \ g\ ..\ + 2eg\ .. \end{array}$$

ubi aequationes tres, incognitae $g.\,h.\,d.\,p.$ Sed jam video rursus nulla opus explicatione et poni posse $d \sqcap 0.$ cum alioquin futura sit supernumeraria inutilis, quae non nisi ad constructionum compendia servire potest. Conferendo ergo per duos terminos secundos fiet $h \sqcap 2e + g.$ et ex tertiis: $-p^2 + 2av \sqcap e^2 + 2eg.$ ⟨adeoque⟩ $g \sqcap \dfrac{-e^2 - p^2 + 2av}{2e}$, et $h \sqcap \dfrac{4e^2 - e^2 - p^2 + 2av}{2e}$. Unde ex terminis ultimis:

$$-2\textcircled{3}e^2p^2 + p^4 - 2avp^2 + 4\textcircled{6}ave^2 - 2avp^2 + 4a^2v^2 \sqcap -e^4 \boxed{-e^2p^2}\ \boxed{+2ave^2}$$

et ordinando: $p^4 - 4avp^2 - 2e^2p^2, +4a^2v^2 + 4ave^2 + e^4 \sqcap 0.$ et extracta radice, $\mp p^2 \pm 2av \pm e^2 \sqcap 0$ sive $2av + e^2 - p^2 \sqcap 0$ sive quia $e \sqcap -\omega$, fiet: $\omega^2 + 2av - p^2 \sqcap 0.$ ut ante, quod docet aequationem istam jam satis sua natura esse ad duas radices determinatam, ordinando secundum ω. ac proinde superesse tantum, ut eam ordinemus secundum v. Idque jam ipse verum esse agnosco, est enim aequatio pura, omnis autem aequatio quadratica pura duas habet radices aequales.

Imo falsum, una enim alteri opposita est, nempe fiet: $\omega \sqcap \sqrt{p^2 - 2av}$, vel $\omega \sqcap -\sqrt{p^2 - 2av}$. Unde aequatio $\omega - \sqrt{p^2 - 2av} \sqcap 0.$ vel $\omega + \sqrt{p^2 - 2av} \sqcap 0.$ quae ductae in se invicem dabunt: $\omega^2 \boxed{-\omega\sqrt{p^2 - 2av} + \omega\sqrt{p^2 - 2av}} - p^2 + 2av \sqcap 0.$ Itaque vereor rursus ne

19 f. $\boxed{+2ave^2}$ *(1)* et $p^4 - 4avp^2 + 4a^2v^2 \sqcap -e^4 + 4e^2p^2 - 8ave^2$, sive $\mp p^2 \pm 2av \sqcap e\sqrt{e^2 + 2p^2 - 8av}$ *(2)* et *L* 23 secundum | y. *ändert Hrsg.* | Idqve *L* 25 f. aeqvales *(1)*, *(a)* fit enim *(b)* sed ita tamen *(aa)* $\omega \sqcap$ *(bb)* ut altera alterius negatio sit *(2)* Imo *L*

quis error calculi subsit. Sed eum jam invenio, nimirum aequationem sumsi $\omega^2+2e\omega+e^2$, cum deberem sumere $\omega^2-2e\omega+e^2$. Nam sumendo priorem, quaeritur id quod in omni aequatione pura jam habetur, ut scilicet duae fiant radices oppositae sibi, seu mole non forma aequales. Itaque si quaeramus aequationem aliquam quadraticam reddere puram[,] hac id methodo praestare possumus. Omnis cubica autem quae pura reddi debet tres habet radices aequales: sed haec non sunt hujus loci. Caeterum resumemus nunc calculum nostrum detecto erroris fonte.

$$\omega^2-2e\omega+e^2 \sqcap 0 \frown \omega+g, \sqcap \omega^3-2e\,\omega^2+e^2\,\omega+e^2g \sqcap 0.$$
$$+\ g\ ..\ -2eg\ ..$$

conferendam cum, ... $\omega^3+h\,\omega^2-p^2\,\omega-hp^2$
$$+2av\ ..\ +2hav$$

Ergo ex terminis 2^{dis} $h \sqcap g-2e.$ ex tertiis et $g \sqcap \frac{e^2+p^2-2av}{2e}$. adeoque

$$h \sqcap \frac{e^2+p^2-2av-4e^2}{2e} \sqcap \frac{p^2-2av-3e^2}{2e}.$$

Ergo ex terminis ultimis:

$$-p^4+2avp^2+2\textcircled{3}e^2p^2, +2p^2av-4a^2v^2-4\textcircled{6}ave^2 \sqcap e^4 \boxed{+p^2e^2} \boxed{-2ave^2}.$$

Unde $e^4+4ave^2-2p^2e^2, +4a^2v^2-4avp^2+p^4 \sqcap 0$. Unde extrahi radix potest, quae erit, $e^2.2av.p^2$. Sed ut ejus signa determinemus, considerandum est e^2, et $2av$, idem habere signum, at p^2 oppositum ipsis, fiet ergo: $e^2+2av-p^2 \sqcap 0$ vel $p^2 \sqcap e^2+2av$ sive $p^2 \sqcap \omega^2+2av$. Sed ita redit rursus prior valor, quod me turbat. Quod si ergo nullus ut arbitror in calculo repetito error est, id sic intelligi debet pro p^2, hunc valorem substituendum, et loco aequationis initio propositae, $\omega^2+2av-p^2$, fiet: $\omega^2+2av-\omega^2-2av \sqcap 0$. quae utique duas habet radices aequales, 0. Jam ergo resumta aequatione ω^2 ipsam ad v

1 subsit. *(1)* Imo video nullum esse errorem qvidem, sed naturam calculi *(2)* Sed *L* 5 possumus *(1)* sumta ergo aeqvatione, ut hoc obiter faciam: $y^3 * py$ *(2)* Sumamus cubicam: in qva $y^3 \sqcap a^2b$, eius *(a)* radices: *(b)* radix $y \sqcap \sqrt{③}\ a^2b$. $y^3-a^2b \sqcap 0$. fieri potest ex ductis in se: $y-\sqrt{③}$ *(3)* y^3 *(4)* Omnis *L* 15 $+2\textcircled{3}e^2p^2, \mid +2p^2a^2$ *ändert Hrsg.* $\mid -4a^2v^2$ *L* 16 $+4a^2v^2, \mid -2avp^2$ *ändert Hrsg.* $\mid +p^4$ *L*

22 aeqvales, 0. *(1)* Jam ergo resumta aeqvatione $\omega^2+2av-p^2$, ipsam ad v qvoqve ordinemus sed anteqvam pergamus, exemplo Schotenii uti placet; nimirum, placet uti explicatio *(2)* Jam *L*

5 Omnis cubica: Die folgende Behauptung ist nicht richtig. 28 exemplo Schotenii: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 246 f.

quoque ordinemus, fiet scilicet

$$v \left\{ \begin{array}{l} -p^2 \\ \underline{+\omega^2} \\ 2a \end{array} \right. \sqcap 0.$$

quam multiplicabimus per $v + f$, fiet:

$$v^2 \left\{ \begin{array}{l} -p^2\ v \\ \underline{+\omega^2}\ .. \\ 2a \\ +f\ .. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -p^2\ f \sqcap 0. \\ \underline{+\omega^2}\ .. \\ 2a \end{array} \right.$$

Conferenda cum $v^2 - 2ev + e^2 \sqcap 0$, fiet: $f \sqcap \frac{+p^2 - \omega^2 + 4ae}{2a}$ et ex ultimis $-p^4 + p^2\omega^2 - 4aep^2, +\omega^2p^2 - \omega^4 + 4ae\omega^2 - 4a^2e^2 \sqcap 0$. sive $p^4 - 2p^2\omega^2 + 4p^2ae, +\omega^4 - 4\omega^2ae + 4a^2e^2 \sqcap 0$. Unde rursus extrahi radix potest, nescio quo fato, fit enim: $p^2 - \omega^2 + 2ae \sqcap 0$. Est autem $e \sqcap v$. Redit ergo iterum aequatio prior, neque habetur exitus, quae cum mihi mira videantur, nec satis capiam, videndum superest, an liceat aliquid proficere adhibendo explicationem per $\underline{d}$. ipsamque d investigando, conferemus ergo prima, ut coeperamus

$$\begin{array}{l} y^3 + 2d\,y^2 + \ d^2\ y + \ hd^2\ , \\ \quad + \ h\ ..\ - \ p^2\ ..- \ hp^2 \\ \qquad\quad + 2av\ ..+ 2hav \\ \qquad\quad + 2dh\ .. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{cum}\ \ y^3 + 2e\,y^2 + \ e^2\ y + e^2g \sqcap 0 \\ \quad + \ g\ ..\ - 2eg\ .. \end{array}$$

fiet ex terminis 2^{dis}, $h \sqcap 2e + g - 2d$. Ideoque $2dh \sqcap 2de + 2dg - 4d^2$. Ideoque ex terminis tertiis: $\boxed{d^2} -p^2 + 2av + 2de + 2dg - 3\boxed{4}d^2 \sqcap e^2 - 2eg$ eritque $g \sqcap \frac{e^2 + p^2 - 2av - 2de + 3d^2}{2d + 2e}$.

Ideoque

---

20 $Zu + 2ey^2$: Error. Debet esse $-$.

---

10 fiet: Im Zähler des folgenden Bruches müsste $-4ae$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter, bemerkt aber nicht die Diskrepanz zwischen seinen Ergebnissen in S. 80 Z. 18 f. und Z. 12. 20 $+2ey^2$: Leibniz stellt den Vorzeichenfehler nachträglich fest und merkt ihn an. Er verbessert die durch weitere Versehen beeinträchtigte Rechnung nicht, sondern setzt S. 82 Z. 19 neu an und führt die Rechnung richtig durch.

$$h \sqcap \frac{\boxed{4de} + 4e^2 - 4d^2 \boxed{-4de}, +e^2 + p^2 - 2av - 2de + 3d^2}{2d + 2e} \sqcap \frac{5e^2 - d^2 + p^2 - 2av - 2de}{2d + 2e}.$$

Denique ex terminis ultimis nascetur haec aequatio:

$$2\textcircled{5}e^2d^2 - d^4 + 2\underset{////}{\bigcirc}p^2d^2 - 4\underset{///}{\textcircled{2}}avd^2 - 2d^3e, -6\underset{//}{\textcircled{5}}e^2p^2\underset{/////}{\boxed{+d^2p^2}} - p^4 +$$

$$4\underset{////}{\textcircled{2}}avp^2 + 2dep^2, +12\underset{/////}{\boxed{10}}ave^2\underset{///}{\boxed{-2avd^2}}\underset{////}{\boxed{+2avp^2}} - 4a^2v^2 - 4avde$$

$$\sqcap$$

$$e^4\underset{//}{\boxed{+e^2p^2}}\underset{/////}{\boxed{-2e^2av}} - 2e^3d\boxed{+3d^2e^2}.$$

In qua aequatione cum valor ipsius p haberi poterit, nimirum

$$\begin{array}{rrrrl}
p^4 & -\ 2d^2\ p^2 & +\ 4d^4 & \sqcap & \left\{\begin{array}{rrr}
4d^4 & -\ d^4 & \\
-\ 24d^2e^2 & +\ 2e^2d^2 & +\ 4d^2e^2 \\
+\ 8d^2av & -\ 4avd^2 & \\
+\ 8d^3e & -\ 2d^3e & \\
\hline
+\ 36e^4 & -\ e^4 & \\
-\ 24e^2av & +\ 12e^2av & \\
-\ 24e^3d & +\ 2e^3d & \\
\hline
+\ 4a^2v^2 & -\ 4a^2v^2 & \\
+\ 8avde & -\ 4avde & \\
\hline
\boxed{+\ 4d^2e^2} & &
\end{array}\right\} \sqcap \begin{array}{r}
+\ 3d^4 \\
-\ 18d^2e^2 \\
+\ 4d^2av \\
+\ 6d^3e \\
\hline
+\ 35e^4 \\
-\ 12e^2av \\
-\ 22e^3d \\
* \\
+\ 4avde
\end{array}$$

Sed suspecta est mihi nimia ista calculi prolixitas, quemadmodum supra nimia brevitas. Repetamus: $\omega^2 + 2av - p^2$. Pone $\omega \sqcap y + d$. fiet $\omega^2 \sqcap y^2 + 2dy + d^2$; unde

$$\begin{array}{rrr}
y^2 + 2dy + d^2 & \text{multiplicata per } y + h, \text{dabit:} & \left.\begin{array}{rrrr}
y^3 + 2d\ y^2 & +\ d^2 & .. + & hd^2 \\
+\ h\ .. & +\ 2av & .. - & hp^2 \\
 & -\ p^2 & .. + & 2hav \\
 & +\ 2dh & ..
\end{array}\right\} \sqcap 0. \\
+\ 2av & & \\
-\ p^2 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
y^2 - 2ey + e^2 & \text{in } y + g, \text{ dat} & \begin{array}{rrrr}
y^3 - 2e\ y^2 & +\ e^2\ y & & \sqcap 0. \\
+\ g\ .. & -\ 2eg & .. + & e^2g
\end{array}
\end{array}$$

Conferendo fiet: $h \sqcap g - 2e - 2d$ ex Terminis secundis; et

$$-2eg + e^2 \sqcap +d^2 + 2av - p^2 \boxed{\begin{array}{r} +\ 2dh \\ \hline g - 2e - d \end{array}} + 2dg - 4de - 4d^2$$

eritque $g \sqcap \frac{-d^2 - 2av + p^2 + 4de + 4d^2 + e^2}{2e + 2d}$ et

$$h \sqcap \frac{-d^2 - 2av + p^2 + 4de \boxed{+4d^2} \boxed{+e^3} - 3\textcircled{4}e^2 - 8\textcircled{4}de \boxed{-4de} \boxed{-4d^2}}{2e + 2d} \sqcap$$

$\frac{-d^2 - 2av + p^2 - 4de - 3e^2}{2e + 2d}$ a⟨deo⟩que

$$-d^4 - 4\textcircled{2}avd^2 \boxed{+d^2p^2} - 4d^3e - 2\textcircled{3}e^2d^2, +2\textcircled{\ }d^2p^2 + 4\textcircled{2}avp^2 - p^4 +$$

$$4dep^2 + 2\textcircled{3}e^2p^2, \boxed{-2avd^2} - 4a^2v^2 \boxed{+2avp^2} - 8avde - 4\textcircled{6}ave^2 \qquad \sqcap \qquad 5$$

$$\boxed{-d^2e^2} \boxed{-2ave^2} \boxed{+p^2e^2} + 4de^3 + 4d^2e^2 + e^4.$$

Ordinemus aequationem videntur enim disponi omnia ad radicis extractionem fiet:

$$d^4 + 4d^2av + 4d^2ed + 2d^2e^2 - 2d^2p^2, +4a^2v^2 + 8aved + 4ave^2 \quad \sqcap \; 0$$
$$-4avp^2, +4e^2d^2 + 4ede^2 - 4edp^2, +e^4 - 2e^2p^2, +p^4$$

Unde potest extrahi radix et fiet: $d^2 + 2av + 2ed + e^2 - p^2 \sqcap 0$. quorum ut signa vestigentur cogitandum, $d^2, 2av, 2ed, e^2$, idem habere signum, solum p^2 ab ipsis diversum, ut ex primo extrahendae formulae commode dignosci potest. Habemus ergo aequationem eandem cum priore $d^2 + 2dy + y^2 + 2av - p^2, \sqcap 0$. seu $\omega^2 + 2av - p^2 \sqcap 0$. Nihil ergo promovimus. Calculus tamen rectus est. 10

7_4. PLAGULA QUARTA 15

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringe Textverluste durch Papierschäden.
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Schediasmatis de Methodo T a n g e n t i u m i n v e r s a ad circulum applicata plagula IV^{ta} 20

Plagula praecedente III^{tia} tentavi an aequationem tres habentem incognitas ad duas duarum ex ipsis radices aequales determinare liceret, aequationem propositam ordinando

21 aeqvationem *(1)* duas habentem incognitas, et unam *(a)* arb *(b)* praeterea *(2)* tres habentem indeterminatas *(3)* tres *L*

duobus modis, et singulis conferendo cum aequatione simili unius incognitae duas habente radices aequales, et deprehendi in eo quo usus sum exemplo, ex quo pendebat quadratura parabolae, seu in quo quaerebatur curva, cujus reductae essent ordinatae parabolae ad axem, aequationem seu collationem succedere, sed sub finem aequationem identicam dare, nec referre explices an non explices incognitas. Atque inde apparere non satis esse datorum. Sed duo hic quaerenda supersunt, alterum an hoc in omni exemplo futurum sit; alterum an alterius formae tangentium inversa methodus ei difficultati forte subjecta non sit. Adjicio tertiam quaestionem an quando non succedit collatio, uti tamen liceat Methodi[s] Huddeniana, imo et Fermatiana bis sed quantum ad Fermatianam non puto. Sed quod ad Huddenianam attinet nondum definio sane methodum ejusmodi de maximis infinitis ut vocat. Videtur habere Huddenius quam nondum publicavit.

Sed ut methodo Huddenii liceat necessarium arbitror explicare quantitatem incognitam; quia si aequatio sit pura, alioquin evanesceret cognita: Nisi velis eo casu multiplicare aequationem per progressionem Arithmeticam differentem a numero terminorum, v. g. si aequatio sit $\omega^2+2av \sqcap 0$. evanesceret cognita multiplicando per numerum dimen-
$-\ p^2$
sionum; et fieret $\omega \sqcap 0$. Quod est absurdum. Sed si ita multiplices per progressionem arithmeticam, fiet v. g.: $\omega^2+4av \sqcap 0$. cujus aequationis ope conjunctae cum superiore
$-2p^2$
tolli poterit incognita p. Sed quia forte postulat. Dicit quidem Huddenius *Epist.* 2da pag. 508. Schotenii nihil referre termini aliqui desint an non; sed hoc non ausim ei concedere, alioqui non posset fieri $\omega \sqcap 0$. casu supradicto. Nisi regerat de eo se casu loqui, quo non nisi una in aequatione incognita est; sed tamen video eum in demonstratione generali

3 essent *(1)* | ad *erg.* | parabolae verticales *(2)* verticales ad parabolam *(3)* ordinatae *L* 13 qvia *(1)* | alioqvin *streicht Hrsg.* | si aeqvatio *(2)* si *L* 18 f. pag. 505. *L ändert Hrsg.*

9 Methodi[s]: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516; Fermats Tangentenmethode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. HERIGONE, *Cursus mathematicus*, Bd 6, 1644, S. 59–69 und in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). 11 vocat: vgl. J. HUDDE, *a. a. O.*, S. 513; nondum publicavit: Leibniz vermutet eine solche Methode wohl in der unveröffentlichten Abhandlung, auf die Hudde *a. a. O.*, S. 515 f. hinweist. 13 pura: vgl. S. 79 Z. 23 – S. 80 Z. 6; Leibniz übersieht, dass reine Gleichungen keine von Null verschiedenen Doppelwurzeln besitzen. Dies beeinträchtigt die folgende Überlegung. Leibniz erkennt seinen Irrtum S. 86 Z. 4–9. 18 Dicit: *a. a. O.*, S. 508.

non adjicere determinationem de una tantum incognita, sed in casibus particularibus pag. 510.

Unum considerandum est hoc loco methodo Huddeniana quia bis ordinanda aequatio ad unamquamque scilicet incognitam, habitum iri tres aequationes inter se jungendas, cum tamen non nisi una sit eliminanda p, huic malo praeveniendum est, quod dupliciter, credo fieri posse, si vel explicando vel multiplicando numerum arbitrariarum augeamus; sed cum explicationi diffidam, utar primum Multiplicatione, itaque $\omega^2 + 4av$, multiplicetur $- p^2$

per $\omega + h$ fiet:

$$\omega^3 + h\omega^2 + 4av\,\omega + 4hav \sqcap 0. \quad \text{fiet:} \quad \omega^2 + \frac{2h}{3}\,\omega \quad \begin{cases} +4av. \\ \underline{-p^2} \end{cases}$$

$$- p^2 \;..\; - hp^2$$

$$3 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 0 \qquad\qquad 3$$

Sed duas hic reperio difficultates, quarum una est, quod multiplicando per $\omega + h$, et postea determinando ad duas radices aequales; non potest hinc concludi ipsam $\omega^2 + 4av \sqcap 0$, $- p^2$

determinatam ad duas radices aequales; sed potest fieri ut illa ipsa multiplicans multiplicando faciat ut producta recipiat duas radices aequales, quia h est aequalis uni ex prioribus radicibus: Itaque jam video in tota operatione hactenus a me erratum esse; cum scilicet ipsas aequationes datas per formulas arbitrarias multiplicavi; cum Cartesius recte in sua methodo Tangentium directa non ipsam datam, sed formulam generalem multiplicet: Et hinc jam video cur Schoten ingeniose ut solet, volens aequationem $x^3 * -px + qa$ determinare ad duas radices aequales, hanc $x^2 - 2ex + e^2$ multiplicat per $x + 2e$, fit enim $x^3 * 3e^2x + 2e^3$ similis priori.

In eo ergo hactenus a me valde erratum est. Sed huic rei quaeri forte remedium potest, pro h, ponendo $e + f$. Ita enim manifestum est posita differentia inter valorem e, duplicem aequalem, radices aequales non esse factas multiplicando. Sed hoc remedium tantum locum videtur habere cum per simplicem formulam, in qua incognita ad nullam ascendit

20 +qa *(1)* aeqvari *(2)* conferre *(3)* determinare *L*

---

7 $+4av$: Leibniz verwendet eine neue Gleichung. 17 Cartesius: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 46. 19 Schoten: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 264. 21 $3e^2x$: Richtig wäre $-3e^2x$. Leibniz verwendet die fehlerhafte Formel wieder S. 86 Z. 19, bevor er die durch einen weiteren Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigte Rechnung abbricht.

potestatem, multiplicamus. Itaque distinguo aut aequatio data non est superior ea quae duas habet radices aequales aut est; si non est, aut est aequalis aut inferior. Si est aequalis, multiplicetur per $\frac{s}{a}y+h+e \sqcap 0$. et ut fiat superior comparabilis multiplae duas habentis radices aequales si est inferior; multiplicetur. Sed jam denique video; aequationem in qua incognita ad nullam ascendit potestatem, item in qua incognita est pura, (: nec refert explicando fiat affecta, est enim id in speciem tantum :) non posse conferri cum aequatione quae duas habet radices aequales, sive multiplicetur sive non multiplicetur, nam impossibile est hanc aequationem $x + b \sqcap 0$. vel $x^2 + ba \sqcap 0$. habere duas radices aequales, nisi id quod deest sit in b, sed hoc nihil ad collationem.

Si sit aequatio $x^3 + cx^2 + dax + fa^2 \sqcap 0$. determinanda ad duas radices aequales; conferetur cum $x^2 - 2ex + e^2$, ducta in $x + g$. fiet:

$$\begin{array}{l} x^3 - 2\,e\,x^2 + \quad e^2\,x + g\,e^2 \\ \quad + \quad g\,..\ -2\,eg\,.. \end{array}$$

Unde conferendo positis duabus incognitis, d et f, et tertia g, fiet: $g \sqcap c + 2e$. et $d \sqcap \frac{e^2 - 2ec - 4e^2}{a}$. et $f \sqcap \frac{ce^2 + 2e^3}{a^2}$.

Finge jam loco aequationis propositae aliam dari duarum incognitarum determinandam ad duas radices aequales, ponendoque a esse incognitam alteram, alias y. et praeterea $cx^2 + fa^2 - la^2$ exprimi per pa^2 incognitam$_{[,]}$ l autem esse notam, f et per consequens p quaeri: fiet aequatio: $x^3 * dax + la^2$. conferenda cum $x^3 * 3e^2x + 2e^3$ fiet $- pa^2$

$d \sqcap \frac{3e^2}{a}$, et $p \sqcap {}^{-2e^3}$ [*bricht ab*]

Coepi ex his dubitare an duabus collationibus separatis possit determinari aequatio duarum incognitarum ad duas cujuslibet radices aequales. Sed resumo animum cum video aliter eam explicari non posse; nam de altera quae adest incognita, non dici potest eam continere alteram; itaque incognitarum unius vel plurium portiones tantum in

---

3 *Zu* $\frac{s}{a}y + h + e \sqcap 0$: NB. non y, sed $\frac{s}{a}y$.

3 per *(1)* in *(2)* | $\frac{s}{a}$ *erg.* | y *L* 3 fiat *(1)* aeqvalis *(2)* comparabilis *(3)* superior *L*

16 f. determinandam | ad duas *streicht Hrsg.* | ad *L*

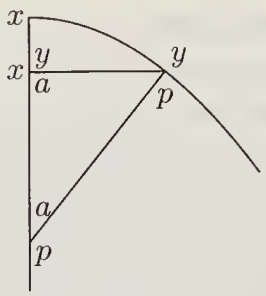
una indeterminata quam quaerimus latent quod nihil nocet, cum nec noceat in unius incognitae aequationes incognitam ingredi valorem quaesitae.

Sed tamen ut ejus rei fiam certus, sumam aequationem duarum incognitarum duas habentem radices aequales methodo mea prima factam; vel factam conferendo cum tali una collatione, et postea videbo an idem ex ea elici possit collationibus duabus. Quod si fieri potest malim uti duplici collatione, cum ea videatur esse universalior. Potest enim radix aliqua duarum incognitarum duas habens radices aequales dividi posse non per hujus tantum $x + \frac{l}{a}y + m$ quadratum; sed etiam per quadratum aliud v. g. hujus: $x + \frac{n}{a^2}y^2 + r$. et hujus $y + \frac{q}{a^3}x^3 + s$ qui et tam satisfit proposito si per has duas quadratas $x + \frac{n}{a^2}y^2 + r$, et $y + \frac{q}{a^3}x^3 + s$ separatim dividi eadem aequatio possit, quam si per $x + \frac{l}{a}y + m$ quadratam. Utroque enim modo utraque incognita duas habet radices aequales.

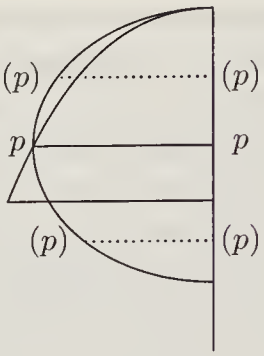
A l t e r a d i f f i c u l t a s est in his separatis collationibus, quod vel non satis incognitarum est, vel plus satis. Nam cum non nisi una detur quaerenda, v. g. p. hinc si una collatione determinabis, nihil habebis, quod agas altera collatione; sin novis adhibitis arbitrariis vel multiplicando vel explicando; eam serves; nulla ratio est cur similes novas arbitrarias non adhibeas, etiam in posteriore collatione; explicando alteram incognitam vel aequationem multiplicando; Respondeas quidem, non adhiberi quia non est opus. Sed regero: Quid si adhiberentur unde id liceatur: Sequereturne impossibile; non utique: Itaque potest haec aequatio ad duas determinari duarum incognitarum radices aequales; ne ulla quidem Terminorum ejus explicatione. Responderi itaque hoc loco potest; si explicando augeas. Sed hae aliaeque id genus difficultates evanescent credo quando ventum erit in rem praesentem: Nam sumendum est ut dixi exemplum, ubi res succedit simplici collatione, et videndum an etiam duplici. Explicationibus non puto fidendum.

Caeterum ne obliviscar admoneo, si aliter exitus non appareat, videndum esse an aliquid detegere liceat jungendo duas diversas aequationes repertas, ad duas tangentes aequales determinandas inter se, cum ubique eadem futura sit tam x, quam y. aut cognitam habitura relationem ex duarum scilicet quadraturarum principio, ex eodem pendentium. Sed malum in eo est, quod p utrobique reperitur diversa. Itaque si auges numerum aequationum augebis etiam numerum quaerendarum.

1 una *(1)* cognita *(2)* indet *(3)* indeterminata *L* 2 incognitam | puto *gestr.* | ingredi *L* 15 cur *(1)* easdem *(2)* similes *L* 25 duas *(1)* methodos *(2)* diversas *L* 28 qvod *(1)* aliqva reperitur incognita *(2)* p utrobiqve *L*



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Quaeramus ergo an possibile sit comminisci casum, quo duae diversae p eandem semper servent rationem inter se invicem; ita enim res redibit ad unicam, poteritque tunc eliminari ipsa p omnino, jungendo has duas aequationes inter se; deinde manifestum est illud quoque, diversas illas p, diversarum figurarum, aliquando coincidentibus x, diversis licet aa datis, quia sygnotis; ipsis autem yy quaesitis rationis vel relationis cognitae invicem existentibus; aliquando coincidere debere, nam si eas applicando ad abscissas figuram inde facias, eae diversae figurae se invicem secabunt. Et tunc coincident illae p. Quod si ergo calculo aliunde inveniri potest, quando ipsae p debeant coincidere; et quod si inveniri poterit geometrice ejus arcus ratio ad circumferentiam; e. g. in circulo, inde sequitur tetragonismus.

Quaeritur ergo si sint

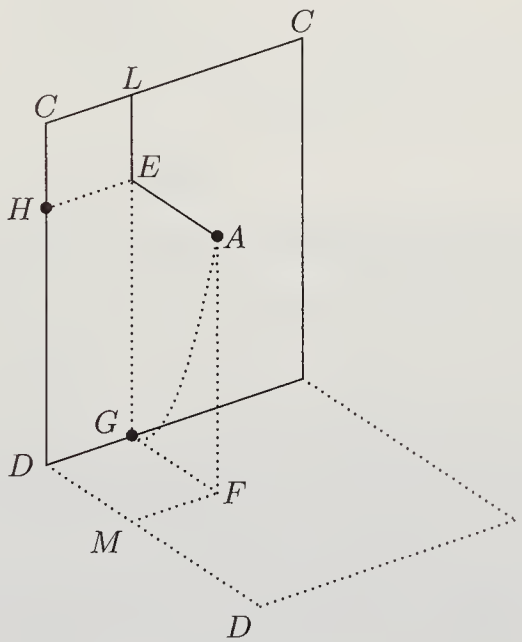
$$\begin{array}{lll} & \text{☽} & \text{☿} \\ \dfrac{mx^2+nx+q+r\sqrt{tx+v}}{fx+g} & \square, + \ y^2 & \sqcap \ p^2 \\ & \odot & \text{♀} \\ \text{et} \quad \dfrac{bx^2+cx+d\ldots\ldots}{vx+g} & \square, + \psi y^2 + \chi y + \Omega & \sqcap (p^2). \end{array}$$

possitne casus reperiri, quo summa prior aequalis est posteriori; aut rationem ad eam habet datam; sane si fieri possit ut sit ut ☽ ad ⊙; ita ☿ ad ♀; etiam summae p^2, et (p^2) rationem habebunt datam; idem est, si casus saltem aliquis eveniri possit specialis, ut

5 qvoqve, *(1)* | ipsam *streicht Hrsg.* | p *(2)* diversas *L* 11 seqvitur *(1)* qvadratu *(2)* tetragonismus *L* 12 f. sint *(1)* $\sqrt{a^2+x^2+y^2}$, et $\sqrt{e^2+\frac{b}{a}y^2}$, an ignoratis licet *(2)* ☽ *L* 16 $+\Omega$ |, □ *streicht Hrsg.* | ⊓ (p^2) *L*

positis ☽ et ⊙ aequalibus vel datae rationis, sint etiam ☿ et ♀ aequales vel datae rationis, eo casu etiam p erunt aequales vel datae rationis. Praeterea fieri potest semper ut ☿ et ♀ sint aequales. Quare quo casu ☽ et ⊙ aequales, quod alicubi fiet infallibiliter si earum curvae se secant, ibi etiam ipsae p. coincident. Cum ergo inveniri possit ipsa x, in qua ☽ et ⊙ coincidant, erit x determinata. Cumque duae restent aequationes: ☽ + ☿ ⊓ p^2; et ☽ (⊓ ⊙) + ♀ ⊓ (p^2) nondum video tamen quid inde duci possit. Sed si ponas etiam ☿ et ♀ aequales, malum est quod pro duabus aequationibus non habes nisi unam:

Quicquid sit, certe, si sint duae superficies, ad quas sint duae aequationes datae, in quibus y sint utrobique eaedem, uti hic fit, et sumta postea x aequali, quae intersectio harum duarum superficierum dabit eritque p, in harum duarum superficierum intersectione communi. Adhibenda ergo est tertia superficies, ubi cum sit tertia p, erit omnium p concursus in intersectione trium superficierum.

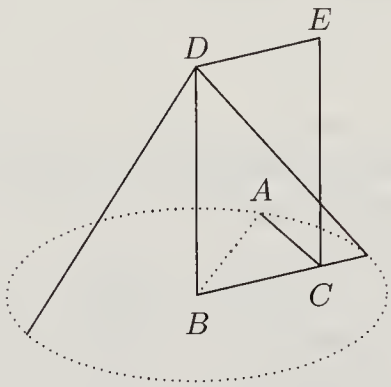


[*Fig. 3*]

Ponatur superficiei curvae punctum esse in sublimi puncta autem omnia superficiei curvae ad planum pariter C. et D. referri, perpendiculari AE ad planum C, et perpendiculari AF ad planum D. Quod si separata aequatione explicari potest relatio AE ad CH vel ad LE; et alia relatio ipsius AF, ad DG vel MF fient quidem quatuor incognitae, sed tantum duae aequationes. Sed nec nisi Curva hoc modo describetur, sed solida. Sed inqui-

7 pro *(1)* una aeqvatione habes duas; *(2)* duabus L

rendum est in illa loca, in quibus unica est aequatio, et qua ratione harum superficierum descriptionem concipere liceat. Varietates omnium optime credo sic describi possunt[:] Fingatur in plano moveri aliud planum ei instar tabulae incumbens puncto quodam certam lineam describente cui omnia alia puncta parallela semper moveantur, posito scilicet illo plano caetera immobili. Huic tabulae insistat aliud planum, angulo quolibet, cujus extrema desinant in figuram quamlibet, quod planum vario rursus angulo motuque procedat.



[*Fig. 4*]

In superficie conica relatio puncti alicujus ad axem haec:

Esto $BD \sqcap x$, erit $BA \sqcap \frac{d}{a}x \sqcap z$. Et AC vocando ω, BC autem vocando y, fiet $y^2 + \omega^2 \sqcap z^2$, quarum duarum aequationum ope eliminando z, fiet: $y^2 + \omega^2 \sqcap \frac{d^2}{a^2}x^2$, quae est aequatio ad superficiem Conicam. In cylindrica cum sit $z \sqcap a$, fiet aequatio: $y^2 + \omega^2 \sqcap a^2$ aequatio ad superficiem Cylindricam; Eadem methodo omnium Conoeidum aequatio habetur, ut sphaerae; cum sit $\sqrt{2ax - x^2} \sqcap z$ fiet: $y^2 + \omega^2 \sqcap 2ax - x^2$. In omnium ergo Conoeidum superficiebus $y^2 + \omega^2$ sunt constantes; et aequantur quadrato applicatae figurae circumactae, ubi tamen notandum si id quadratum non sit rationale, fieri posse, ut aequatio mutet formam, ut si sit $z \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + a$. Illud quoque notandum

---

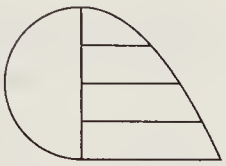
17 *Am Rande:* Erravi.

1 qvibus *(1)* duae sunt aeqvationes *(2)* unica *L* 9 superficie *(1)* conoeidis *(2)* conica *L* 15 ergo *(1)* Sphaeroeidum *(2)* Conoeidum *L*

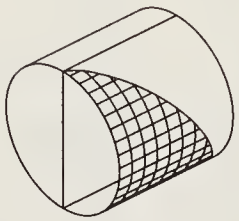
---

17 mutet formam: Die modifizierte Gleichung beschreibt nicht ein Konoid, sondern einen Torus. Leibniz vermerkt den Irrtum am Rand.

est fieri posse, ut in aequatione z ad x referente, ipsius z valor nequeat haberi pure; eoque casu, non poterit una aequatione explicari natura superficiei conoeidis illius. Haec faciunt ut credam omnes aequationes per naturam rerum reddi posse puras, nec referre an impossibiles quaedam in speciem enuntiationes intercurrant.



[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

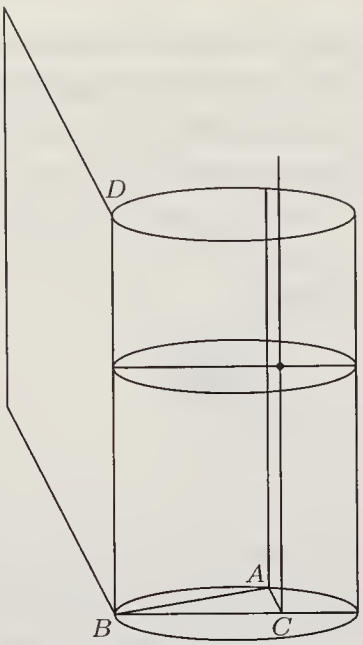
Ductus figurarum in figuras nihil aliud sunt quam portiones abscissae a figura ex cylindro alterius figurae: Igitur superficies ductus figurae in figuram est portio superficiei cylindricae. Unde patet aliud fieri solidum, prout modo unum modo alterum ⟨—⟩etur. Etsi ⟨a⟩reae portionis absectae a figura priore ex cylindro po⟨steri⟩oris aequentur, portioni absectae a figura posteriore ex cylindro prioris.

Ut generaliter naturam Superficiei Cylindroeidicae investigemus ponatur $BD \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $AC \sqcap z \sqcap$ v. g. $\sqrt{2ax - x^2}$, et fiet $z^2 \sqcap 2ax - x^2$. Porro relatio ipsius BC est ad DB, ea quae videtur in rectangulo apposito, quae nulla aequatione exprimi potest, nisi hac forte: $\frac{xa}{x} \sqcap y$. Hinc patet superficies cylindricas non cadere sub aequationem[,] non magis quam rectangulum[,] fiet enim $y \sqcap a$. in rectangulo. Sed cum tamen supra superficiei cylindricae cujus basis circulus assignata sit aequatio, quidni possit cum basis est alia figura. Sed facile est tamen videre differentiae rationem; certumque est istam conditionem in nullam aequationem intrare posse. Investiganda est omnis generis natura superficierum curvilinearum, quales aliquae de quibus memini ratiocinari Robervallium, ut ex eo refert P. Mersennus in opticis posthumis. Eademque opera modus apparebit eas describendi,

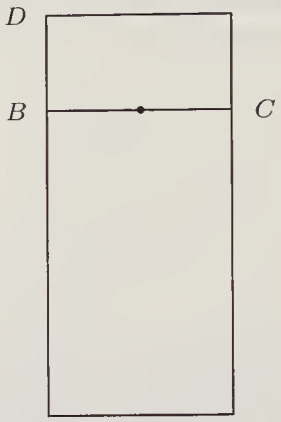
2 conoeidis *(1)* hoc modo, sed altera ex incognitis ω, vel y, (qvod et semper fieri potuisset) erit eliminanda: ut *(2)* illius *L* 10 absectae *(1)* ex figura altera *(2)* a figura posteriore | a *ändert Hrsg.* | cylindro *L*

5 *Fig. 6*: Die Figur ist flüchtig skizziert und in der oberen Hälfte durch Papierverlust beschädigt.

8 patet: Die Behauptung ist nicht richtig. 12 $\sqrt{2ax - x^2}$: Es müsste $\sqrt{2ay - y^2}$ heißen.
19 Robervallium: M. MERSENNE, *L'optique et la catoptrique*, 1651, S. 117, erwähnt geometrische Studien von G. P. de Roberval („Nostre Geometre“) zu Oberflächen von Brennspiegeln.



[*Fig. 7*]



[*Fig. 8*]

ut propositam aequationem resolvendo in duas; fieri potest; v. g. pro $y^2 + \omega^2 \sqcap \frac{d^2}{a^2}x^2$, ponendo $y^2 + \omega^2 \sqcap z^2$, et $z \sqcap \frac{d}{a}x$. Ecce artificium describendi; et videndum an non idem fieri possit in lineis curvis simpliciter, v. g. $2ax + x^2 \sqcap y^2$, ponendo: $2a\not{x} + x^{\not{2}} \sqcap \not{z}z$. Sed rectu⟨s⟩ in his usus analogiarum? Sed haec pertinent ad Characteristicam Geometricam quam molior.

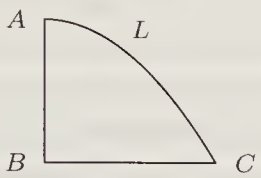
Nunc ad rem nostram ut redeam; si intersectione trium superficierum determinari possunt omnes quadraturae; sequetur puncta quaesita, ipsas scilicet y et p determinari per intersectiones duarum linearum curvarum in solido, quia duarum superficierum intersectio communis est line[a] ejusmodi, et trium superficierum intersectio communis est duarum intersectionum, id est duarum ejusmodi curvarum intersectio communis. Curvae autem istae ex earum sunt genere quas considerat Cartesius sub libri 2^di *Geometriae* finem, ut etiam Geometricas sive Analyticas et recte.

---

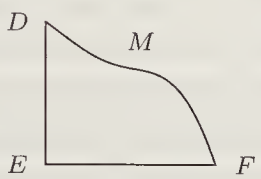
6 molior: vgl. z. B. *Characteristica geometrica*, VII, 1 N. 9. 12 considerat: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 65 f.

Habemus ergo tria media analytica Quadraturarum, 1mo per differentias, 2do per collationes diversarum quadraturarum, 3^{tio} per methodum Tangentium inversam. Collatio autem diversarum quadraturarum dat hos quod dixi ad superficiem locos. Notandum est, si sit aliquando ☽ ad ☉ ut ⟨☿ ad⟩ ♀ eodem modo fore p^2. ad (p^2). Sed nullum hinc video usum.

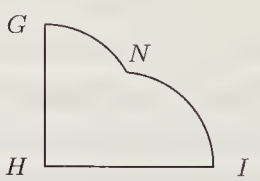
Verissimus horum novissime dictorum, de superficierum intersectione usus hic est: Sunto tres figurae



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]



[*Fig. 11*]

in quibus AB, DE, GH aequalibus etiam BC, et EF, et HI, sint aequales; et praeterea areae figurarum seu portionum, $ABCLA, DEFMD, GHING$ aequales; ajo intersectione trium superficierum curvilinearum definiri rectam, cujus semiquadratum sit areae propositae aequale. Nam ☿ erit ▭ ♀ ▭ y^2 ex hypothesi, quia areae figurarum aequales ergo et $\frac{y^2}{2}$ areae in omnibus aequale, ergo et y^2 utrobique locum habebit[,] erunt enim tres aequationes:

$$\begin{array}{lllll} ☽ & + & y^2 & ▭ & p^2 \\ ☉ & + & y^2 & ▭ & p^2 \\ ♂ & + & y^2 & ▭ & p^2 \end{array}$$

Porro ☽, ☉, ♂ explicatae dant varias affectiones ipsius x, v. g.

$$\begin{array}{lll} ☽ & ▭ & nx + f, \square \\ ☉ & ▭ & tx^2 + gx + h, \square \\ ♂ & ▭ & rx^3 * + qx + \sqrt{a^2 - x^2}, \square, \end{array}$$

pone jam naturam harum formularum, ☽, ☉, ♂, ferre, ut certa quadam ex ipsis x infinitis electa fiant, ☽, ☉, ♂ aequales. Jam y sunt aequales ex hypothesi erunt ergo et p aequales;

13 $\frac{y^2}{2}$ *(1)* | aeqvale *streicht Hrsg.* | *(2)* areae *L*

Jam hae tres aequationes sunt ad superficiem; $☽+y^2 \sqcap p^2$. seu $n^2x^2+2nfx+f^2+y^2-p^2 \sqcap 0$. est aequatio ad superficiem cum sit trium indeterminatarum; idemque est de caeteris; descriptis ergo his tribus superficiebus relatione ad easdem directrices facta; seu super iisdem planis eodem modo positis, id est initio communi, et in easdem partes; uno vel uniformi motu; intersectio earum communis dabit punctum, unde in planis dirigentibus demissa perpendicularis, erit y quaesita.

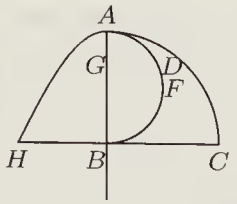
Tantum admonendum est, an spes sit istas superficies describi posse, nec despero, cum sint analyticae, et habeant multam similitudinem cum conoeidicis. Nam si aequatio esset: $n^2x^2+2nfx+f^2-y^2-p^2 \sqcap 0$ foret aequatio ad superficiem conoeidicam, sed quia y^2 affirmatur et p^2 negatur, ideo mutanda erit nonnihil describendi ratio. Differentia ⟨san⟩e qualis inter Hyperbolam et circulum. Ut si ba⟨sis⟩ recta BA in figura quam s⟨upra⟩ de superficiebus conoeidibus descripsi, (⟨ead⟩em ⟨enim⟩ Ordinata generatricis) non circuli radius, sed semilatus rectum sive rad⟨ius⟩ hyperbolae circularis esse intelligatur. Hinc illas superficies appellare placet Anticonoeides.

Cogitandum est an casum excogitare liceat duarum aequationum, ad duas incognitas, problemate proinde existente definito, ita ut duarum locorum intersectione solvi possit, ita tamen ut duabus aequationibus inter se junctis non liceat eliminare alterutram incognitarum; quod si hoc impossibile est, videndum est an non etiam semper duae eliminari possint incognitae tribus datis aequationibus ad tres incognitas; sane si id non licet recta ope harum duarum aequationum, licebit forte componendo duas inter se, novamque inde faciendo, ita ut tandem destrui possint duae incognitae. Sed non puto id successurum. Idem est etsi quatuor imo mille hujusmodi aequationes dentur. Quare ad tollendas hac methodo omnes incognitas praeter unam forte utile erit inveniri alias tres aequationes, in quibus y non quidem eadem, attamen datae rationis. x autem semper intelligi potest eadem, etsi ⊙ et ☽ illarum trium aequales inter se. Cum ⊙ et ☽ priorum trium non coincidant, ita primum poterunt eliminari y. et x. variis aequationum compositionibus; ac postremum quia duae restabunt p inter se diversae, alterutra earum tolli poterit, ita ut non nisi unica restet, per certas literas, ut a, b. explicata. De qua methodo in circulo non despero, sumendo duas figuras quadranti inscriptas vel circumscriptas, et alias semicirculo; illas quadranti has semicirculo aequales.

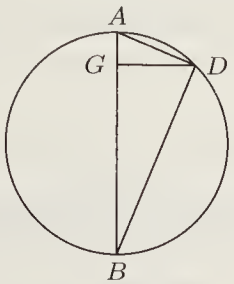
Notandum est, ejusmodi aequationes tres trium incognitarum, ex quibus tamen non possint incognitae quaedam tolli, intersectione Conoeidicarum superficierum posse solvi.

---

11 figura: s. o. Fig. 4.



[*Fig. 12*]



[*Fig. 13*]

$\frac{BD}{GD} \sqcap \frac{AB}{AD}$. Ergo
$BD \frown AD \sqcap GD \frown AB$.

Nota unam jam figuram habemus quadranti ABC aequalem ejusdem cum eo altitudinis et basis, homogeneam scilicet chordarum AD, DB, et aliarum ductui in se invicem. Nam ductus ille aequatur [semi]circuli AFB cylindro sub AB. Quare ductus ille per AB dabit figuram $HBAH$, basi altitudine, area, semicirculo AFB aequalem, ac proinde quadrantis $ABCA$ dimidium. Dimidium, non ergo aequalem. Ergo me falsum video, credo substituta quadam Ellipsi rem forte expediri posse, sed dubito.

6 per *(1)* AD divisus *(2)* AB *L* 7 area, *(1)* | qvadranti, *streicht Hrsg.* | *(2)* semicirculo *L*

3 *Fig. 12*: Das Innere des Halbkreises $ABFA$ ist durch Tintenfraß verloren. Die noch erhaltenen Punktbezeichnungen G und D lassen vermuten, dass darin die in Fig. 13 in größerem Maßstab ausgeführte Konstruktion enthalten war.

8. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PER AEQU. DUARUM RADICUM AEQUALIUM

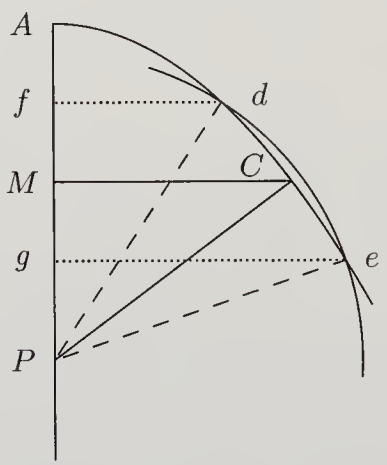
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 162–163. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 839

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist sowohl für Oktober 1674 wie für den Zeitraum Oktober – November 1675 belegt. Der erste Satz des vorliegenden Stückes bezieht sich wahrscheinlich auf N. 7, dat. Oktober 1674 (vgl. die Erl. zu N. 7_1 S. 63 Z. 14), sowie auf die Studie *De serierum summis et de quadraturis*, dat. Oktober 1674 (VII, 3 N. 38). In letzterer wird die Bemerkung von S. 104 Z. 1–4 aufgegriffen und modifiziert (VII, 3 N. 38_6 S. 427 Z. 7–11), daher dürfte N. 8 ebenfalls im Oktober 1674 entstanden sein.

De Methodo tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium

Multa proxime disserui de Analytica ratione inveniendi summas serierum, sive de methodo tangentium inversa. Breviter ad intellectum necessaria repetam:



[*Fig. 1*]

12 f. De ... aeqvalium *erg. L*

16 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Vorlage die Punktbezeichnung *C* zweimal angeschrieben. Die Schnittpunkte des Kreisbogens mit der Kurve hat er zunächst beide mit *d* bezeichnet, die Bezeichnung des unteren Punktes dann in *e* geändert. Vgl. die Figur in R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44.

Esto linea AC, cujus omnia puncta referantur certo quodam modo ad rectam AP, sumto in ea puncto quolibet C, sit perpendicularis CP, ordinata MC. abscissa AM. Appellemus cum Cartesio $AM \sqcap y.$ $MC \sqcap x.$ $PC \sqcap s.$ $PA \sqcap v.$ erit $PM \sqcap v - y.$ et $s^2 - v^2 + 2vy - y^2 - x^2 \sqcap 0$. Ecce quatuor indeterminatas; quod si jam data lineae AC, natura ac descriptione, sive data ordinatarum MC progressione[,] quaeratur modus ducendi ipsas PC. ad punctum datum C, seu si quaeratur punctum P. tunc utique dabitur aequatio alia duas tantum continens incognitas $x.$ y quarum alterutra ex aequatione quatuor indeterminatarum eliminari poterit. Et residua x (aut y) erit duplicis valoris, ac per Methodum Tangentium conferendo cum simili duas habente radices aequales reperietur.

Si vero ex dato puncto P, quaeratur punctum C, seu si data sit progressio ipsarum MP, non vero ipsarum MC, item si data sit relatio ipsarum PM ad MC, (id est ut aliqui ostendi, si datae cujusdam progressionis quaeratur progressio summatrix) quae est species methodi Tangentium inversae, tunc manifestum est, duas restare indeterminatas, quarum utraque sit duplicis valoris, nempe $x.$ et $y.$

Caeterum, quod dixi quatuor esse incognitas, sciendum est, tamen, reapse non nisi tres esse: quia si ex una harum, $x.$ $y.$ s, vel $x.$ $y.$ v, sumta, duae reliquae inveniri possint, tunc etiam, quarta poterit inveniri. Notandum tamen quod non viceversa ex inventis $x.$ $s.$ v, sumta earum una, quarta y queat inveniri. Quare considerandum est, si data sit aequatio, in qua incognitae s, et v, vel $y.$ $s.$ v, vel $y.$ v, vel $y.$ s, vel $x.$ $y.$ s, aliisve combinationibus contineantur, an alteram indeterminatarum primariarum, $y.$ et $x.$ elidere liceat. Sane si PC non perpendicularis esset, sed curvam, descriptus circulus ex centro P, secaret in duobus punctis $d.$ $e.$ tunc si esset aequatio continens rectas $x.$ $y.$ $s.$ v, in qua ex data s, aliisque aequationibus reliquae quaererentur, utique reliquae omnes prae-

2 sit *(1)* tangens C *(2)* perpendicularis *L* 5 descriptione, *(1)* sive data aeqvatione, qv *(2)* sive *L* 8–10 Et ... reperietur *erg. L* 16 Caeterum, *(1)* qvod reliqvas duas attinet incognitas, s, et v, tunc sciendum est, ex datis *(2)* qvod *L* 17 esse: *(1)* semper *(2)* reapse *(3)* qvia *(a)* inventa s *(b)* inventis x. *(c)* si *L* 23 punctis d. *(1)* d. *(2)* e. tunc si *(a)* ope rectae Pd $\sqcap$ *(aa)* PE. *(bb)* Pe. una *(b)* esset *L*

3 cum Cartesio: *a. a. O.*, S. 40 f. Leibniz gibt in der Folge eine Zusammenfassung der cartesischen Normalenbestimmung; vgl. *a. a. O.*, S. 40–49. 13 aliqui: s. *Methodus tangentium inversa seu De functionibus* (VII, 4 N. 40_4 S. 710 Z. 13–18). 22 PC non perpendicularis: vgl. DESCARTES, *a. a. O.*, S. 43–45.

ter $s.$ duos haberent valores, eosque inaequales; sed si circulus centro P, radio PC, vel PE descriptus tangeret in $C.$ tunc duo valores indeterminatarum, $x.$ $y.$ $v.$ futuri essent aequales: quod si jam detur aequatio duas tantum continens indeterminatas $x.$ et $y.$ ut in methodo tangentium ordinaria, tunc altera earum, v. g. $x.$ eliminetur; restabit aequatio tres continens incognitas, $y.$ $v.$ s, ex quibus duae $y.$ et v, habent duos valores aequales; tertia non nisi unum. Sufficit tamen solam y, poni ut radicem aequationis incognitam, duorum valorum aequalium, et quaeri valorem ipsarum v, et s ope aequationum collatitiarum, tunc enim si ex sumta $y.$ inveniatur $s.$ vel v, distinguendum est: nam si ex sola y, invenitur, s, et supra, ex $y.$ et s, habebatur x, tunc ex sola y, habetur $x.$ Idem est si ex sola y habeatur v, et ex $y.$ et v, ⟨ut⟩ supra habeatur $x.$ Sed si aequationum collatitiarum una non det, s vel v ex sola y, sed s ex y et v, vel v ex s et $y.$ vel si ea detur pure, quae tamen cum y ad x non concurrit, tunc exitus tamen semper apparebit ob duas aequationes collatitias, semper in promtu positas.

Etsi notabile sit, si quid maxime in hac materia duas aequationes collatitias sibi consentire et plerumque unam earum sufficere; casus tamen evenire posset, quo foret forsan opus utraque, si scilicet ut dixi neutra per unam pure haberi possit. Sufficit ergo unam y pro incognita sumi duos habente valores aequales, et hoc ipso alteram earum, nempe vel $s.$ vel $v.$ elidi, unde reliqua pure habebitur, quod sufficit ad x quoque pure habendam: resumamus ergo.

Aequatio est generalis quatuor indeterminatarum: $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$. Ponatur $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{\frac{a^2\beta}{y^2}}{\beta}, [\sqcap] \frac{a^2}{y^2}$, posita scilicet $\beta.$ infinite parva, fiet $x \sqcap \frac{y^2v - y^3}{a^2}$. et $x^2 \sqcap \frac{y^4v^2 - 2y^5v + y^6}{a^4}$ fietque: $s^2a^4 - v^2a^4 + 2vya^4 - 2y^2a^4 - y^4v^2 + 2y^5v - y^6 \sqcap 0.$ vel

1 PC, | vel PE, *streicht Hrsg.* | vel *L* 3 inaeqvales *L ändert Hrsg.* 7 aeqvalium, *(1)* qvia ipsa y, inventa, etiam v, invenitur. *(2)* et *L* 8 enim *(1)* inventa v datur et s *(2)* si ex *(a)* data y, *(b)* sumta *(aa)* x, v *(bb)* y. ... vel v, *(aaa)* non ideo habebitur *(aaaa)* y *(bbbb)* x ex sola y. qvia *(bbb)* distinguendum *L* 20 $- 2y^2$ *(1)* $- c^2$ *(2)* $- x^2$ *L*

1 f. *PC*, vel *PE*: Gemeint sind *Pd* bzw. *Pe*. Leibniz verwendet irrtümlich die Bezeichnungen der Figur von Descartes, *a. a. O.*, S. 44. 20 $- 2y^2$: Leibniz hat die allgemeine Gleichung zunächst mit dem Wert $x^2 = y^2 - c^2$ angesetzt und dann vergessen, den Faktor 2 vor y^2 zu streichen. Die fehlerhafte Gleichung wird bis zum Ende des Stücks verwendet.

$$y^6 - 2vy^5 + v^2y^4 * + 2a^4y^2 - 2va^4y + v^2a^4 \sqcap 0.$$
$$- s^2a^4$$

Multiplicetur per numeros progressionis Arithm.

6 5 4 3 2 1 0

fiet $3y^5 - 5vy^4 + 2v^2y^3 * + 2a^4y - va^4 \sqcap 0.$ $3y^2 - 5vy + 2v^2,, \frown y^3, +_{\iota} 2y - v_{\lrcorner} \frown a^4 \sqcap 0.$ 5
sive $y^2 - 4vy + 2v^2, \frown y^3,, + 2y - v, \frown a^4, + 2y - v, \frown y^4, \sqcap 0.$

---

6 *Nebenbetrachtung:* $\frac{2y - v, \frown -2v + y^2}{2y - v}$ fiet: $-2v + \frac{y^2}{2y - v}$. Unde divisione facta fiet: $-2v + \frac{y^2}{2y - v}, \frown y^3,, + a^4 + y^4$ vel $\frac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v} + a^4 + y^4, \sqcap 0$ vel restitu-

1–101,8 $\sqcap$ 0. | multiplicetur ... Arithm. *erg.* | 6 ... 0 | fiet ... inqvisitione. *erg.* | restabit *L*

$$- \frac{vy}{2}$$

7 *(1)* 2y − v, ⌢ −2v− *(2)* ~~y^2~~ − 4vy + 2v² ∮ $\frac{y}{2}$

~~$2y - x$~~

$\frac{10vy + 4v^2}{2}$ vel ⟨—⟩ vy+ 4v² ∮ ⟨2v⟩
2y − v

$$+ \frac{vy}{2}$$

(3) ~~y^2~~ − 4vy + 2v² ∮ $\frac{y}{2}$

~~$2y - x$~~

$\frac{-8vy + vy}{2}$ seu $\frac{-7vy + 4v^2}{2}$ ∮ $-\frac{7}{4}$v Ce qvi fait: *(a)* y *(b)* $\frac{y^2}{2}$
2y − v

(4) $\frac{y^2 - 4vy + 2v^2}{2y - v)\ \frac{y}{2}}$ *(5)* 4y (2y + v *(6)* $\frac{2y - v, \frown -2v + y^2}{2y - v}$ *L*

---

8 $\frac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v}$: Konsequent wäre $\frac{-4vy + 2v^2 + y^2 \frown y^3}{2y - v}$. Leibniz setzt zwar mit dem Ausdruck von Z. 6 fort, ihm unterlaufen jedoch weitere Flüchtigkeitsfehler. Die abgebrochene Nebenbetrachtung geht nicht in die weitere Überlegung ein.

Seu $s^2 - {}_{\llcorner\llcorner}v - y_{\lrcorner}\square_{\lrcorner} - y^2 - {}_{\llcorner\llcorner\llcorner}v - y_{\lrcorner}\square_{\lrcorner} \frown \frac{y^4}{a^4}{}_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \sqcap 0$ unde post multiplicationem Arithmeticam, fit: $2va^4 - 2ya^4, -{}_{\llcorner\llcorner\llcorner\llcorner}v - y_{\lrcorner}\square_{\lrcorner\lrcorner} \frown y^3{}_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \sqcap 0$ et divisis omnibus per $v-y$, fiet $2a^4 - vy^3 + y^4 \sqcap 0$. Ergo $v \sqcap \frac{2a^4 + y^4}{y^3}$. Jam supra $v \sqcap \frac{xa^2 + y^3}{y^2}$. Ergo $xy \sqcap 2a^2$. Quod praeclare perfecteque successit; constat enim et dudum a me via synthetica deprehensum est, differentias applicatarum hyperbolae esse homogeneas applicatis hyperbolae secundi gradus. Video ergo hac methodo exitum egregie reperiri.

Miror tamen id processisse, cum sit neglectum a me aliquid nempe multiplicatio reliquorum terminorum per 1. 2. 3. 4. 5. 6. An forte quod aequatio jam continet duas

---

tis omnibus:

$$v^2 - 5y^4v + \frac{25y^8 + 10a^4y^4 + a^8}{4y^6} \sqcap \frac{-y^5 - 2a^4y - 2y^5}{y^3}, + \frac{25y^8 \text{ etc.}}{....}$$

$$\frac{-\ a^4 \ldots}{y^3}$$

fietque $v \boxed{\frac{-5y^4 - a^4}{2y^3}} \sqcap \frac{\sqrt{+22y^8 + 8a^4y^4 + a^8} + 5y^4 + a^4}{2y^3}$. Jam supra $v \sqcap \frac{xa^2 + y^3}{y^2}$.

Ergo $2xy \sqcap \sqrt{\ldots} + \underbrace{5y^4 - y^4}_{4y^4} + a^4$

$$\frac{\sqrt{16y^8 + 8a^4y^4 + a^8 + 6y^8}}{4y^4 + a^4} \quad [\textit{bricht ab}]$$

6 *Am Rande:* (Error fuit.)

8 aeqvatio *(1)* | qvae *streicht Hrsg.* | in *(2)* jam *L*

---

1 f. Seu ... 0: Leibniz setzt bei der folgenden Gleichung, die durch Hinweisstrich mit S. 99 Z. 1 f. verbunden ist, noch einmal mit einer Multiplikation gemäß dem Huddeschen Verfahren an, führt diese jedoch nicht korrekt aus, was er später selbst erkennt. 2 fit: Die Rechnung ist nicht richtig durchgeführt, wie Leibniz anschließend selbst bemerkt. 4 deprehensum: vgl. VII, 4 N. 44 S. 756 f.

radices aequales, ut est residua illa, (etiam ablato $v^2a^4 - s^2a^4$,) ut opinor, quia v, pariter et y, sunt duplicis valoris; sed res excutienda accuratius.

$\frac{2a^2}{y} - \frac{2a^2}{y+\beta} \sqcap \frac{2\beta a^2}{y^2+\beta y}$. Forte priore illa via absolute habetur summa, ut numeris quoque applicari possit, fiat enim data series summanda $\frac{\beta a^2}{y^2}$, non $\frac{2\beta a^2}{y^2+\beta y}$. etsi in Geometria $\frac{\beta a^2}{y^2}$, et $\frac{\beta a^2}{y^2+\beta y}$. aequivaleant. Illud interim miror seriem summandam fuisse: $\frac{\beta a^2}{y^2}$, et tamen neglectis multiplicationibus per arithmeticam progressionem reperiri quod fuisse deberet $\frac{2\beta a^2}{y^2}$ quae omnia opus habent exacta inquisitione.

Restabit aequatio in qua duae tantum supererunt incognitae v, et y, habebiturque valor ipsius v. absolutus, per y. Quo valore v, in aequatione $x \sqcap \frac{y^2v - y^3}{a^2}$ substituto habetur x ope solius y, id est descriptio curvae quaesita.

Eadem methodo sit aequatio: $\frac{2a^3}{a^2+y^2}$, $\boxed{\text{vel } \frac{2y^2a}{a^2+y^2}}$ cujus series si summari posset daretur Tetragonismus, ut alibi inveni: erit $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$, unde

$$x \sqcap \frac{va^2 - ya^2 + vy^2 - y^3}{2a^2}.$$

Unde eodem modo, caetera investigari necessario possunt, semper enim s^2, statim tolli potest.

Videamus jam aliam calculi speciem, si scilicet ipsa $v - y$. simpliciter habeatur, ut si ponamus $v - y$ seu $PM \sqcap \frac{2a^3}{a^2+y^2}$ tunc pro $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$ substitui

5 miror *(1)* summam datam fuisse *(2)* seriem *L* 15 f. potest. *(1)* Facilior est calculus, opinor, *(2)* Videamus *L*

12 inveni: vgl. VII, 4 N. 42, insbesondere S. 733 Z. 20 f. und die zugehörige Erläuterung. 17 $-2y^2$: s. o. Erl. zu S. 98 Z. 20.

potest: $s^2 - \frac{4a^6}{a^4+2a^2y^2+y^4} - y^2 - x^2$, nimirum pro $-v^2 + 2vy - y^2$, seu quadrato, $v - y$ substituendo ejus valorem, sed hoc modo aequatio difficilis resolutu est, idque vel inde judicari potest, quod multiplicando certo modo per arithmeticam progressionem sequitur absurdum et falsum, quod probe notandum et accurate excutiendum. Interea hinc observo, ad caetera investiganda ex datis MP, satius esse mutare quaestionis genus et aliam quaerere figuram, in qua data sint $\frac{MP}{MC}$, unde enim sequetur quaesita; ut alibi deprehendi.

Eadem ergo methodo summam ipsarum $\frac{2a^3}{a^2+y^2}$ investigare utile est; ponatur ergo $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$, fiet $x \sqcap \frac{v-y, \frown \lrcorner a^2+y^2 \lrcorner}{2a^2}$ et $x^2 \sqcap \frac{v-y, \square,, \frown a^2+y^2, \square}{4a^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $s^2 - \lrcorner \square v-y \lrcorner - y^2, - \lrcorner \square v-y, \frown \frac{a^2-y^2, \square}{4a^4}$. Unde abjectis cognitis etc.

Sed ut omnia fiant certiora utar exemplis facillimis ut parabolae. Quaeritur summa omnium $\frac{y^2}{a}$, ponatur ergo $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{y^2}{a^2}$. Ergo $x \sqcap \frac{a^2v-a^2y}{y^2}$ et $x^2 \sqcap v-y, \square, \frown \frac{a^4}{y^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $-s^2 - \lrcorner v-y \lrcorner \square - y^2,,,+ \lrcorner v-y \lrcorner \square,, \frown \frac{-a^4}{y^4} \sqcap 0$. sive, $-s^2y^4 - y^4v^2 + 2vy^5 - y^6 - y^6,, - v^2a^4 + 2vya^5 - y^2a^4 \sqcap 0$. et ordinando:

$$y^6 \; - \; vy^5 \; + \; \frac{s^2}{2} \; y^4 \; + \; \frac{a^4}{2}y^2 \; - \; va^5y \; - \; \frac{a^4v^2}{2} \; \sqcap 0$$
$$+ \; \frac{v^2}{2}$$
$$+2 \quad +1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3.$$

Unde Calculus satis prolixus, sed quid si ipsa v, sumta pro incognita ita fecissemus:

14 fiet: *(1)* $s^2 - v^2 + 2vy$ *(2)* $-s^2$ *(a)* + *(b)* $- \lrcorner v - y \lrcorner \square$ *L*

7 deprehendi: vgl. VII, 4 N. 40_4 S. 710 Z. 13–18. 14 $-s^2$: Leibniz hat den ursprünglich begonnenen Vorzeichenwechsel nicht vollständig rückgängig gemacht und vergessen, das Minuszeichen vor s^2 zu streichen. Im Folgenden müssten $+s^2y^4$ statt $-s^2y^4$ und $+2vya^4$ statt $+2vya^5$ stehen. Die Fehler, zu denen weitere Versehen hinzukommen, beeinflussen die Rechnung bis S. 103 Z. 9.

$$v^2 \left\{ \begin{array}{l} +2y^5 \quad v \; + \text{ etc. } \ldots \\ \underline{+2ya^5} \\ -y^4 - a^4 \end{array} \right.$$
$$2 \qquad 1 \qquad\qquad 0$$

fieret aequatio brevissima: $2v^2 \left\{ \begin{array}{l} +2y^5 \quad v \sqcap 0 \\ \underline{+2ya^5} \\ -y^4 - a^4 \end{array} \right.$ sive $v \sqcap \frac{+y^5 + a^5}{+y^4 + a^4}$, eoque valore ipsius v, in aequatione superiore substituto, fiet: $x \sqcap \frac{\cancel{a^2y^5} + a^7 - \cancel{a^2y^5} - a^6y}{y^6 + a^4y^2}$. Quaeramus jam differentias ipsarum x, fiet: $\sqcap \frac{a^7 - a^6y + a^6e}{y^6 + 6ey^5 + a^4y^2 + 2a^4ey} - \frac{a^7 - a^6y}{y^6 + a^4y^2}$, fiet: $\frac{a^6ey^6 + a^6ea^4y^2 - 6a^7ey^5 - 2a^{11}ey + 6ey^6a^6 + 2a^{10}ey^2}{y^{12} + 2y^8a^4 + a^8y^4}$ quod non video quomodo priori aequationi consentiat, ut proinde necesse sit, subesse quendam in calculo paralogismum.

Experiendum an in methodo communi tangentium liceat non y tantum sed et v, supponere pro incognita duarum radicum; Ex. grat. (Schoten.) pag. 246 aequatio parabolae determinanda ad duas radices est: $y^2 + ry - 2vy + v^2 - s^2 \sqcap 0$. Ordinavit ille secundum $\begin{array}{l} - s^2 \\ + ry \end{array}$ indeterminatam y, ordinemus nos secundum indeterminatam v, fiet: $v^2 - 2vy + y^2$ et comparando cum $v^2 - 2ev + e^2$, fiet $v \sqcap +y$. Quod constat esse falsum, idem eveniret multiplicata aequatione per 2. 1. 0. fiet enim $2v^2 - 2vy \sqcap 0$, sive $y \sqcap v$. Opus est proinde ut rationem cur ista non procedant investigemus. Imo jam invenio videoque ipsam v non esse duplicis valoris, considerata figura Cartesii pag. 44, est enim unica $AP \sqcap v$, at tam AQ quam $AM \sqcap y$.

Et hinc jam etiam videre mihi videor, cur aequatione inventa duarum incognitarum quarum quaelibet duas habet radices aequales, ista forte methodus non procedat, ut de-

19 cur *(1)* | non *streicht Hrsg.* | procedat *(2)* aeqvatione *L*

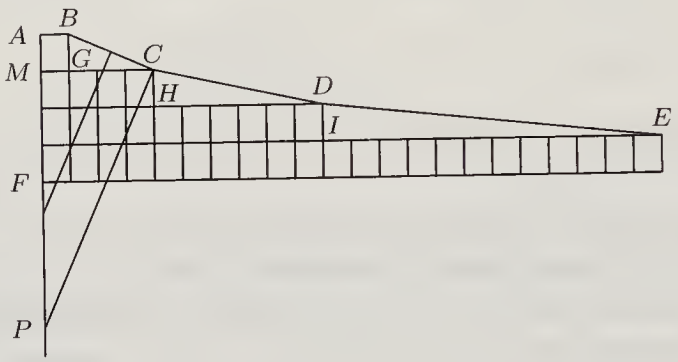
11 Schoten.: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 246. 17 Cartesii: s. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44.

terminetur velut si unam tantum haberet lineam unius significationis; videtur methodus determinandi aequationem trium incognitarum ad duas, ex eo quod in ea duae sunt incognitae duas habentes radices aequales eadem esse cum methodo ducendi planum tangens superficiem curvam datam.

Et sed videtur altera incognitarum duos valores habentium eliminari posse, ope

---

5 *Nebenbetrachtung am oberen Rand der Rückseite:* Vide finem pag. sequentis, ubi vera denique et infallibilis methodus proposita est quae in eo praeterea excellit, quod transferri potest ad numeros.



Nam si quaeritur summa omnium $\frac{a^2}{y^2}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ exempli causa, in numeris tunc quaeritur series polygoni cujusdam seu figurae multilaterae $ABCDEF$, certam regulam habentis, ita differentiae ordinatarum GC, HD, IE, sint progressionis $\frac{1}{y^2}$. Nam considerandum seriem ordinatarum, adjectitiis istis augendam ut polygonum compleatur ac tum demum perpendicularem posse duci, PC. Ideoque ab inventa figura seu serie polygoni, seriem horum triangulorum addititiorum postea subtrahendam, et ita habebitur perfecta numerorum et figurarum conciliatio.

7 deniqve *(1)* ratio *(2)* et *L* 9 $\left(\frac{1}{y^2}\right)$ *erg. L* 11 differentiae *(1)* laterum, GC *(2)* ordinatarum *L*

1–4 videtur ... datam: vgl. VII, 3 N. 38_6 S. 427 Z. 7–11.

aequationis $\frac{y-v}{x} \sqcap \frac{\ldots(x)}{\ldots x}$. Sed difficultatem ex eo video, quod scilicet valor earum incognitarum quae duos habent valores aequales, cum valore earum quae tales non sunt, misceri non debeat. Quod si dicas saltem v eliminari posse, tunc rursus dubito, est enim v unius valoris, at x et y duorum: calculus esset instituendus, perinde ac si problemata ejusmodi solvere vellemus, ponendo non radices esse aequales, sed habere differentiam quandam datam, quae postea cogitabitur aequalis $\sqcap$ 0. Hac methodo res tota in plena luce collocari potest. Atque ita methodum tangentium inversam non minus ac directam hac ratione persequi licebit. Pone enim aequationem unam esse, primo $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2$, alteram: exempli causa, $v \sqcap \frac{a^2x + y^3}{y^2}$, et v, atque s, esse unius valoris, sed y, et x, esse duorum valorum, eosque valores habere differentiam datam ita ut differentia data inter duos valores ipsius y sit b, et inter duos valores ipsius x sit c. Sed ut v, quae unius est valoris, ope duarum incognitarum duorum valorum determinetur, id videtur impossibile, et est vero, nisi res ita constituta sit, ut quomodocunque duae illarum quantitatum quatuor, duae x, seu x, et ξ, et duae y, seu y et υ, inter se combinentur ex praescripto aequationis, nempe x, et y, vel x et υ, vel ξ et υ. vel y et $\xi_{[,]}$ ut nihilominus semper idem prodeat nempe v.

Sed de isto quidem non est necesse opinor, ut soliciti simus, nam cum impossibile sit errorem oriri, si pro aliqua quantitate substituatur ejus valor, eliminata v^2, habebimus aequationem hanc, e. g. $s^2 - \frac{a^4x^2 + 2a^2xy^3 + y^6}{y^4} + \frac{2a^2x + [2]y^3}{y} - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$ in qua duae sunt incognitae duas habentes radices; et tertia non nisi unam. Et huc scilicet veniendum est ad modum efficiendi, ut x et y, et x et υ, et ξ et υ, et y et ξ, ex praescripto aequationis propositae ultimae combinatae, semper producant idem, et quis tunc debeat esse valor ipsius s. In methodo tangentium communi seu directa quaeritur tantum ratio efficiendi, ut una incognita duorum valorum ut y. vel υ. in aequatione posita semper proveniat idem. Problema autem in methodo quoque inversa non poterit opinor solvi melius quam per aequationum similium comparationem; nam ecce

7 potest. *(1)* porro ut tam *(a)* v, q *(b)* y, qvam x duos habeant valores aeqvales *(2)* Atqve *L* 13 vero, *(1)* nisi vel differentiae *(2)* nisi *L* 13 illae qvantitates *L ändert Hrsg.* 23 et ... ipsius s *erg. L*

25 inversa: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f.

aequationem in qua x habet duos valores aequales, ergo similis est ei, quae est multipla hujus $x^2 - 2ex + e^2, \sqcap 0$. Eodem modo y in ea habet duos valores aequales, ergo similis est multiplae, hujus quoque $y^2 - 2\upsilon y + \upsilon^2, \sqcap 0$, ergo similis est multiplae factae ex utraque: $x^2y^2 - 2exy^2 + e^2y^2, -2x^2\upsilon y + 4ex\upsilon y - 2e^2\upsilon y, +x^2\upsilon^2 - 2ex\upsilon^2 + e^2\upsilon^2$ et ordinando: $x^2y^2 - 2exy^2 - 2\upsilon x^2y + \upsilon^2x^2 + e^2y^2 + 4ex[\upsilon]y - 2\upsilon^2ex - 2e^2\upsilon y + e^2\upsilon^2 \sqcap 0$. Erunt ergo aequationes collatitiae 8, at incognitarum tantum una est in data aequatione, ergo data aequatio per aliam 7 indeterminatarum multiplicanda est, quae talis sit, ut ea multiplicatione factitiae similis fiat, quo facto conferendo tandem, omnesque incognitas elidendo, ultimae s tandem valor invenietur. Possent quoque ambae partiales aequationes factitiae duarum radicum aequalium, per alias aequationes multiplicari, ita moderatis, ut ductis in se invicem productis fiat data, sed nullum inde compendium, satius est ergo productum multiplicari per aliam quandam, quae omnia aut pleraque loca repleat, adhibitis incognitis, unde ponendo illas incognitas evanescere, seu $\sqcap 0$. Ubi termini scilicet nulli sunt tandem sponte sua aequatio similis fieret. Haec aequatio factitia dici potest habere omnia loca repleta, si scilicet neutra incognitarum dicatur ascendere debere ultra quadratum, revera tamen locus est quadrato-quadraticus, ob ductum in se incognitarum, et eo sensu loca vacant.

Etsi necesse sit tot esse aequationes collatitias quot incognitas, non tamen necesse, ut quilibet terminus novam peculiariam habeat incognitam.

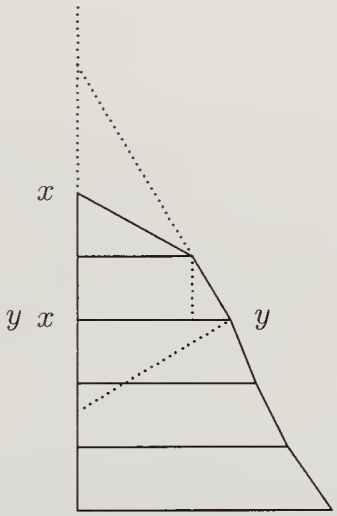
Facillima res est, si factitia inventa per aliam repletam, si placet multiplicetur, in qua satis incognitarum, et inde collatitiae instituantur etiam cum terminis absentibus, ita enim etiam quaedam ex incognitis assumtis tolluntur. Si nimius indeterminatarum numerus, possunt superfluae mutari in cognitas.

1 est *(1)* ei *(a)* qvae fit *(b)* indeterminatae *(2)* ei *L*

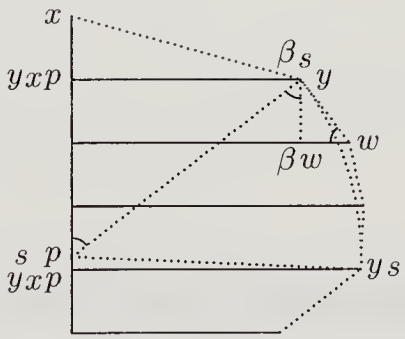
9. ANNOTATIO AD METHODUM TANGENTIUM INVERSAM [Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 62. 1/2 Bl. 4°. Ca 1/2 S. auf Bl. 62 v° unten. Auf Bl. 62 r° VII, 3 N. 38_{16} tlw. sowie eine Aufzeichnung zur Pendelbewegung (Cc 2, Nr. 543 tlw.; Druck für Reihe VIII vorgesehen).
Cc 2, Nr. 543 tlw.

Datierungsgründe: Die Schrift der zu VII, 3 N. 38_{16}, dat. Oktober 1674, gehörigen Gleichungen auf Bl. 62 r° oben schlägt stark auf die Rückseite durch. Auf dieser ist Fig. 1 von N. 9 auf eine davon kaum beeinträchtigte Stelle der oberen Hälfte des Blattes geschrieben, Fig. 2 und der Text des Stückes auf die freie untere Hälfte, also wohl erst nach diesen Gleichungen. Die Aufzeichnung zur Pendelbewegung auf Bl. 62 r° ist weitgehend in den restlichen Freiraum geschrieben und dürfte zuletzt entstanden sein. Leibniz befasst sich in VII, 3 N. 38_{16} u. a. mit der Summierung der Reihe $\frac{1}{z^2 + \frac{1}{2}\beta z}$, so dass N. 9 vermutlich auf denselben Zeitraum zu datieren ist.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$p^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam $\frac{w}{\beta} \sqcap \frac{p}{y}$, et posito w dari, seu esse v. g. $\sqcap \frac{a^3}{x^2 + \frac{1}{2}\beta x}$ fiet $p \sqcap \frac{a^3 y}{x^2\beta + \frac{1}{2}\beta^2 x}$, et $p^2 \sqcap \frac{a^6 y^2}{x^4\beta^2 + x^3\beta^3 + \frac{\beta^4 x^2}{4}}$ et fiet:

$4a^6y^2+4x^4\beta^2y^2+4x^3\beta^3y^2+\beta^4x^2y^2 \sqcap 4x^4\beta^2s^2+4x^3\beta^3s^2+\beta^4x^2s^2$ quae determinanda est ad duas radices aequales.

1 determinanda: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

10. METHODO TANGENTIUM FLEXUS CURVARUM CONTRARII FACILE DEPREHENDUNTUR

[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 123 ist abgetrennt. 1 1/2 S. auf Bl. 122. Auf Bl. 123 Cc 2, Nr. 842 u. 843 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 841

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. In seiner ersten Abhandlung zur Kreisquadratur vom Herbst 1673 hat Leibniz eine Abschätzung zum Wendepunkt einer Kurve durchgeführt, ohne Tangentenbetrachtungen anzustellen (vgl. VII, 4 N. 42_1 S. 731–733), in der Ausarbeitung vom Oktober 1674 versucht er dies durch einen Vergleich von Abszisse und Subtangente, die er nach dem Verfahren von Sluse berechnet (vgl. III, 1 N. 39 S. 144 f. u. 147). Das vorliegende Stück dürfte vorher entstanden sein.

Methodo Tangentium flexus curvarum contrarii facile deprehenduntur

Nimirum, investigetur tangens methodo a Slusio publicata, si tangens semper est affirmativa, vel semper negativa, quod facile ex calculo judicari potest, nullos habet curva flexus contrarios; sin mutari potest ex affirmativa in negativam, semel aut saepius[,] hoc quoque ex calculo facile dijudicari, et punctum flexus contrarii reperiri potest. Eadem arte et vertex curvae, in ordine scilicet ad rectam pro Directrice sumtam, semper reperiri potest. Vertex enim determinatur applicata maxima et minima.

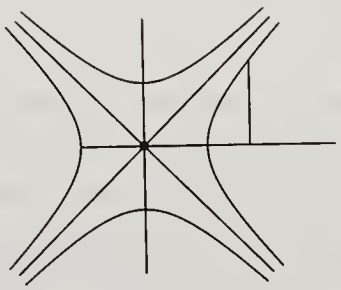
16 methodo *(1)* Slusiana, *(2)* a Slusio *L* 21–110,1 minima *(1)*. (Minima infinite parva *(2)*. Si Directrix *(a)* secat vel tang *(b)* occurrit *L*

---

14 f. Methodo ... deprehenduntur: vgl. Sluses Bemerkungen zu Wendepunkten im Tangentenbrief, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5146–5147: „aliquid etiam attigi Miscelaneorum cap; ubi &, qua ratione flexus contrarii curvarum ex Tangentibus inveniantur, ostendi“ und im Nachtrag, *Philosophical Transactions* VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059: „De ... Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam esse ... , cujus ope flexus Curvarum contrarios ac Problematum limites ostendi.“ 16 publicata: vgl. die Erl. zu S. 62 Z. 6.
16–19 si tangens ... potest: Das folgende Kriterium liefert Extremwerte, nicht Wendepunkte. In der Folge setzt Leibniz fälschlich Extremwerte und Wendepunkte gleich (s. u. S. 111 Z. 3).

Si Directrix occurrit curvae, punctum concursus dat verticem. Curva si recurvata est, habet vertices uno plures. Vertex est punctum recurvationis. Possunt recurvationes esse dissimilares, ut in illis quae sunt instar literae S. Porro sciendum est verticem haberi ope Tangentis directrici parallelae aut perpendicularis.

Sunt falsi quidam vertices, qui fiunt ex curvarum dissimilarium compositione in unam inventa aequatione ipsis communi, ita facile est diversas Conicas in unum jungere imo haec conjunctio etiam fieri potest sine nova recurvatione, vel vertice, quas in curvis altioribus discernere difficile est. Videndum est ergo an pars quaedam curvae propositae separatam habere possit ab altera aequationem, et progressionem; proposita quadam curva, et aequatione ejus progressum exprimente, quaerenda sunt ejus aequationis ope puncta tam flexuum contrariorum, quam recurvationum; referendaque sunt puncta curvae ad Tangentes per ea puncta transeuntes et ad rectas quae ad eas tangentes sunt perpendiculares, ut quaeratur si fieri potest aequatio proposita simplicior, certe ab ea diversa. Ubi considerandum etiam est an Curva sit Recurrens in se. Si non est recurrens in se, videndum est, an habeat sectiones oppositas, imo an et conjugatas.



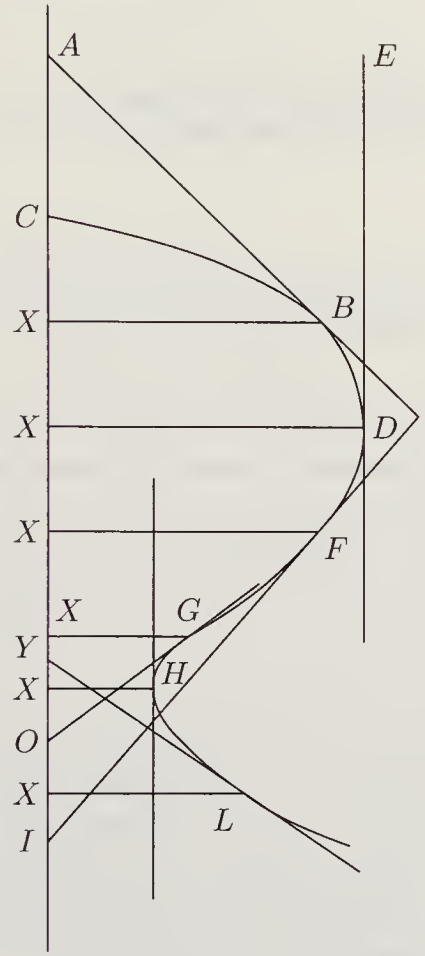
[*Fig. 1*]

Ad hoc autem necesse est ut videamus an curva habeat asymptoton, id est an punctum aliquod reperiri possit, unde nequeat duci tangens ad curvam, nisi infinita. Unde illud quoque statim investigari potest, sitne ab utroque latere asymptotos. Superest ut investigetur.

Reperta aequatione ad Curvam simplicissima, eadem opera facile habetur et compositissima. Aequationes illae resolvendae sunt in analogias; et ordinatae in partes, ut inde inveniantur, an sint rectae quaedam certae, puncta quaedam certa, ad quae specialiorem quandam habeant curvae relationem, etiam aliter quam per ordinatas, ut an sint foci, et poli: breviter investigandi sunt modi describendi simpliciores omnes.

Examinandum denique est, quam relationem curva habeat extra suum planum; an solidum aliquod regulare haberi queat, imo an et plura, quorum sectione habeatur. Uti

Ellipsis tam ex cylindro quam ex cono secari potest. Examinandum ante omnia fiat, an recta constans curvam ingrediatur, una pluresve; et quomodo reddi possit simplicissima.



[*Fig. 2*]

Erravi paulo ante inter flexus contrarios et recurvationes nullum est discrimen. Cum tangens, ex punctis contactus *B. D. F. G. H. L.* axi *CX* productae si opus est, occurrit ultra *C*, id est ultra punctum quo curva continuata axi aut ejus parallelae (ante alium flexum) occurrit, tunc curva axi obvertit concavitatem; idem est de *FI*, quia ultra punctum *H*, quo curva ante mutatum flexum maxime accedit ad axem, cadit *I*. Si tangens semper tendit versus applicatas minores, ideoque in eas partes curva decrescit. Si tangens est parallela axi; a statu incrementi transitur in statum decrementi; vel quod idem est contra.

In curvis Conicis tot sunt tantum varietates quot differentiae oriri possunt a quadratis incognitarum absentibus, vel affirmatis aut negatis, varietate quae est ab rectangulo incognitarum ad eas reducta. Sed hoc non erit in altioribus.

3 *(1)* Nota cum l, seu producta, est major qvam x, abscissa, figuram esse convexam, Si minor, qvod fit etiam, si in contrarium reducta, concavam; Si mi *(2)* Erravi *L* 8 occurrit *gestr. L, erg. Hrsg.* 9 concavitatem; *(1)* si infra, concavitatem *(2)* idem *L* 11 f. tangens *(1)* in cresc *(2)* tendit *(a)* partes a *(b)* versus applicatas minores; curva *(3)* semper *L* 13 f. parallela | curvae *ändert Hrsg.* |; a *L*

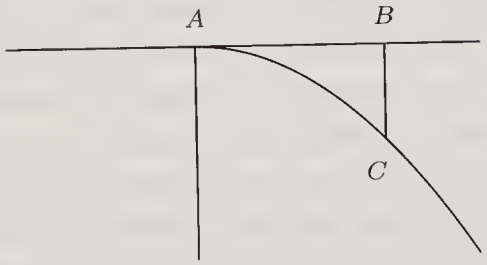
3 Erravi: s. o. Erl. zu S. 109 Z. 16–19.

11. DE VARIIS CURVIS NOTAE

[September – November 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°, gefaltet zu einem Bog. 4°, von dem das rechte, untere Viertel abgeschnitten ist. 5 Z. auf der rechten Hälfte von Bl. 2 r°. Auf dem Rest von Bl. 2 VII, 1 N. 64.
Cc 2, Nr. 726

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von September bis November 1674 belegt. Die vorliegenden Notizen dürften kurz nach VII, 1 N. 64 auf das Blatt geschrieben worden sein.

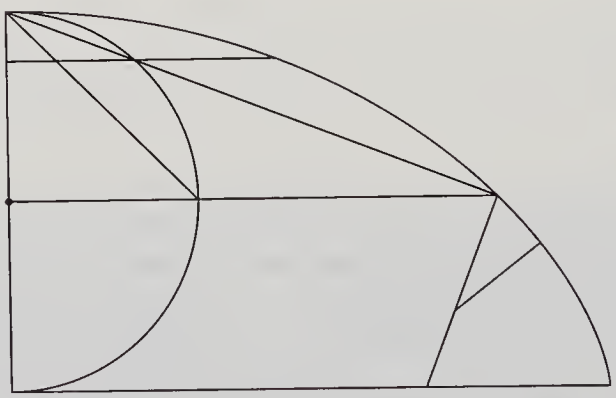


[*Fig. 1*]

$y \sqcap AB \sqcap 10.$ $x \sqcap BC.$ $ax \sqcap y^2.$

$x \sqcap \frac{y^2}{a} \sqcap {}^{100}$ [*bricht ab*]

$$\frac{a^2x}{a^2+x^2} \sqcap y.$$



[*Fig. 2*]

12. DE INSCRIPTORUM ET CIRCUMSCRIPTORUM USUS

November 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 79. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 79 r° u. 5 Z. auf Bl. 79 v°. Bl. 79 hing ursprünglich mit N. 13, VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 zusammen. Cc 2, Nr. 801

1674. Novemb.

De inscriptorum et circumscriptorum usus non solum ad demonstrandum sed et ad inveniendum

Methodo Apagogica per v. g. inscripta et circumscripta, hactenus eo tantum consilio usi sunt Geometrae, ut aliter inventa, sic tantum demonstrarent. Ego cogitare coepi an non principium etiam inventionis esse possit, haec methodus tam generalis, ut alias omnes comprehendat, quoniam omnia aliter inventa per hanc possunt demonstrari. Nimirum breviter methodus[:] Duo sunt aequalia; id ita demonstrabitur, pone esse inaequalia, differentia ergo ipsorum erit quaelibet, ut b. Sume inscripta et circumscripta quorum differentia minor quam b. Investiga jam et differentiam tam inscripti a data quantitate, quae aequalis demonstranda est, quam circumscripti; invenies per calculum, qui quippe in meris rectilineis facile iniri potest; differentiam inscripti ab ipso esse minorem quam b, sed et differentiam circumscripti ab ipso esse etiam minorem quam b. Sed alterutrius eorum differentia ab ipso deberet esse minor quam b. Quoniam enim differentia ejus a curvilineo ipso sit b, ideo si ponetur majus curvilineo, inscriptum ab eo differet plus quam b. Si sit minus[,] circumscriptum.

Analytice sit c curvilineum[;] b. quantitas assumta; quantitas quae ipsi c ponitur aequalis, esto a. Polygonum inscriptum m, circumscriptum n.

Jam aquationes: (1) $\mp c \pm a \sqcap b$. (2) $m+b-q \sqcap c$, (3) $n-b+r \sqcap c$ (4) $a-m \sqcap b-d \sqcap f$ et (5) $n-a \sqcap b-e \sqcap g$. (6) per 1. erit $c \sqcap \mp b+a$, ergo ex 2. et 3. fiet: (7) $m+b-q \sqcap \mp b+a$ et (8) $n-b+r \sqcap \mp b+a$, jam pro m in aeq. 7. substitue ejus valorem ex aeq. 4, qui est (9) $m \sqcap a+d-b$, et ex aeq. 7. fiet (10) $\overset{//}{\textcircled{a}} + d\boxed{-b+b} - q \sqcap \mp b \overset{//}{\boxed{+a}}$. Et quia per 5, fiet (11) $n \sqcap b+a-e$ fiet ex 8, (12) $\textcircled{b} \overset{//}{\boxed{+a}} - e\boxed{-b} + r \sqcap \mp b \overset{//}{\boxed{+a}}$ adeoque habemus aequationes duas, 10, et 12, nempe $d-q \sqcap \mp b$, et $r-e \sqcap \mp b$ sive ex 10 fiet: (13) $q \sqcap d \pm b$,

6 1674. Novemb. *erg. L* 7 f. De ... inveniendum *erg. L* 9 v. g. *erg. L* 19 esse *(1)* major qvam b *(2)* maj *(3)* minor *L* 29 et | 11 *ändert Hrsg.* |, nempe *L*

et ex 12, fiet (14) $r \sqcap \mp b - e$ quarum alterutra absurda est, quia si $\pm$ significat $+$, fiet $\mp \sqcap -$. et erit $r \sqcap -b-e$. quod est absurdum; si $\pm$ significat $-$ fiet $d-b \sqcap q$. Quod rursus absurdum, nam quia b major quam d ex hypothesi, erit q aequalis quantitati negativae, contra Hypothesin, nam quia $b - d \sqcap f$ per 7. erit $d - b \sqcap -f$. Ergo $q \sqcap -f$. quod est absurdum. Hinc jam analytice licebit investigare casus, ex natura calculi in quibus posita differentia b. Calculi ejusmodi oriri debeant; atque ita inveniri quaedam poterunt quae forte per alias methodos demonstrare non liceat.

Si tam c quam a, curvilineae, ipsius c quoque exhibenda inscripta. Sed ad polygonorum, vel aliter appropinquantium summam universaliter ineundam, seu ad supponendum calculum quo assumantur, minor eorum differentia calculo indefinito, patet opus esse, ut area cujuslibet polygoni per regulam quandam seu compendium iniri possit, seu brevius et generalis, ut habeatur methodus appropinquandi generalis per calculum analyticum.

4 Hypothesin, *(1)* qvemadmodum et r. *(2)* nam *(a)* ponendo *(b)* qvia L

1 (14): Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $+e$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt die anschließende Folgerung, aber nicht die weitere Überlegung.

13. CURVA ANALYTICA SENSIBILITER NON DIFFERENS A QUADRATRICE QUADAM

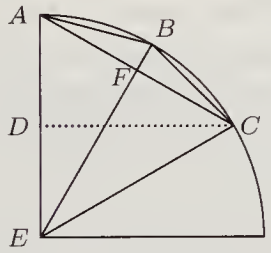
[Anfang (?) Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 c Bl. 151. 1 Ausschnitt von max. 17 x 9,6 cm. Ca 1 1/2 S. Bl. 151 hing ursprünglich mit N. 12, VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 zusammen. Cc 2, Nr. 1074

Datierungsgründe: Das ursprünglich zuerst auf denselben Träger geschriebene N. 12 ist auf November 1674 datiert. N. 13 ist nach den von den Herausgebern auf Dezember 1674 datierten VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 geschrieben worden.

Curva analytica sensibiliter non differens a quadratrice quadam

Methodo qua aut Snellius, aut Vieta, aut Hugenius, aut Gregorius arcui cuilibet rectam prope aequalem Geometrica constructione non ineleganter exhibent describi potest figura fere.



[*Fig. 1*]

Hugenius in libro de magnitudine Circuli hanc habet, quam et repetit de pendulo pag. 12 $\frac{AB+BC-AC}{3}+AC$ ⊓ ABC ita ut in sextante quadrantis aut minore arcu ne quidem $\frac{1}{6000^{\text{ma}}}$ parte suae longitudinis recta dicta deficiat ab arcu. Sive $\frac{AB+BC-AC+3AC}{3}$, sive $\frac{AB+BC+2AC}{3}$.

10 f. Curva ... qvadam *erg. L* 16 qvam ... 12 *erg. L*

12 Methodo: W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, prop. XXXIII – XXXIV, S. 58–63; Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, cap. XVIII (*VO* S. 398–400); Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, problema III, prop. XII, S. 19–21 (*HO* XII S. 147–149); J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 11–19; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 1, S. 1–3; ders., *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 6–8 [Marg.]. 16 repetit: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 12 [Marg.] (*HO* XVIII S. 107); Huygens verwendet jeweils den Näherungswert $AB+BC+\frac{AB+BC-AC}{3}$. Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter, wobei ihm Flüchtigkeitsfehler unterlaufen, die sich aber nicht auf die allgemeine Überlegung auswirken.

Posita $AD \sqcap x$ erit $AC \sqcap \sqrt{2ax}$. $AF \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}$. $EF \sqcap \sqrt{-\frac{2ax}{4} + a^2}$, sive $EF \sqcap \frac{\sqrt{+a^2 - 2ax}}{2}$ et $BF \sqcap \frac{2a - \sqrt{a^2 - 2ax}}{2}$. Cujus quadratum: $\frac{4a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax} + a^2 - 2ax}{4}$ $\sqcap BF^2$, cui addatur $AF^2 \sqcap \frac{2ax}{4}$ fiet: $\frac{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}\boxed{-2ax + 2ax}}{4} \sqcap AB^2$ et $AB \sqcap \frac{\sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}}}{2}$. Ergo $AB + BC \sqcap \sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}}$ et Circulus erit paulo minor quam $\frac{2\sqrt{2ax} + \sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}}}{3}$. Curva igitur Geometrica Cycloeidi prope eadem erit: $\frac{3\sqrt{2ax - x^2} + 2\sqrt{2ax} + 1\sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}}}{3}$. Cujus ordinatae componentur ex sinubus, ex ordinatis parabolae, et ex ordinatis $\sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}}$. Quarum curvam ita vestigabimus: $\sqrt{5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax}} \sqcap y$. Ergo $5a^2 - 4\sqrt{a^2 - 2ax} \sqcap y^2$. Ergo $4\sqrt{a^2 - 2ax} \sqcap -y^2 + 5a^2$. Ergo $\boxed{16a^4} - 32a^3x \sqcap y^4 - 10a^2y^2 + \boxed{25a^4}$ et erit $x \sqcap \frac{-y^4 + 10a^2y^2 - 9a^4}{32a^3}$. $9a^4$

Unde patet figuram esse ex paraboloeidum compositarum rationalium genere. Ac proinde ex Circulo, parabola communi, quadratoquadratica et parallelogrammo inter se compositis fieri curvam analyticam a Cycloeide sensibiliter non differentem. Quod satis memorabile arbitror.

5 Geometrica *erg. L* 9 $+5a^2$. *(1)* Est error in calculo sane *(2)* | Ergo *streicht Hrsg.* | $a^2 - 2ax \sqcap$ *(3)* Ergo *L* 11 parabola *(1)* Cubica *(2)* communi *L* 12 curvam *(1)* Geometricam *(2)* analyticam *L*

4 minor: Der Kreisbogen ist größer als der Näherungswert.

14. AD SCHEDAM INQUISITIONIS IN METHODUM TANGENTIUM INVERSAM OVALIS EXEMPLO

[Spätsommer – 24. Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 7. 1 Bl. 4°. Ränder beschnitten. Bl. 7 v° leer. 1 S. Cc 2, Nr. 833

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist auf Papier geschrieben, dessen Wasserzeichen für August/September und Ende 1674 belegt ist. Leibniz knüpft inhaltlich an N. 4 vom Sommer 1674 an. Die Untersuchung N. 17, dat. Dezember 1674, in der er ebenfalls die inverse Tangentenmethode am Beispiel der Cartesischen Ovale untersucht, erwähnt er nicht. N. 14 dürfte also vor N. 17 entstanden sein; letztere ist wiederum vor der auf den 24. Dezember 1674 dat. N. 18 anzusetzen.

In Scheda ubi in Methodum Tangentium inversam Ovalis exemplo inquisivi (cujus fig. priorem inspice pag. 1) inveni posita MP. Reducta, $\sqcap\ m$, et $FM \sqcap x$. aequationem naturam reductae explicantem haberi:

$$x \sqcap - m + \frac{ad^2 - ae^2}{e^2} - \frac{2d^2a^2}{e^2m} + \frac{d^2a^3}{m^2}$$

$$\bigtriangledown \qquad \square \qquad \text{Hyp.} \qquad \text{Hyperboloeid.}$$

Unde sequitur figuram reductarum ejus ovalis esse hyperbolae σύγγνωτον, si nullus in calculo error. Is vero quam verus sit, ita experiemur. Cartesius lib. 2. *Geom.* lit. M. edit. Schot. p. 43. (cujus figuram ea pag. vide.) calculo invenit MA (: quam ille vocat y, quaeque aequivalet meae $FM - FA$, seu $x - c$, ponendo cum Cartesio $FA \sqcap c$:) esse

$$\sqcap \ \frac{d^2z^2 + 2cd^2z - eez^2 + [2]bdez}{2bdd + 2cd^2}$$

posito ejus $GA \sqcap b$. $AF \sqcap c$. Ergo

$x - c \sqcap$ ....., vel

$x \sqcap$ ..... $+ c$. Hinc aequatio talis fiet:

11 inquisivi: s. N. 4, insbesondere Fig. 1 S. 16. 13 haberi: Die folgende fehlerhafte Gleichung leitet Leibniz in *a. a. O.* S. 19 Z. 10–12 ab. Sie beeinträchtigt die weiteren Überlegungen. 17 Cartesius: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43; zur Figur vgl. Leibniz' Nachzeichnung in N. 4 S. 16.

$$z^2 + \frac{2cd^2 + [2]bde}{d^2 - e^2} z \qquad + \frac{2bd^2c + 2c^2d^2 - 2bd^2x - 2cd^2x}{d^2 - e^2} \sqcap 0$$

seu $z^2 + \underset{\cdots\cdots\cdots}{nz} + \frac{n^2}{4} \sqcap - \underset{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\qquad\qquad} + \frac{n^2}{4}$

fietque $\sqrt{\underset{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\qquad\qquad}} \sqcap z + \frac{n}{2}$.

Ponendoque brevitatis causa: $+2bd^2c+2c^2d^2+\frac{n^2r^2}{4} \sqcap q^4$, et $d^2-e^2 \sqcap r^2$, et $2bd^2+2[c]d^2 \sqcap t^3$ habebimus: $-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{q^4 - t^3x}{r^2}} \sqcap z$. At Cartesius invenit pag. 48. *Geom.* lineam $AP \sqcap FP - \underset{c}{FA}$. $\sqcap x+m-c$ esse $\sqcap \frac{w^4 + h^3z}{l^3 + r^2z}$. ponendo scilicet $w^4 \sqcap bcd^2 - bcde$, et $h^3 \sqcap bd^2 + ce^2$, et $l^3 \sqcap cd^2 + bde$. Ordinetur aequatio, fiet $l^3x + l^3m - l^3c + r^2xz + r^2mz - r^2cz \sqcap w^4 + h^3z$ sive $-\sqrt{\frac{q^4 - t^3x}{r^2}} \sqcap \frac{l^3x + l^3m - l^3c - w^4 + nh^3 - nr^2x - nr^2m + nr^2c}{+h^3 - r^2x - r^2m + r^2c}$ quae contracta quantum fieri potest faciet $-\sqrt{\frac{q^4 - t^3x}{r^2}} \sqcap \frac{f^3x + i^3m + g^4}{-r^2x - r^2m + \beta^3}$ quadratisque omnibus: $\frac{q^4 - t^3x}{r^2} \sqcap \frac{f^6x^2 + 2f^3i^3xm + 2f^3g^4x + i^6m^2 + 2i^3g^4m + g^8}{+r^4x^2 + 2r^4xm - 2r^2\beta^3x + r^4m^2 - 2r^2\beta^3m + \beta^6}$. Quae facilitatis causa sic exprimi poterunt:

$$t^3r^4xm^2 - t^3r^4x^3 - 2t^3r^4x^2m + \gamma^8x^2 + \delta^8m^2 + \theta^8xm + \lambda^9x + \mu^9m + \xi^{10} \sqcap 0.$$

5 pag. 48. Geom. *erg. L* 7 bde *(1)* substituendo ergo valorem z in ejus locum, fiet: *(2)* Reducatur *(3)* Ordinetur *L* 7 fiet *(1)* substituendo ergo $x + m - c \sqcap w^4 +$ *(2)* l^3x *L* 9 $\sqcap$ *(1)*, $t^3, \widehat{\ } x + m, -g^4$ *(2)* $\frac{l^3x}{m} -$ *(3)* $\frac{f^3x + i^3m + g^4}{-r^2x - r^2m + \beta^3}$ *L*

---

3 $\sqrt{\cdots\cdots}$: Im Folgenden schreibt Leibniz das Minuszeichen vor $\frac{2bd^2c + 2c^2d^2 - 2bd^2x - 2cd^2x}{d^2 - e^2}$ vor die Wurzel und behält alle Vorzeichen unter der Wurzel bei. Der daraus resultierende fehlerhafte Term $\sqrt{\frac{q^4 - t^3x}{r^2}}$ beeinträchtigt die weitere Rechnung. 8 sive: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung vergisst Leibniz den Faktor $\frac{1}{2}$ vor $(nh^3 \ldots + nr^2c)$.

$$\text{vel} \quad - \frac{t^3r^2x^3 + \gamma^8x^2 + \lambda^9x + \xi^{10}}{+t^3r^4x - \delta^8} \sqcap m^2 + 2t^3r^4x^2 \qquad m.$$
$$- \theta^8x$$
$$- \mu^9$$
$$\overline{+ t^3r^4x - \delta^8}$$

Ejus loco ponatur brevitatis causa: $-\frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^{10}}{\varrho^8} + \frac{\varphi^2}{4}} \sqcap m$. Unde patet valorem ipsius m componi ex $\frac{\varphi}{2}$, et radice adjecta. Ipsam $\frac{\varphi}{2}$ autem componi ex applicata $\bigtriangledown^{\text{li}}$, applicata Rectanguli, applicataque Hyperbolae, si modo m non alicui $\bigcirc$ aequivalet, quod jure vereor. Abjecta jam $-\frac{\varphi}{2}$, positoque $l^2 \sqcap \frac{\pi^{10}}{\varrho^8} + \frac{\varphi^2}{4}$, investigandum an valor ipsius l haberi possit. Pro $\frac{\varphi^2}{4}$, habemus $\frac{\psi^{18}}{4\varrho^{16}}$, fietque $\varrho^{16}l^2 - \pi^{10}\varrho^8 \sqcap \frac{\psi^{18}}{4}$. Explicatio ejus rursus dabit radicis extractionem quae locum in alios resolvet, donec reddatur simplicissimus.

6 modo *(1)* ⟨m²⟩ non alicui ○. *(2)* |*μ ändert Hrsg.*| non *L*

15. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA EXEMPLUM

[1. – 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 823

Datierungsgründe: Am Ende des vorliegenden Stückes wird eine in N. 17 Teil 2 durchgeführte Untersuchung angekündigt; s. die Erl. zu S. 130 Z. 5.

Xb. 1674.

De Methodo Tangentium inversa exemplum.

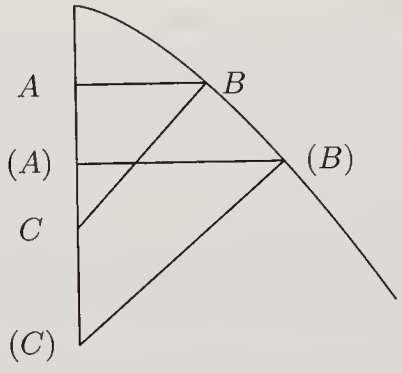


fig. 1.

Sit fig. 1. curva $B(B)$ ejus naturae, ut si ad quandam directricem referatur $A(A)C(C)$ ordinatis AB, $(A)(B)$ et perpendiculares $BC, (B)(C)$ ad curvam ducantur ipsi curvae occurrentes in $B_{[,]}(B)$ et directrici in $C, (C)$ ipsae AB, $(A)(B)$ sint ipsis $AC_{[,]}(A)(C)$ reciproce proportionales. Quaeritur modus hanc curvam describendi.

---

8 *Darunter:* Confer quae dixi Xb. 1674. *Schediasmate de calculo Elastico*, et schediasmate *De progressionibus et Geometria arcana et methodo Tangentium inversa.*

12 f. ipsae ... proportionales *erg. L*

---

14 f. *Schediasmate de calculo Elastico*: Cc 2, Nr. 822, dat. Dezember 1674; *De progressionibus*: VII, 3 N. 39, dat. Dezember 1674.

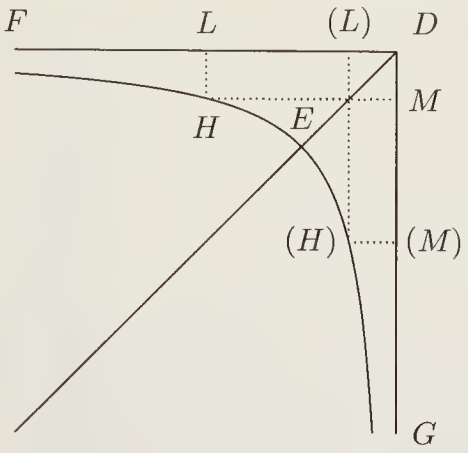


fig. 2.

Intelligatur alia haberi figura; cujus ordinatae sint velut AB, abscissae velut AC, vel contra: eam figuram manifestum est esse Hyperbolam. Sit enim in fig. 2. Hyperbola $H(H)$ rectum transversumque latus habens aequalia cujus centrum D. vertex E. asymptoti DF, DG angulum facientes rectum. Puncta $H, (H)$ unde ordinatae in duas asymptotos, HL vel $(H)(L)$ in DF, et HM vel $(H)(M)$ in DG. ita ut HL (: vel $(H)(L)$:) aequetur ipsi MD (: $(M)D$:) et HM (: vel $(H)(M)$:) aequetur ipsi LD (: $(L)D$:) ordinatae scilicet ad unam asymptoton abscissis: constat ex natura Hyperbolae, ipsas HM, $(H)(M)$ (: sive $LD, (L)D$:) esse in ipsarum $DM, D(M)$ (: vel $HL, (H)(L)$:) ratione reciproca. Itaque si ipsae HM aequentur ipsis AB, ipsas DM aequales fore ipsis AC. vel contra.

Sed haec quanquam vera sint, nondum video tamen quid ad figurae propositae descriptionem faciat Hyperbola. Ne tamen nihil dicamus, comminiscamur figuram quandam, etsi nec ipsam satis exploratam, cujus ope describi possit proposita. Forte enim ejus natura erit tractabilior.

Pone in fig. 5. curvam HE super plano $H(H)((H))$ volvi perpetuo contactu, et curvam puncto B constante descriptam esse talem, ut perpendiculares $(B)(A)$, et BA sint ipsis interceptis $(H)(A)$ vel HA reciproce proportionales. Tunc puncta B. erunt in curva quaesita cujus proinde habebitur descriptio. Sed quaeritur jam curva HE talis naturae ut sumto puncto certo in ipsa E, vel ab ipsa distante B. ab eo semper puncto ductae perpendiculares ad tangentes sint interceptis in tangentibus inter punctum occurrentis perpendicularis, et contactus curvae, reciproce proportionales. Sed hoc hyperbola non praestat, ut jam patebit.

3f. H(H) ... aeqvalia *erg. L* 5 angulum ... rectum *erg. L* 7 (H)(M) :) *(1)* | ipsi *streicht Hrsg.* | *(2)* aeqvetur *L* 11–123,1 Sed ... fig. 3 *erg. L*

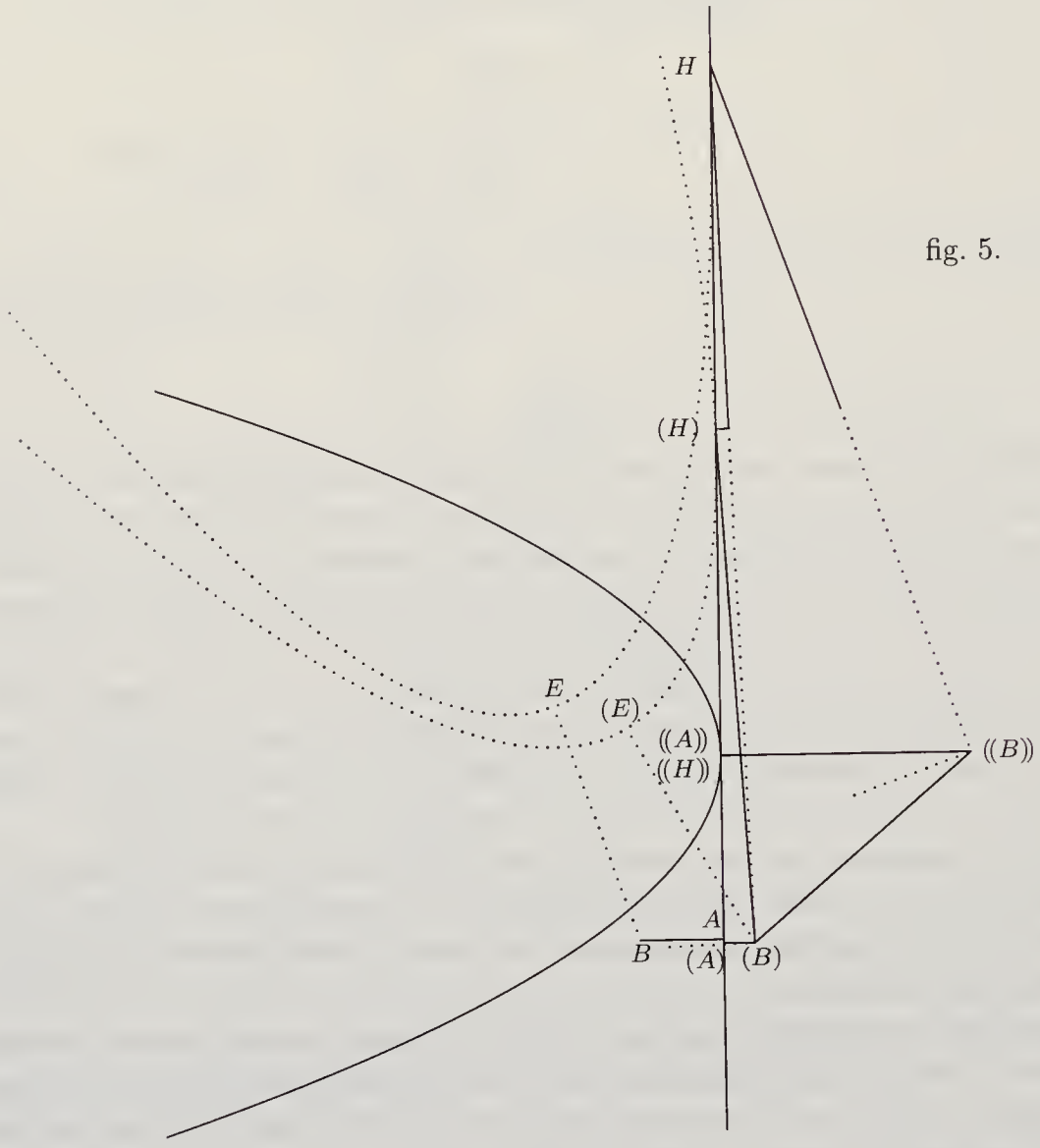


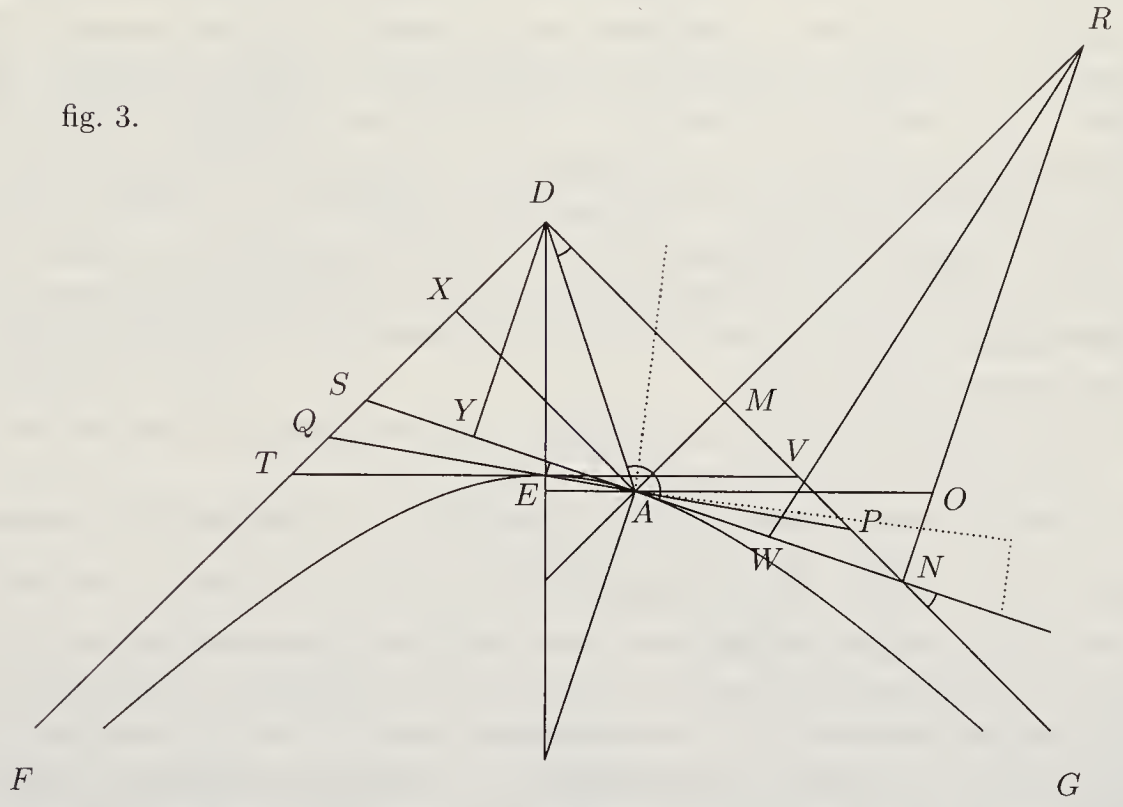
fig. 5.

[*Fig. 3, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 3*: In der Vorlage ist der Punkt A nicht bezeichnet, der Punkt $((A))$ dagegen mit A. Die Figur weist eine Reihe von Linien in Blindtechnik auf, von denen einige offenbar verworfene Konstruktionsversuche darstellen. Diese werden nicht wiedergegeben, ebenso eine unkenntlich gemachte und teilweise vom Text (S. 121 Z. 15–22) überschriebene Vorstufe der Figur.

Nam fig. 3.[:]

fig. 3.



[*Fig. 4*]

Esto Hyperbola $EAG_{[,]}$ vertex E, centrum D. asymptotus DG. ad quam ordinata AM ex puncto Hyperbolae A. Tangens NA. occurrens asymptoto DG in N. Erit $MN \sqcap MD$. ex natura Hyperbolae. Ergo et $AN \sqcap AD$. et Triangulum DAN isosceles. Et Anguli $ADM \sqcap DNA$ item $DAM \sqcap NAM$. Jungatur EA. quae producta occurrat duabus asymptotis DF in Q. et DG in P. Erit per 8. sec. Apoll. $QE \sqcap AP$. Ex Tangente AN erigatur perpendicularis NR quae ipsi AM ordinatae productae occurrat in R. Erit

3 vertex E, *(1)* terminus *(2)* centrum *L* 4 Hyperbolae *(1)* A⟨—⟩. *(2)* |AH *ändert Hrsg.*|. Tangens *(a)* NAH *(b)* NA. occurrens *L*

2 *Fig. 4*: Der Punkt *A* ist in der Vorlage mit *AH* bezeichnet, im zugehörigen Text verwendet Leibniz bis auf eine Ausnahme jedoch *A*. 7 Apoll.: Apollonius, *Conica*, II, 8; vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 219.

angulus ARN anguli ADG duplus. Quoniam anguli RAN et RNA aequales inter se simul aequantur angulo DAN. ergo angulus ARN duobus reliquis ADN et AND inter se aequalibus. Sed haec obiter. Quemadmodum et si tangens AN. alteri asymptoto DF occurrat in S, fore $AN \sqcap AS$. Ergo $AS \sqcap AD$. Triangulum ergo ADS isosceles. Jam angulus $DAS \sqcap$ angulo ARN. Nam ang. DAS est angulo DAN qui ei deinceps est, complemento ad duos rectos. At eidem angulo DAN in $\bigtriangledown^{\text{lo}} DAN$ etiam duo anguli ADN et DNA simul sumti, id est angulus ARN. complemento ad duos rectos. Ergo ang. $ARN \sqcap$ angulo DAS. Ergo anguli ASD et $ADS \sqcap$ angulo DAN et ang. ASD vel $ADS \sqcap$ angulo DAM vel NAM, aut angulo RAN aut RNA. Triangula ergo ADS et RAN similia. Eritque ut DS ad DA vel AN, ita AN ad AR. Adeoque DA media proportionalis inter DS et AR.

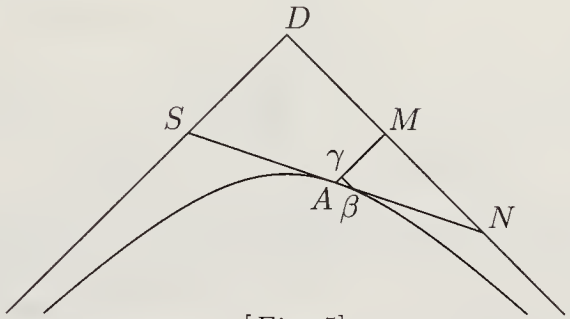
Sit TEV tangens verticis E Asymptotis utrinque occurrens[,] erit (per theorem. 8. lib. 1. Wittii) TS ad SD ut NV ad VD.

In recta AN, sumto puncto medio W. jungatur RW. Ob angulum WRA aequalem angulo ADM erit $\frac{DM}{AM} \sqcap \frac{RW}{WA}$. Ideoque $RW \sqcap \frac{1}{AW}$, seu sumtis diversis in curva punctis A. erunt RW in reciproca ratione ipsarum AW. vel contra. Eodem modo erit AX ad SX vel ad XD, sumto puncto X medio in recta SD et juncta AX, quae perpendicularis ad SD. et parallela asymptoto AX. Unde manifestum dudum XD et AX etiam esse alias alio sumto puncto A, reciproce proportionales. Sed quod unum volebam non evenit ut scilicet ducta ex D. perpendiculari in tangentem SA, nempe DY[,] sint ipsae DY ipsis AY reciproce proportionales. Et calculari facile potest valor ipsius DY respectu ipsius AY. nam $DY \smile YN \sqcap SD \smile DN \sqcap AM \smile MN \sqcap AM \smile MD$. Ergo $DY \sqcap YN \frown AM \smile MD$ seu $\frac{DY}{YN} \sqcap \frac{AM}{\frac{1}{AM}}$. Jam $YN \sqcap AY - AN \sqcap AY - AD \sqcap AY - \sqrt{AM^2 + \frac{1}{AM^2}} \sqcap AY -$

10 similes *L ändert Hrsg.* 13 ut *(1)* SA ad AN *(2)* NV *L*

1 duplus: Die Behauptung ist nicht richtig, die Winkel ARN und ADG sind gleich. Leibniz verwechselt in der folgenden Begründung den als rechten Winkel vorausgesetzten $\sphericalangle RNA$ mit dem kleineren $\sphericalangle RNM = \sphericalangle RAN = \sphericalangle RAD$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung bis Z. 16. 13 Wittii: J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, *DGS* II S. 195 f. 23 $YN \sqcap AY - AN$: Richtig wäre $AY + AN$; der falsche Wert für YN und weitere Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Rechnung bis S. 125 Z. 3.

$\frac{\sqrt{AM^4+1}}{AM}$. Ergo $\frac{DY}{\frac{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}}{AM}} \sqcap \frac{\frac{AM}{1}}{\frac{1}{AM}}$, Ergo $\frac{DY}{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}} \sqcap \frac{AM}{1}$. Ergo $\frac{AY \frown AM}{DY} \sqcap \frac{AM}{1} + \frac{\sqrt{AM^4+1}}{DY}[\sqcap]\frac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{DY}$. Ergo $\frac{AY}{\cancel{DY}} \sqcap \frac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{\cancel{DY}}$. sed satius rem reducere ad calculum analyticum: $DM \sqcap x$. $AM \sqcap \frac{a^2}{x} \sqcap DX$. Ergo $DS \sqcap \frac{2a^2}{x}$. $SN \sqcap \sqrt{\frac{4a^4}{x^2} + 4x^2} \sqcap \frac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}$. Hinc nullo negotio ut obiter dicam haberi potest absolute superficies curvae Hyperbolicae circa quamlibet Asymptoton volutae.



[*Fig. 5*]

Esto enim punctum quodlibet A. Triangulum characteristicum $\beta\gamma A$, erit $\frac{SN}{DN}[\sqcap]\frac{A\beta}{\beta\gamma}$. Ergo $SN \frown \beta\gamma \sqcap DN \frown A\beta$. sive Omn. $\frac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x} \sqcap$ Omn. $A\beta \frown 2x$. Jam Omn. $A\beta \frown x$. constituunt momentum Hyperbolicae curvae. Idem est pro altera asymptoto. Jam $AD \sqcap \sqrt{AM^2 + DM^2} \sqcap \frac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Porro $\frac{SN}{DN} \sqcap \frac{DS}{DY}$ sive $DY \sqcap \frac{DN \frown DS}{SN} \sqcap \frac{2x \frown \frac{2a^2}{x}}{\frac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}} \sqcap \frac{2a^2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. $AD^2 - YD^2 \sqcap \frac{-4a^4x^2}{a^4+x^4} + \frac{x^4+a^4}{x^2}$ unde fiet $AY \sqcap$

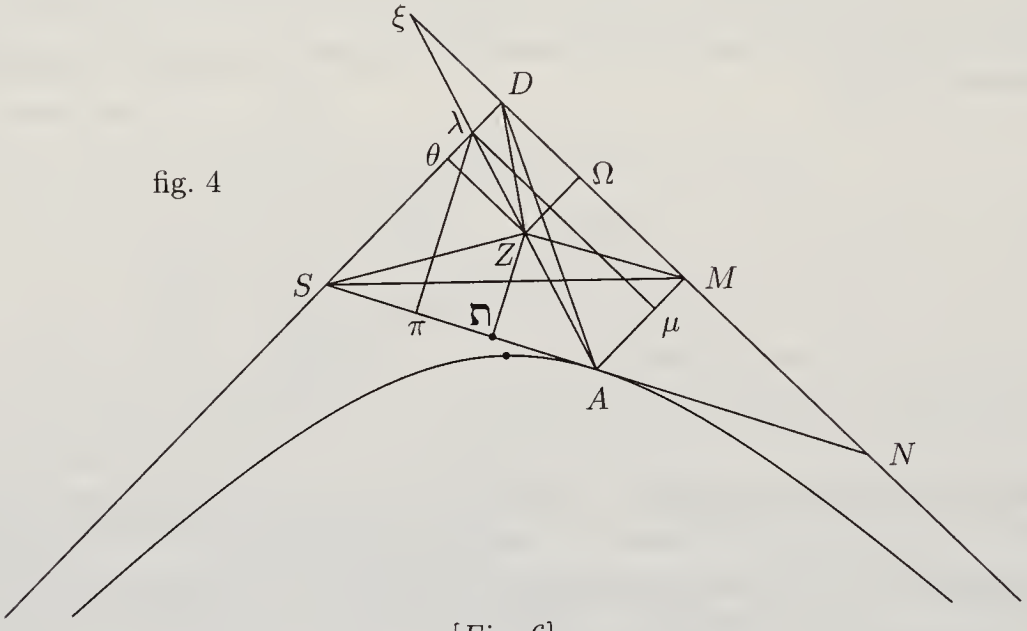
2 f. $\sqcap \frac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\cancel{\mathrm{DY}}}$. | Ergo $\frac{\mathrm{AY}}{\mathrm{DY}} \sqcap \frac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\mathrm{DY}}$. *gestr.* | sed *L* 4 $\mathrm{AM} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ *(1)*. $\mathrm{AD} \sqcap \frac{\sqrt{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4}}{\mathrm{x}}$. $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AX}^2 \sqcap \mathrm{MD}^2) \sqcap \frac{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4-\mathrm{x}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{DX}^2$ *(2)* $\sqcap \mathrm{DX}$ *L* 12 $\frac{2\mathrm{ax}}{\sqrt{\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4}}$

L ändert Hrsg.

$\sqrt{\frac{-4a^4x^4 + \llcorner x^4 + a^4 \lrcorner \square}{x^2 \frown a^4 + x4}}$. DY erit ad AY ut $2a^2x^2$ ad $\sqrt{\llcorner\llcorner x^4 + a^4 \lrcorner \square \lrcorner - 4a^4x^4}$. Non sunt ergo in ratione reciproca.

Sed ne ope foci, aut etiam verticis Hyperbolae datae, aut alterius cujusdam, similis quaerere longo calculo necesse sit, videamus generaliter, an possibile sit punctum quoddam fixum invenire quod satisfaciat, ita ut inde demissae ad tangentes Hyperbolae perpendiculares, sint interceptis inter puncta communia tangentium et harum demissarum, et inter puncta curvae in quibus fit contactus reciproce proportionales.

fig. 4



[*Fig. 6*]

Esto punctum illud Z, fixum cujus distantia ab asymptoto, nempe $Z\Omega$ sit b. et ipsa $D\Omega$ sit c. et $DM[\sqcap]x$, et $AM \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $DS \sqcap \frac{2a^2}{x}$. $\Omega M \sqcap x \mp c$. $Z\text{ת} \sqcap z$. $A\text{ת} \sqcap \frac{e^2}{z}$. $AD \sqcap AN \sqcap AS \sqcap x + \frac{a^2}{x} \sqcap \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$.

1 $2ax^3$ *L ändert Hrsg.* 6 sint *(1)* int *(2)* abscissis *(3)* interceptis inter *(a)* punctum occursus *(b)* puncta *L*

---

11 $AD \ldots x + \frac{a^2}{x} \sqcap \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$: Richtig wäre $AD = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a^2}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$. Den richtigen Wert hatte Leibniz S. 125 Z. 11 berechnet, den falschen Wert verwendet er wieder S. 128 Z. 2 für SA.

Quaeritur determinatio puncti ℸ seu magnitudo rectae Zℸ. Sumitur DZ puncti Z distantia a puncto D[,] ⊓ $\sqrt{b^2+c^2}$ item ejus distantia a puncto M, seu ZM ⊓ $\sqrt{x^2 \mp 2xc + c^2 + b^2}$. $Z\theta$ ⊓ $D\Omega$ ⊓ c. Ergo $S\theta$ ⊓ $\frac{2a^2 - bx}{x}$ ($DS - D\theta$ ⊓ $2MA - Z\Omega$). SZ ⊓ $\frac{\sqrt{x^2c^2 + 4a^4 - 4a^2bx + b^2x^2}}{x}$. $\frac{AM}{Z\Omega}$ seu $\frac{a^2}{x}$ ⌣ b ⊓ ξM ⌣ $\xi\Omega$ seu $\xi\Omega + \boxed{\Omega M}x \mp c$ ⌣ $\xi\Omega$ fiet a^2 ⌢ $\xi\Omega - bx$ ⌢ $\xi\Omega$ ⊓ $bx^2 \mp bcx$, sive $\xi\Omega$ ⊓ $\frac{bx^2 \mp bcx}{a^2 - bx}$ et erit ξD ⊓ $\frac{x \mp c}{a^2 - bx}$, ⌢ $bx, \pm c$ et ξM ⊓ $\xi\Omega + \Omega M$ ⊓ $\frac{x \mp c}{a^2 - bx}$ ⌢ $bx + x$ ⊓ $\frac{\boxed{bx^2} \mp cbx + a^2x \boxed{-bx^2}}{a^2 - bx}$ et $A\xi$ ⊓ $\sqrt{\xi M^2 + AM^2}$ ⊓ $\sqrt{\frac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \frac{a^4}{x^2}}$, qui valor erit ad $A\lambda$, ut ξM ad x sive ut $\mp cb + a^2$ ad $a^2 - bx$. Ergo $A\lambda$ erit ⊓ $\sqrt{\frac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \frac{a^4}{x^2}}$ ⌢ $\frac{a^2 - bx}{\mp cb + a^2}$ ubi vero nonnihil compendii haberi potest[,] nam fiet reducendo:

$$\frac{\sqrt{\mp cbx + a^2x, \square,, \text{⌢ } x^2,,, + a^8 - 2a^6bx + a^4b^2x^2}}{\boxed{a^2 - bx,} \text{ ⌢ } x, \text{⌢ } \mp cb + a^2} \boxed{\text{⌢ } a^2 - bx} \text{ ⊓ } A\lambda.$$

Jam perpendicularis in tangentem sit $\lambda\pi$. Erit $\frac{\lambda\pi}{\pi A}$ ⊓ $\frac{Z\text{ℸ}}{\text{ℸ}A}$ ⊓ $\frac{z}{\frac{e^2}{z}}$ ⊓ $\frac{z^2}{e^2}$. Ergo $\lambda\pi$ ⊓ $\frac{z^2 \text{ ⌢ } \pi A}{e^2}$. Jam $\lambda\pi^2 + \pi A^2$ sive $\frac{z^4 \text{ ⌢ } \pi A^2 + e^4\pi A^2}{e^4}$ ⊓ $A\lambda^2$. Ita habebitur valor ipsius πA per

---

1 *Am Rande:* Si generalis regula danda puncto positione dato omnia per calculum inveniendi adhiberi potest talis calculus quo Schotenius ex una data directrice caeteras invenit.

14 potest | qvalis *ändert Hrsg.* | calculus *L*

---

6 ξM ⊓ $\xi\Omega + \Omega M$: In der folgenden Rechnung setzt Leibniz x statt $x \pm c$ für ΩM ein. Das Versehen beeinträchtigt die Berechnung von $A\lambda$ in Z. 10. 14 calculus: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178. Leibniz hat in seinem Handexemplar auf S. 177 Marginalien zum Text notiert und in der Figur einen Kurvenbogen ergänzt; vgl. dazu auch die Aufzeichnung *Mutatio aequationis curvae pro mutata directrice* (Cc 2, Nr. 1450).

z. Porro $D\lambda \sqcap \frac{Z\Omega \frown \xi D}{\xi\Omega} \sqcap \not{\beta}, \frown \frac{bx^2 \mp 2bcx \pm a^2c}{\not{\beta}x^2 \mp \not{\beta}cx}$. Ergo $\lambda S \sqcap \frac{2a^2}{x} - D\lambda$ at $\sqrt{\lambda S^2 - \lambda\pi^2} \sqcap S\pi$. Jam $S\pi + \pi A \sqcap SA \sqcap \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Hinc habebitur aequatio nova exhibens valorem ipsius πA per solas $a.b.c.e.x.z$. Conferatur cum priore itidem per solas istas; et fiet aequatio quae dabit valorem ipsius z quaesitum conferendo hos duos ipsius πA valores.

Dato igitur puncto A repertum est punctum Z per calculum, ita ut ad tangentem $A\text{ת}$ inde ducta perpendicularis $Z\text{ת}$ sit valoris cogniti per $A\text{ת}$ divisi. Sed hoc non sufficit, necesse est enim determinatas. $b.c.d.$ ita explicari, si licet, ut facta explicatione omnes indeterminatae destruantur. Sed non possunt destrui ex valore ipsius z. Sed nondum satis res perspecta. Credo enim nunc, satis solutum problema. Quoniam enim ipsa quoque z. est indeterminata, non video quid obstet quo minus manentibus iisdem $b.c.e.a$, variari possint x.

Imo jam video quaesitas rectas esse $b.c.$ et valorem earum per duas indeterminatas z et x. hic haberi: Sed quaeritur determinatus seu semper idem. Igitur sumta b verbi gratia velut quaesita, caeterae, $c.a.e.$ ita pro arbitrio explicandae sunt; ut facta explicatione destruantur literae indeterminatae; sed non video quomodo hoc fieri possit, ob z. non elisam. Sed video erratum a me in inquirendi modo: Nimirum non est supponendum in Calculo $A\text{ת} \sqcap \frac{e^2}{Z\text{ת}}$ sed ex sumtis $D\Omega, Z\Omega, DM$, investigandae $Z\text{ת}$, $\text{ת}A$ cum sint determinatae, inventisque earum valoribus, facienda est aequatio cum hac $A\text{ת} \sqcap \frac{e^2}{Z\text{ת}}$, vel quod idem est ponatur valor unius aequalis quantitati e^2 constanti, per valorem alterum divisae, unde orietur aequatio, cujus ope quaeri poterit vel b vel c. Ordinetur secundum alterutrum, et quaeratur valor v. g. ipsius b. eoque sic invento tres reliquae arbitrariae, $c.e.a.$ ita explicentur, ut evanescat indeterminata. Quod variis modis possibilibus tentando, si possibile sit inveniemus.

Quod si idem alterius quoque curvae ope praestari possit; earum duarum curvarum dimensiones ad se invicem reducentur; cum productae figurae per unam aut per alteram futurae sint invicem proportionales. Unde intelligi potest fore curvas in quibus hoc sit

6 divisi *(1)* sed ut eadem maneat aeqvatio, eaedem literae, π *(2)* sed *L* 11 f. possint x. *(1)* Atqve jam videndum erit qvia b. a. e. c. in arbitrio an ita possint explicari *(2)* Imo *L* 12 video *(1)* puncta qvaesita esse non *(2)* qvaesitas *L* 18 $\frac{e^2}{Z\text{ת}}$ *(1)* qva aeqvatione reducta *(2)* vel *L* 21 duae *L ändert Hrsg.*

impossibile futurum sequitur etiam novam ita atque admirandam sane haberi methodum curvas diversas reducendi ad se invicem.

Illud quoque considerandum: Problemata talia de punctis fixis nova esse nec quod sciam hactenus proposita. Si quis porro curvam quaerat in qua sine ullo calculo ex aliquo puncto fixo jam in ipsa curva dato, ut vertice, centro, polo, centro gravitatis, vertice aliove puncto alterius cujusdam curvae similis, aut etiam cognatae veluti centro circuli generatoris, etc. hoc eveniat; is eo ipso simpliciorem quandam descriptionem propositae curvae repererit.

Caeterum si punctum describens non sit fixum, sed mutabile potest tamen ope ejus describi curva nostra, modo jam non ut hactenus recta a puncto contactus curvae describentis ad punctum respondens curvae descriptae; pro perpendiculari curvae descriptae habeatur; sed recta perpendicularis ad rectam duos puncti describentis situs, seu duo curvae puncta proxima jungentem, quae Tangenti curvae describentis regulae ita occurrat; ut rectae inter punctum occursus perpendicularis ad curvam descriptam (quod jam aliud a puncto contactus curvae describentis et plani in quo volvitur) et punctum ordinatae ex curva descripta ad planum vel potius ad rectam seu regulam in qua fit volutio interceptae sint ordinatis ipsis reciproce proportionales. Hinc rursus patet mobilitatem punctis B, (vide fig. 5) tam variis modis posse fingi, ut plurimarum curvarum ope eadem descriptio habeatur; et quod hinc sequitur eae curvae reducantur ad se invicem. Videndum itaque in primis in hoc exemplo: an ne idem praestari possit ope curvarum: Circularis, (descripta quadam quasi cycloeide) parabolicae, (descripta quasi Trochoeide parabolica) Ellipticae, Hyperbolicae; ita enim sequeretur omnes illas curvas ad se invicem reduci, et omnium curvarum conicarum dimensionem, et per consequens et Hyperbolae quadraturam ex quadratura Circuli pendere: mira profecto inquisitionis ratione.

Hinc apparet quantam dent lucem novae ejusmodi et intentatae inquisitiones.

Superest inquirendum an alia quoque problemata intractabilia seu methodi Tangentium inversae reduci possint ad curvarum in rectum extensiones; hoc enim posito non analytice quidem at geometrice tamen habentur soluta. Sed de hoc scheda peculiari.

2 f. invicem. *(1)* Sed et anteqvam hinc abeamus notandum est *(2)* Illud *L* 4 hactenus | in usum aut *gestr.* | proposita *L* 13 describentis *(1)* plano *(2)* regulae *L* 14 inter *(1)* punctum contactus | curvae describentis *erg.* | et occursus | perpendicularis *erg.* | interceptae sint ordinate *(2)* punctum *L* 16 f. volutio *(1)* | sit *streicht Hrsg.* | ipsi ordinat *(2)* interceptae *L*

18 fig. 5: s. o. Fig. 3. 28 scheda peculiari: N. 16.

Caeterum si quando ejusmodi methodus inversa Tangentium qualis hic exemplum dedi succedat analytice, ut in eo exemplo, ubi quaesivi crementa ordinatis reciproce proportionalia, (quod evenit in parabola) tunc etiam reduci potest problema ad alterius curvae volutionem; imo plurium diversarum; quarum omnium proinde habebitur dimensio. Videndum an qualibet figura data alia haberi possit cujus volutione describatur, uti data qualibet analytica alia haberi potest cujus evolutione describatur: Cum volutio et evolutio ita differant ut in volutione censentur planum immotum, et curva moveri, at in evolutione contra curva immota et planum moveri; sumto utrobique puncto fixo (vel etiam certa ratione mobili) describente.

3 ad *(1)* aliud simile *(2)* alterius *L*

2 exemplo: s. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, dat. Dezember 1674, VII, 3 N. 39 S. 560–562. 5 Videndum: vgl. N. 17 Teil 2.

16. PROBLEMATA METHODI TANGENTIUM INVERSAE

[1. – 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S. Geringe Textverluste durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 824

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück schließt unmittelbar an N. 15 an.

Xb. 1674.

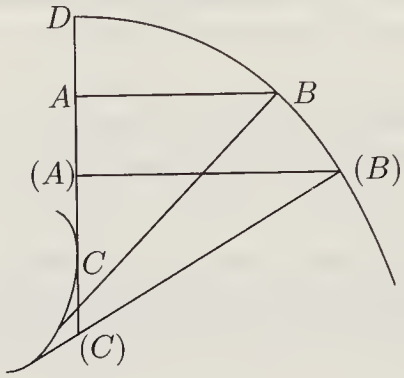
Problemata Methodi Tangentium inversae ad Geometricas constructiones reducta per applicationes curvarum.
Adde eodem mense Schediasma:
De Methodo Tangentium inversa exemplum
cujus schediasmatis istud velut continuatio est:

Schediasmate illo ostendi quomodo omnia problemata methodi tangentium inversae, reducantur ad constructiones Geometricas (: per applicationes curvarum ad planum :) in quibus functio aliqua datur ex data ordinata; nulla abscissae mentione. Superest ut indagemus casus in quibus functio aliqua datur ex data abscissa nulla ordinatae mentione. Quod fit quotiescunque quaeritur aliqua quadratura. Haec problemata semper aut saltem plerumque reduci possunt ad duas radices aequales; sed difficilius ad constructiones Geometricas at priora facilius ad constructiones Geometricas, at non nisi per ipsas ad Calculum duarum radicum aequalium.

Quaeritur curva $B(B)$ ita ut sumta directrice $DA(A)$ ductisque ordinatis seu perpendicularibus ad directricem $AB, (A)(B)$ et perpendicularibus ad curvam, $BC, (B)(C)$ ipsae AC sint ipsis $DA, D(A)$ (: sumto quodam puncto D constante sive fixo in recta

8f. problemata ... curvarum *erg. L*

11 *De ... exemplum*: N. 15.



[*Fig. 1*]

directrice :) reciproce proportionales. Dubium nullum est pendere hoc problema ex quadratura Hyperbolae, vel ex volutione aut evolutione curvae parabolicae. Quorum prius ⟨statim⟩ ostendit analysis inventorum meorum, posterius patet ex inventis Heuratii sed per synthesin. Quod si ergo generaliter ex data relatione ipsarum AC ad ipsas AD inveniri potest curva construens; poterunt omnes quadraturae reduci ad extensiones curvarum quo post ipsas quadraturas analyticas nihil magis optem in Geometria; ita enim omnes quadraturae Geometrice habebuntur. Loco autem volutionum videntur hic adhibendae evolutiones.

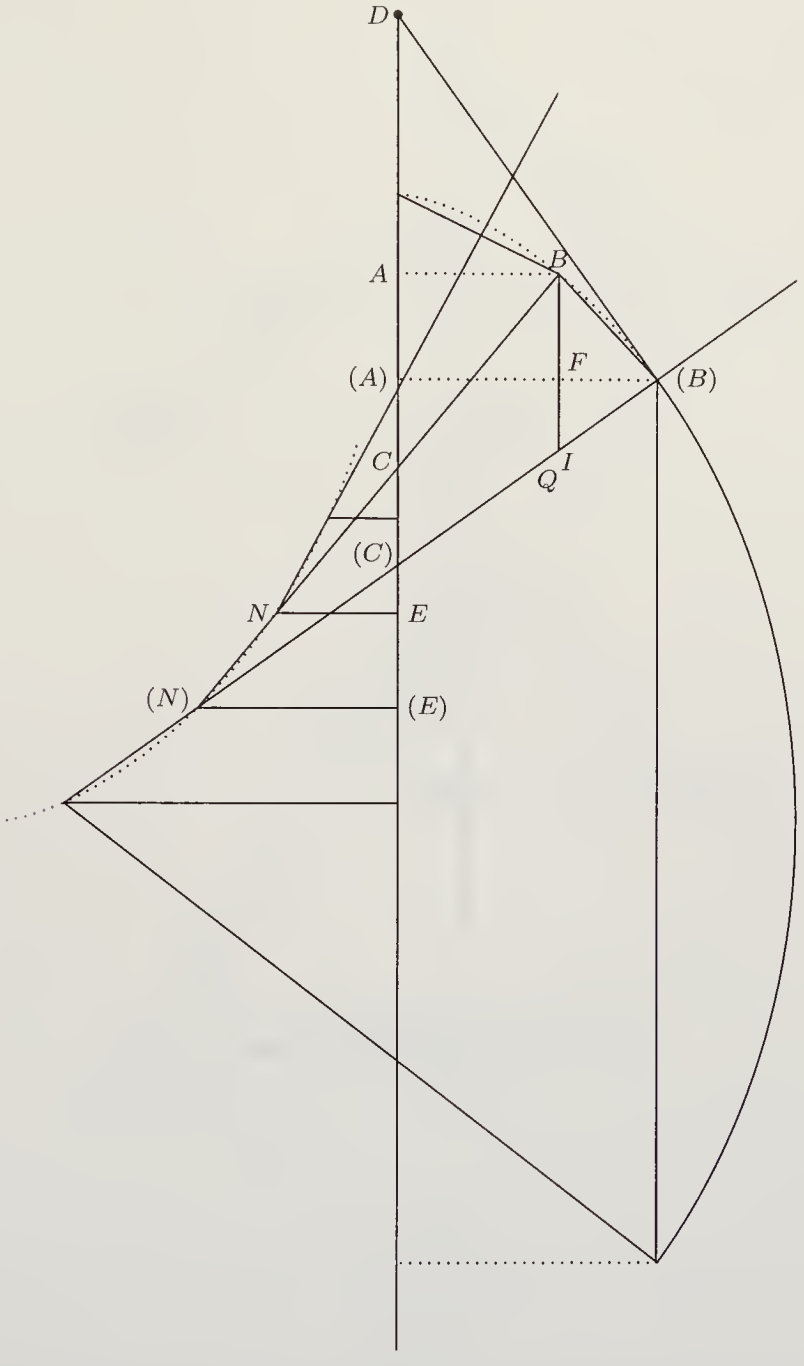
---

2 *Nebenbetrachtung:* $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a}{\frac{1}{a}}$. Ergo $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a^2}{1}$. $\frac{e}{f} \sqcap \frac{a^2}{1}$. Ergo ⟨ita⟩ $e \sqcap \frac{a^2 f}{1}$. Ergo $e \sqcap \frac{a^2}{\frac{1}{f}}$.

6 ad *(1)* constructiones curv *(2)* extensiones *L*

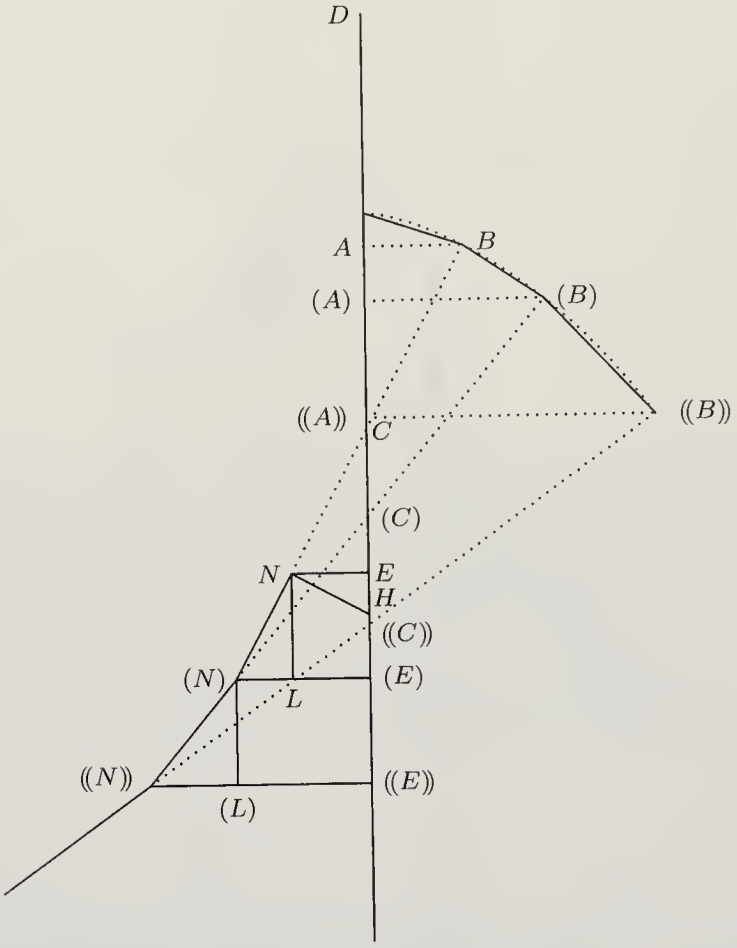
---

4 inventorum meorum: Leibniz untersucht die Rollkurve der Parabel in VII, 3 N. 38_{11-14}; vgl. im vorliegenden Band N. 19 sowie Cc 2, Nr. 827. — ex inventis Heuratii: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520.

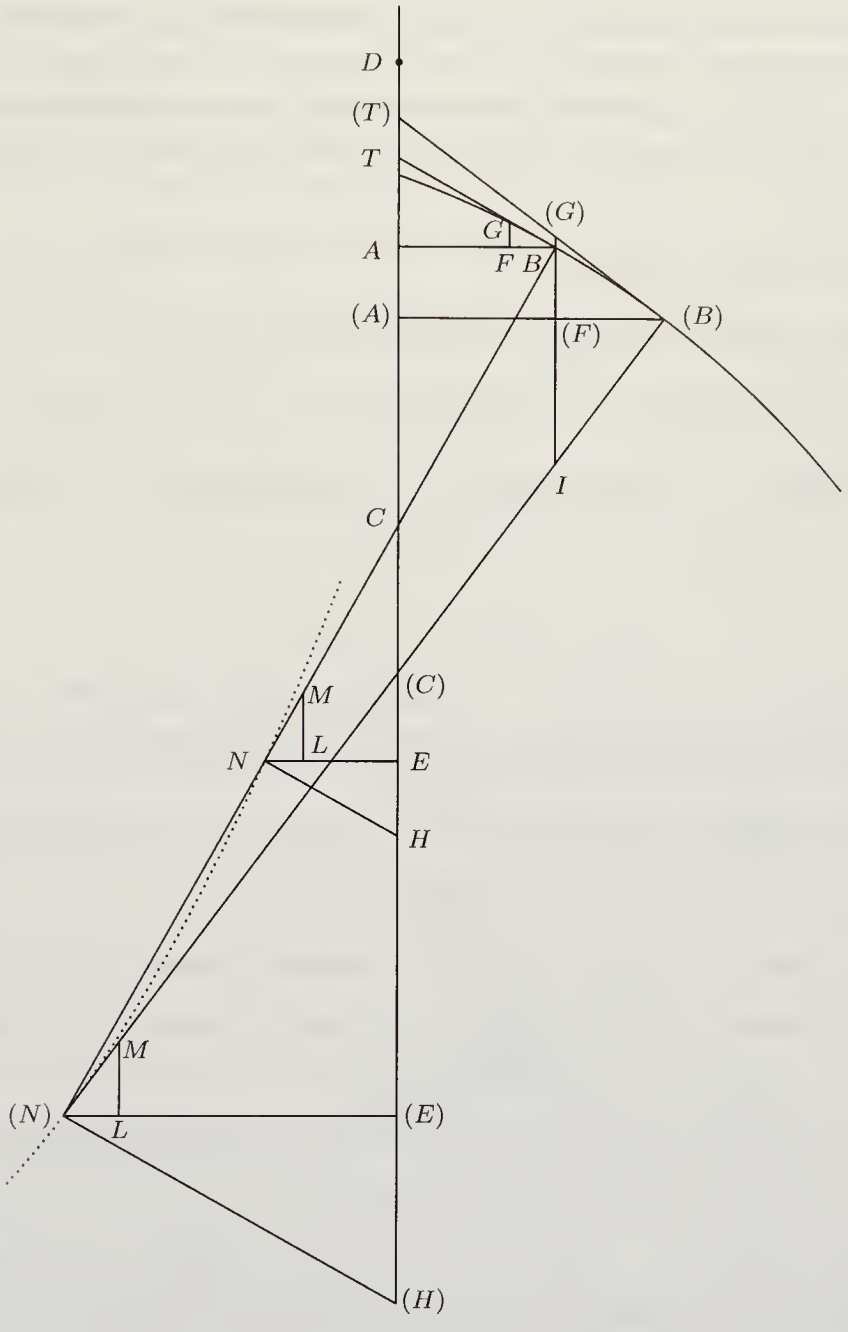


[*Fig. 2a, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 2a*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 2b, tlw. Blindzeichnung*]



[*Fig. 2c*]

1 *Fig. 2c*: Leibniz orientiert sich an der Figur in Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 83; er verwendet wie Huygens in der Figur und im zugehörigen Text als Bezeichnung für die Punkte der Evolute zunächst $D, (D)$ und ändert dann zu $N, (N)$.

Esto curva cujus puncta $N(N)$ et alia cujus puncta $B(B)$, directrix utrique communis DAE. Ordinatae prioris NE, posterioris BA, perpendiculares prioris NH posterioris BC. Tangentes prioris NC posterioris BT. et $N.C.B.$ puncta sunt in una recta ex hypothesi, ideoque BT et NH parallelae. Porro investigemus ante omnia relationem quae est inter $E(E)$ et $A(A)$.

Omnes primas nempe has: $\underset{b}{NB.}\ \underset{c}{NC.}\ \underset{e}{NE.}\ \underset{n}{N(N).}\ \underset{\lambda}{E(E)}$ ponamus cognitas, (hic negliguntur signa includentia ob infinitas parvitates): $EC \sqcap \sqrt{c^2 - e^2}$. Jam $N(N)$ ad $E(E) \sqcap \lambda$ ut c ad $\sqrt{c^2 - e^2}$. Ergo $N(N) \sqcap n \sqcap \frac{\lambda c}{\sqrt{c^2 - e^2}}$ et $AB \sqcap e \frown \frac{CB}{NC} \sqcap [e \frown] \frac{b - c}{b}$. Rectas DA ponamus datas $\sqcap x.$ et rectam $A(A)$ vel $(A)((A))$ semper eandem

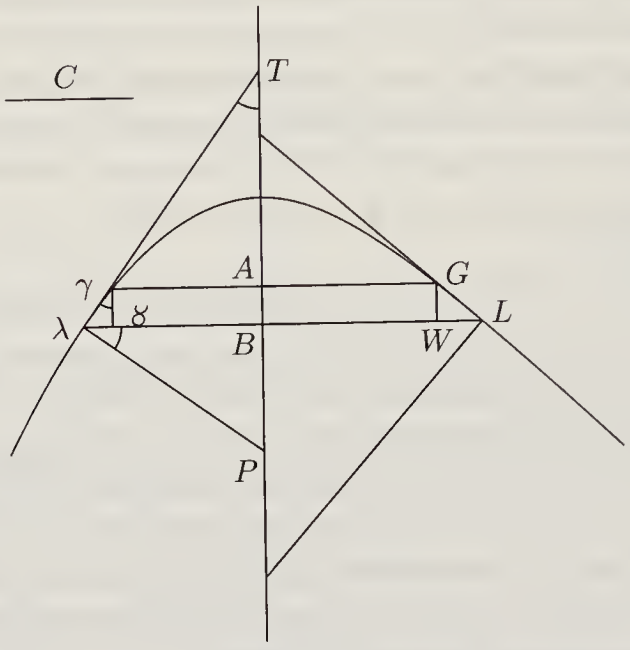
1 puncta *(1)* D(D) *(2)* N(N) *L* 5 f. et A(A). *(1)* | Sane *erg.* | Esto NB ⊓ b. N(N) ⊓ n. fiet: *(a)* NB vel N(B) ⊓ $b + \frac{yn}{b}$ sive $b + \frac{n}{\infty}$ *(aa)* $\frac{e}{n} \sqcap \frac{C(E)}{\quad}$ *(bb)* $\frac{E(E)}{N(N)} \sqcap \frac{C(E)}{CN}$ qvae CN velut data appelletur c, et fiet $C(E) \sqcap \frac{E(E) \frown c}{N(N)}$ datur porro et CB ⊓ ∓b ± c. Datur et NE ⊓ ν unde scilicet calculum incipimus. datur ergo et AB. Nam est $\frac{AB}{NE \sqcap \nu} \sqcap \frac{CB \sqcap \mp b \pm c}{c \sqcap NC}$. Ergo AB ⊓ ∓b±c, ⌢ *(aaa)* $\frac{n}{c}$ *(bbb)* $\frac{N(N)}{C}$ sit B(B) ⊓ β. *(aaaa)* | NL ⊓ *streicht Hrsg.* | λ *(bbbb)* | E(E) ⊓ λ. *streicht Hrsg.* | Rectius ita | Porro cum Triangula NL(N) et CEN sunt similia erit $\frac{N(N)}{N(L)} \sqcap \frac{NC \sqcap \not{c}}{\frac{E(E) \frown \not{c}}{N(N)}}$ *erg. u. gestr.* | *(2)* omnes *L* 6 f. cognitas, *(1)* | erit CE ad EN *streicht Hrsg.* | (hic negliguntur signa includentia ob infinitas parvitates) ut NL ⊓ E(E) ⊓ λ ad (N)L, seu λ ad $\sqrt{n^2 - \lambda^2}$ sive $EC \sqcap \frac{\lambda n}{\sqrt{n^2 - \lambda^2}}$ Jam alias $EC \sqcap \sqrt{c^2 - e^2}$ *(2)* (hic ... parvitates) | : *erg. Hrsg.* | $EC \sqcap \sqrt{c^2 - e^2}$ *L* 8 NL ⊓ λ *L ändert Hrsg.* 9 $\frac{b - c}{b}$ *(1)* demonstravit jam Hugenius: *(a)* rectam A(A) esse *(b)* cum recta A(A) sit ad rectam C(C) in composita ratione ex rationibus *(2)* Rectas *L*

18 demonstravit jam Hugenius: Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 82; vgl. die zugehörigen Randbemerkungen von Leibniz in VII, 4 N. 2 S. 35 f.

esse β. et rectam AC vel $A(C)$ semper dari $\sqcap y$, dabitur et semper $C(C)$ vel $(C)((C))$ appellanda ω. Datur recta DA vel $D(A)$. Datur $A(A) \sqcap (A)((A))$ etc. Datur et recta AC, vel $(A)(C)$. Datur ergo et $D(C)$ vel $D\langle\text{—}\rangle$. Quaeritur valor ipsius NE vel $(N)(E)$. quam ponamus datam, ponamus et datam longitudinem cujuslibet NB, et progressionem ipsarum $N(N)$ atque ex sumtis omnibus NB, NE, DA, eorumque differentiis $N(N), NL, A(A)$ quaeratur AC. Esto $NE \sqcap y$. $DE \sqcap x$. $EC \sqcap l$. $NC \sqcap \sqrt{y^2 + l^2}$. $E(E) \sqcap NL \sqcap \lambda$. Ergo $N(N) \sqcap \frac{NC \frown \lambda}{l}$. Breviter res huc redit, ex data relatione AC ad DA, quaeritur relatio ipsarum AB ad DA, quae inveniretur inventa relatione ipsarum NE ad DE. et ponendo N. esse puncta curvae cujus evolutione describatur curva punctorum B. Itaque omissis tantisper ipsis AB quaeramus NE ex DA et AC. Quod ut fiat facilius inverso modo sumta NE et ejus producta EC inde quaeramus AC. Ejus inventae valorem conferendo cum valore ejus jam noto eliminabitur prod⟨ucta⟩ l. et habebitur NE. ex DA. Sed hoc procederet ita si ad inveniendam AB ex NE, non opus esset valore NB seu curvae N in rectum extensione. Qua cum opus sit habebitur aequatio trium incognitarum DA. NB. NE. Non ergo sic haberi exitus potest.

Sit curva GL cujus ordinatae AG. BL. Triangulum characteristicum GWL. Sit alia curva $\gamma\lambda$, cujus o⟨rdi⟩natae $A\gamma, B\lambda$. $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ characteristicum $\gamma\delta\lambda$. Pone esse rectam constantem $[C]$ et rectangulum $C \frown \gamma\lambda \sqcap BL \frown AB$ erunt Elementa Curvae homogenea Elementis figurae $GABLG$ et rectangulum sub curva et recta C. aequale spatio figurae

1 f. appellanda ω. *(1)* | porro *streicht Hrsg.* | $\frac{\text{C(C)}}{\text{A(A)} \sqcap \text{B(F)}} \sqcap \frac{\text{BI}}{\text{C(C)}} \sqcap \frac{\text{BI}}{\text{BF} \sqcap \text{A(A)}} \frown \frac{\text{BF} \sqcap \text{A(A)}}{\text{C(C)}}$ *(a)* Sunt autem *(b)* Est autem (A)(C) ⌢ A(A) $\sqcap \frac{(\text{A})(\text{B})^2 - \text{AB}^2}{2}$ et FB $\sqcap$ (A)(B) − AB *(aa)* erit $\text{FB}^2 \sqcap (\text{A})(\text{B})^2 - 2(\text{A})(\text{B}) \frown \text{AB}$ *(bb)* Ergo $\frac{(\text{A})(\text{C}) \frown \text{A(A)}}{\text{FB}} \sqcap \frac{(\text{A})(\text{B}) + \text{AB}}{2} \sqcap \frac{2\text{AB} + \text{FB}}{2}$. Ergo AC ⌢ A(A) $\sqcap$ | 2 *gestr.* | AB ⌢ FB seu $\frac{\text{AC}}{\text{AB}} \sqcap \frac{\text{FB}}{\text{A(A)}}$ sed hoc dudum scimus. Jam ut tandem ad calculum sive ratiocinationem veniamus *(aaa)* CI *(bbb)* 2(A)(C) ⌢ A(A) $\sqcap (\text{A})(\text{B})^2 - \text{AB}^2$. Jam FB^2 *(aaaa)* $\sqcap (\text{A})(\text{B})^2 - 2$ *(bbbb)* $\sqcap$ *(aaaaa)* $\text{AB}^2 + \text{AB}$ *(bbbbb)* $\boxed{\text{AB}^2} + 2\text{AB} \frown \text{FB}\boxed{+\text{FB}^2}\boxed{-\text{AB}^2}$ *(2)* Datur L 7 $\sqcap \frac{\text{NC} \frown \lambda}{\text{l}}$. *(1)* porro NB *(a)* datur *(b)* supponitur dari appelletur ξ *(2)* Breviter L 10 NA L *ändert Hrsg.*



[*Fig. 3*]

respondenti. Haec ex Heuratii invento. Quaeritur ergo data figura invenire curvam ei homogeneam seu methodus inveniendi [curvam] cujus Elementa sunt in data progressione.

$\frac{\lambda\gamma}{\beta} \sqcap \frac{\lambda P}{\lambda B}$. Ergo $\lambda B \sqcap \frac{\beta \frown \lambda P}{\lambda\gamma}$. sive $\frac{\lambda B}{\lambda P} \sqcap \frac{\delta\gamma}{\lambda\gamma}$.

Problema ergo huc redit, data ratione perpendicularis ad ordinatam, invenire curvam. Problema illi simile, quod resolvi posse ostendi data ratione ordinatae λB ad reductam BP invenire curvam, imo alterum ad alterum potest reduci. Nam $\lambda P \sqcap \lambda B \frown \frac{\lambda\gamma}{\beta}$.

Ergo $BP \sqcap \sqrt{\lambda B^2 \frown \frac{\lambda\gamma^2}{\beta^2} - \lambda B^2} \sqcap \frac{\lambda B}{\beta} \frown \sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}$, itaque erit $\frac{BP}{\lambda B} \sqcap \frac{\sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}}{\beta}$.

datur ergo ratio $\frac{BP}{\lambda B}$. Problema ergo huc redit dato Triangulo characteristico invenire

4 $\frac{\lambda B}{\lambda P} \sqcap \frac{\lambda P}{\lambda\gamma}$ *L ändert Hrsg.*

2 ex Heuratii invento: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 518.

curvam. Imo jam video errorem cum $\lambda\gamma$ non detur nisi relatione ad quasdam abscissas hinc non potest dici dari rationem. Caeterum hinc apparet rem esse aeque difficilem data figura $GABLG$ invenire quadraturam, seu data $\lambda\delta$ invenire λB; et data figura invenire curvam homogeneam seu data $\lambda\gamma$ invenire λB.

Ut per trochoeides solvi possint problemata methodi tangentium inversae, necesse est sine ulla abscissa ex sola ordinata caeteras Trianguli characteristici haberi nempe λB.

Quaerenda est methodus quaedam data figura quaerendi curvam homogeneam licet non analyticam, nam de Analytica res succedere generaliter non potest.

8 non *(1)* Geometricam, nam de Geometrica *(2)* analyticam *L*

17. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLUM SEU INQUISITIO IN METHODUM QUA CARTESIUS INVENIT PROPRIETATES SUARUM OVALIUM LIB. 2. GEOM.

[1. – 24.] Dezember 1674

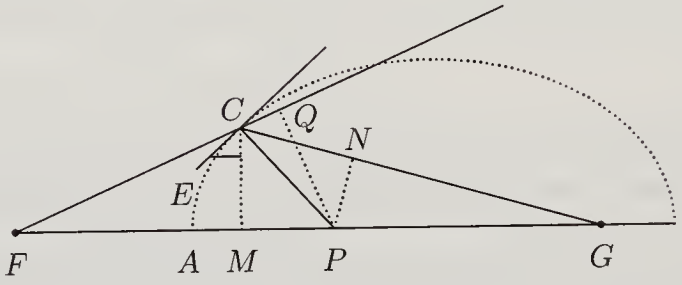
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 1–4. 2 Bog. 2°. 7 S. Bl. 4 v° leer. 2 Teile (Teil 1 auf Bl. 1–2, Teil 2 auf Bl. 3–4). Zusammenhang der Teile durch Kustode gesichert.
Cc 2, Nr. 832

Datierungsgründe: Auf das vorliegende Stück wird in der Studie N. 18 vom 24. Dezember 1674 zurück verwiesen.

[*Teil 1*]

Xb. 1674.

Methodi Tangentium inversae exemplum seu inquisitio in Methodum qua Cartesius invenit proprietates suarum ovalium lib. 2. *Geom.*



[*Fig. 1*]

12 *Darunter:* Adde alia huc pertinentia de descriptione trochoidis curvae.

12–14 *(1)* Methodus Tangentium inversa *(2)* Methodi ... *Geom. erg. L*

13 Methodum: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 50–65, sowie im vorliegenden Band N. 3, 4 u. 14. 15 *Fig. 1*: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43. 16 huc pertinentia: vgl. N. 18 u. N. 19 sowie VII, 3 N. 39 S. 557 f. u. S. 572–574.

Esto Curva AEC, directrix $FAMPG$. ordinata CM. perpendicularis CP. recta ex puncto determinato F ducta ad punctum curvae quodlibet FC. et ab alio puncto determinato ducta CG. Ex P. ducatur perpendicularis ad FC, nempe PQ. et alia ad GC. nempe PN. Ponatur jam evenire, ut PQ sit ad PN, in data ratione $\underline{d}$ ad $\underline{e}$. Ac proinde, ut a Cartesio in dioptricis ostensum est, si AEC sit superficies ex vitro, omnes radios ex puncto F ad quodlibet curvae punctum C. tendentes, refractum iri ad G. posito d ad e esse rationem quae refractiones metitur. Quaeritur jam quaenam sit curva hujus naturae.

Cum Cartesio AM vocemus y. et FC vocemus $c+z$. Esto $AF \sqcap f$. Ergo $FM \sqcap f+y$, $GA \sqcap b$. Triangula rectangula PFQ et CMF similia sunt unde $\frac{CF}{CM} \sqcap \frac{FP}{PQ}$ unde $PQ \sqcap \frac{FP \frown CM}{CF}$. Item $\bigtriangledown^{\text{la}}$ rectangula PNG et CMG. Unde $PN \sqcap \frac{GP \frown CM}{CG}$. $CM \sqcap \sqrt{\begin{matrix} z^2+2cz+c^2-y^2-2fy. \\ -f^2 \end{matrix}}$.

$\frac{PQ}{PN} \sqcap \frac{d}{e} \sqcap \frac{FP \frown \cancel{CM}}{CF} \smile \frac{GP \frown \cancel{CM}}{CG} \sqcap \frac{FP \frown CG}{CF \frown GP} \sqcap \frac{d}{e}$.

Jam $FP \sqcap f+v$. $MG \sqcap b-y$. $CG^2 \sqcap \begin{matrix} z^2+2cz+c^2 \boxed{-y^2} -2fy+b^2-2by\boxed{+y^2}. \\ -f^2 \end{matrix}$

$GP \sqcap b-v$. Ergo $e, \frown f+v, \frown \sqrt{z^2+2cz-2fy+c^2} \sqcap c+z, \frown d, \frown b-v$ sive

$$\begin{matrix} z^2+2cz-2fy+c^2 \\ -2b..-f^2 \\ -b^2 \end{matrix} \sqcap \frac{c+z, d, b-v}{e, f+v}, \square. \odot$$

10 $\sqcap \frac{\text{GP} \frown \text{CM}}{\text{CG}}$. *(1)* FM ⊓ f *(2)* CM ⊓ *(a)* $\boxed{\text{c}^2} - 2\text{cz} + \text{z}^2\boxed{-\text{c}^2} - 2\text{cy} - \text{y}^2$ *(b)* c^2 *(c)* $2\text{z}^2 - 2$ *(3)* CM *L*

5 in dioptricis: Descartes behandelt die Ovale in der *Dioptrique* nicht, sondern erwähnt sie nur kurz (s. R. DESCARTES, *La Dioptrique*, 1637, S. 110, bzw. *Dioptrice*, 1644, S. 166; *DO* VI S. 125 bzw. 629 f.). Leibniz bezieht sich vermutlich auf Descartes' Hinweis zum Brechungsgesetz in der *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 58. 8–12 Cum Cartesio ... $\sqcap \frac{d}{e}$: vgl. *a. a. O.*, S. 57–59. Leibniz bezeichnet allerdings die Größe AF sowohl mit c wie mit f. 16 $-b^2$: Es müsste $+b^2$ heißen. Der Fehler geht in die Gleichung ⊙ und über sie in die Überlegungen bis S. 142 Z. 13 ein. Leibniz stellt keinen Fehler fest, da er die Betrachtung ins Qualitative wendet.

Jam $CM^2 + MP^2 \sqcap CP^2$, sive $z^2 + 2cz \boxed{-y^2} - 2fy + c^2 + v^2 - 2vy \boxed{+y^2} \sqcap s^2 - f^2$ ponendo $CP \sqcap s$. Porro his duabus aequationibus junctis elidi poterit y nempe ex priore

$$y \sqcap \frac{-\frac{c+z,\, d,\, b-v,}{e,\, f+v,}\square_{,,} + c^2 + z^2 + 2cz - f^2 - b^2}{+2f + 2b}.$$

Quo valore in posteriorem inserto aequationem, sola incognitarum Capitalium restabit z. Ordinetur ergo aequatio secundum z, ubi duae erunt incognitae incidentes $v.$ et $s.$ quae invenientur conferendo aequationem productam (post elisam y) cum aequatione duarum radicum aequalium $z^2 - 2ez + e^2$. Atque ita invenietur v, quod sufficit. Inventus valor ipsius $v.$ inseratur in aequatione $\odot.$ et habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z et y, nempe capitales, et habebitur aequatio naturam explicans figurae quaesitae, unde et modus eam describendi non difficulter habetur. Ex his apparet inquisitionem istam methodi tangentium inversae esse ex facillimis, reducitur enim ad aequationem unius incognitae capitalis ad duas radices aequales determinandae, duabus existentibus incognitis incidentibus. Eadem methodo non dubitem, quae a Cartesio omissa sunt.

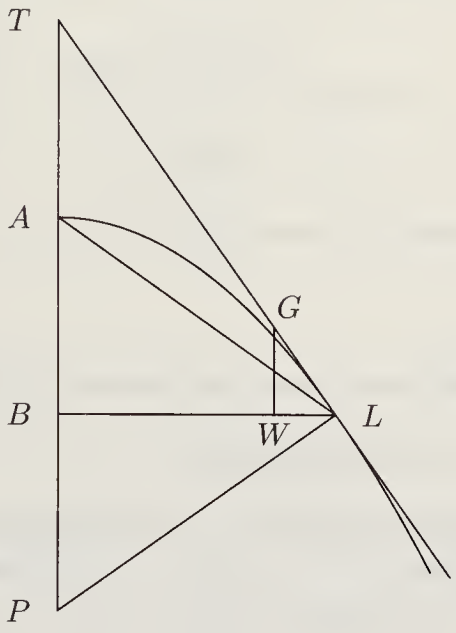
Scilicet cum una ex vitri superficiebus data est, modo illa sit aut plana, aut a circulo aut sectionibus Conicis effecta, quomodo altera superficies confici debeat, ut omnes radios ab uno puncto venientes rursus ad aliud punctum colligat. De quo ille[:] *malo alios id quaerere, ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum repererint, eo pluris inventionem rerum hic demonstratarum aestiment.*

Ego ita arbitror, id quaerendum potius, ut superficiem in qua non tantum id in uno puncto dato contingat, sed ut caetera quoque puncta parum inde dissita quam proxime ejusdem sint naturae, id est in alio puncto sensibili omnes radios colligant. Et quaerenda est ejusmodi circularium compositio, quae id proxime praestet. Quoniam autem refractiones sunt inaequales, ut a Neutonio demonstratum est, hinc omni cura in id incumbendum, ut specula ad rem pertinentia elaborentur, eaque quod sufficere arbitror circularia. In-

11 capitalis *(1)* ad methodum tangentium inversam reducendae *(2)* ad *L* 17 repererint *(1)* tanto magis *(2)* eo *L*

8 habebitur: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10. 13 a Cartesio omissa: vgl. *a. a. O.*, S. 57, 59 u. 65. 14–18 Scilicet ... *aestiment*: vgl. *a. a. O.*, S. 65. 23 a Neutonio: vgl. I. NEWTON, *New theory about light and colours*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 80 vom 19./29. Februar 1671/1672, S. 3075–3087, insbesondere S. 3079 und S. 3081.

quirendum etiam an inaequalitas refractionis ad regulam revocari possit, et figura aliqua ei accommodari. Sed in haec alias inquiremus, nunc ad Methodum Tangentium inversam redeo; quam nemo hactenus tradidit; cum sit tamen apex Geometriae.



[*Fig. 2*]

Exempli causa quaeritur figura, in qua c r e m e n t a sint in ratione ordinatarum reciproca seu $WL \sqcap \frac{\beta a}{y}$. $BL \sqcap y$. $\frac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \frac{BP}{BL \sqcap y}$ sive $\frac{\frac{\beta a}{y}}{\beta} \sqcap \frac{BP}{y}$. unde $BP \sqcap a$. Quaerenda ergo est figura in qua BP sit semper constans; hoc per quadraturas nullo negotio fit, quia Methodus tangentium inversa reducitur ad quadraturas. Nam semiquadrata ipsarum BL sunt summae omnium BP. Sed ut sine quadraturis idem tentemus

5 qva *(1)* diffe *(2)* c r e m e n t a *L* 6 seu *(1)* WL $\sqcap \frac{\beta a^2}{y^2}$. ponendo BL $\sqcap$ y. *(a)* W *(b)* $\frac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \frac{BP}{BL \sqcap y}$, erit: $\frac{\frac{\beta a^2}{y^2}}{\beta} \sqcap \frac{BP}{y}$ sive $\frac{a^2}{y} \sqcap BP$ *(2)* WL *L*

2 alias: Eine solche Untersuchung wurde bisher nicht gefunden. 5 f. figura ... reciproca: vgl. VII, 3 N. 39 S. 560–562.

fiet jam $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Item: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Pro y^2 in posteriore substituatur ejus valor ex priore, nempe $s^2 - a^2$, et fiet, $v^2 - 2vx + x^2 \boxed{+s^2} - a^2 \sqcap \boxed{s^2}$. In qua cum s. destruatur, et hoc unum restet, esse scilicet $v - x$ aequale ipsi a. patet nihil hinc duci posse.

Ponatur ergo $WL \sqcap \gamma$. constans, erit $BP \sqcap \frac{WLy}{\beta} \sqcap \frac{\gamma}{\beta}y$. Adeoque $\frac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam etiam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Unde $y^2 \sqcap s^2 - v^2 + 2vx - x^2$ et supra $y^2 \sqcap \frac{s^2}{\frac{\gamma^2}{\beta^2} + 1} \sqcap \frac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2}$ et aequatio fiet nova inter hos duos valores, nempe: $x^2 - 2vx + v^2 \sqcap \begin{matrix} -s^2 \\ +\frac{s^2\beta^2}{\gamma^2+\beta^2} \end{matrix}$ 0. Sed haec quoque aequatio nondum ad duas aequales radices determinari, sive cum hac: $x^2 - 2ex + e^2$ comparari potest. Fieret enim $x^2 - 2vx + v^2 \sqcap 0$. Unde $-s^2 + \frac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap 0$.

Ergo $\gamma^2 + \beta^2 \sqcap \beta^2$. Quod est absurdum. Non ergo ita licet venire ad determinationem. Ergo pro x pone $z + d$. Fiet: $\begin{matrix} z^2 + 2dz + d^2 \\ -2v.. -2vd \\ +v^2 \\ -s^2 \\ +\frac{s^2\beta^2}{\gamma^2+\beta^2} \end{matrix}$. Sed inde sequetur idem.

Quid ergo si ab initio AL vocemus ω. et pro y^2 substituamus $\omega^2 - x^2$ unde ex aequatione $\frac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $\gamma^2\omega^2 - \gamma^2x^2 + \beta^2\omega^2 - \beta^2x^2 \sqcap \beta^2s^2$, et ex altera $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $v^2 - 2vx \boxed{+x^2} + \omega^2 \boxed{-x^2} \sqcap s^2$. Adeoque fiet:

$x \sqcap \frac{-s^2 + \omega^2 + v^2}{2v}$ et $x^2 \sqcap \frac{s^4 - 2s^2\omega^2 - 2s^2v^2, +\omega^4 + 2\omega^2v^2 + v^4}{4v^2}$. Unde

$-2\beta^2.. ..$

$2\textcircled{4}\gamma^2v^2\omega^2 - \gamma^2s^4 + 2\gamma^2s^2\omega^2 + 2\gamma^2s^2v^2 - \gamma^2\omega^4 \boxed{-2\gamma^2v^2\omega^2} - \gamma^2v^4 + 2\textcircled{4}\beta^2v^2\omega^2 \sqcap \boxed{2\textcircled{4}\beta^2v^2s^2}.$

$-\beta^2.. + ..\beta^2.. \quad \boxed{+..\beta^2} - \beta^2 \quad \boxed{-2\beta^2v^2\omega^2} - \beta^2$

1 $v^2 \ldots \sqcap s^2$: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40 f.

Unde ordinando:

$$\omega^4 \ * \ \left\{ \begin{array}{l} +2\gamma^2 v^2 \ \omega^2 \\ +2\gamma^2 s^2 \\ +2\beta^2 s^2 \\ \underline{+2\beta^2 v^2} \\ -\gamma^2 \\ -\beta^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\gamma^2 s^4 & \sqcap 0. \\ -\beta^2 s^4 & \\ -2\beta^2 s^2 v^2 & \\ +2\gamma^2 s^2 v^2 & \\ -\gamma^2 v^4 & \\ \underline{-\beta^2 v^4} & \\ -\gamma^2 & \\ -\beta^2 & \end{array} \right.$$

sive $\omega^4 \ * \ -2v^2 \ \omega^2 \quad +s^4 \qquad \sqcap 0.$

$-2s^2 \qquad +v^4$

$$+\frac{2\beta^2 - 2\gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2} s^2 v^2$$

Unde $\not 4\omega^2 \sqcap \not 4v^2 + \not 4s^2$ multiplicando per numeros progressionis Arithmeticae methodo Huddeniana. Deberet esse $\omega^2 + s^2 \sqcap v^2$.

Sumta jam aequatio $\omega^2 + \quad 2e\omega + e^2$, multiplicetur per $\omega^2 + l\omega + am$[:]

$\omega^2 + \quad l \ .. + am$

$$\left. \begin{array}{l} + am\omega^2 + 2ame\omega + ame^2 \\ + \omega^4 + l\omega^3 + 2le.. + le^2. \\ \quad + 2e... + e^2.. \end{array} \right\} \sqcap 0.$$

Quam aequationem ut cum proposita conferamus, fiet: $l \sqcap -2e.$ quia $l + 2e \sqcap 0.$ Item $le^2 + 2ame \sqcap 0.$ sive $-le \sqcap +2am$ sive $+\not 2e^2 \sqcap \not 2am$, sive $m \sqcap \frac{+e^2}{a}$. Unde $ame^2 \sqcap +e^4.$ et $am + 2le + e^2$ erit $e^2 \ -4e^2 + e^2 \sqcap -2e^2$. Unde aequatio posterior correcta dabit:

13 f. Unde ... multiplicando *(1)* per 1. 2. *(2)* per ... Huddeniana *(a)* debet *(b)* deberet esse $\omega^2 +$ *(aa)* $v^2 \sqcap s^2$ *(bb)* $s^2 \sqcap v^2$ *erg. L* 22 erit *(1)* $+e^2$ *(2)* $\boxed{-e^2} + 2le \boxed{+e^2}$. et $2le \sqcap -4e^2$. unde aeqvatio posterior correcta erit: *(3)* $e^2 \ldots \sqcap -2e^2$ *(a)* $\omega^4 * -4e^2 * -e^4$. *(b)* Unde *L*

13 f. methodo Huddeniana: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516.

$\omega^4 * -2e^2\omega^2 * +e^4$. Quam conferendo priori, fiet: ex Terminis tertiis $v^2 \sqcap e^2 - s^2$. Unde $v^4 \sqcap e^4 - 2e^2s^2 + s^4$. Unde ex ultimis: $s^4 \boxed{+e^4} - 2e^2s^2 + s^4 + \frac{2\beta^2 - 2\gamma^2, \frown e^2s^2 - s^4}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap \boxed{e^4}$.

Divisisque omnibus per s^2, multiplicatisque per $\gamma^2 + \beta^2$, et, pro e ponendo ω, fiet:

$$\begin{array}{ll} +2\gamma^2 s^2 & -2\gamma^2\omega^2, \\ \boxed{\begin{array}{l} +2\beta^2.. \\ -2\beta^2.. \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} -2\beta^2 \\ +2\beta^2 \end{array}} \\ +2\gamma^2.. & -2\gamma^2 \end{array}$$

fiet $4\gamma^2 s^2 \sqcap 4\gamma^2\omega^2$, sive $s \sqcap \omega$. Quod significat $AL.\ TL.\ PL.$ esse aequales, et ideo ipsam AL non curvam esse sed rectam. Imo error aliquis admissus dum adhibeo $\omega^2 + 2e\omega + e^2$, loco $\omega^2 - 2e\omega + e^2$.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & & \omega^2 - & 2e\omega + & e^2 \\ & & & & \omega^2 + & l\omega + & am \\ \hline & & & & +am\omega^2 - & ame\omega + & ame^2 \\ & & + \omega^4 + & l\omega^3 - & 2le.. + & le^2. & \\ & & - 2e... + & e^2.. & & & \end{array}$$

conferenda cum: $\omega^4 \quad * \quad -2v^2\omega^2 \quad * \quad +s^4$

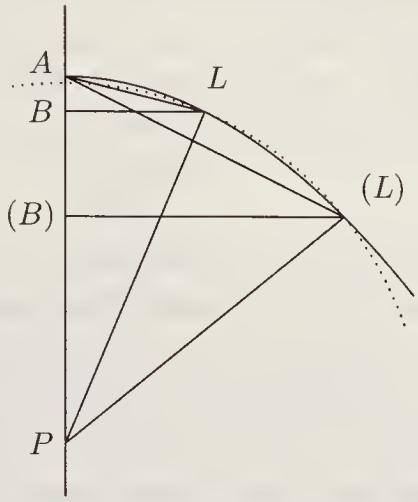
$$\begin{array}{rrr} -2s^2 & & +v^4 \\ & & +\frac{2\beta^2 - 2\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} s^2 v^2. \end{array}$$

Unde $l \sqcap 2e$. $ame \sqcap le^2$, sive $am \sqcap le$. sive $am \sqcap 2e^2$. Unde $ame^2 \sqcap 2e^4$. $am - 2le + e^2 \sqcap 2e^2 - 4e^2 + e^2 \sqcap -e^2$. Unde $e^2 \sqcap 2v^2 + 2s^2$, et $v^2 \sqcap \frac{e^2 - 2s^2}{2}$.

20–147,3 $\sqcap \frac{e^2 - 2s^2}{2}$ *(1)* BP $\sqcap \frac{\gamma}{\beta}$BL. *(a)* $\sqcap \frac{\gamma}{\beta}$ *(b)* (B)P $\sqcap \frac{\gamma}{\beta}$(B)(L) *(2)* | Generalia *erg.*| BP $\sqcap$ AP − AB |(B)P $\sqcap$ AP − A(B) *gestr.*| AB $\sqcap \sqrt{AL^2 - BL^2}$. |A(B) $\sqcap \sqrt{A(L)^2 - (B)(L)^2}$ *gestr.*| *(aa)* itaqve *(bb)* itaqve BP $\sqcap$ AP − $\sqrt{AL^2 - BL^2}$ |(B)P $\sqcap$ AP − $\sqrt{A(L)^2 - (B)(L)^2}$ *gestr.*| Jam L

8 aequales: Die Behauptung stimmt nicht für TL, die Folgerung ist daher nicht richtig. Leibniz vermutet einen Vorzeichenfehler und setzt zu einer neuen Berechnung an. 13 $-ame\omega$: Richtig wäre $-2ame\omega$. Der fehlerhafte Term wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung in Z. 20 aus.

Generalia



[*Fig. 3*]

$BP \sqcap AP - AB$. $AB \sqcap \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Itaque $BP \sqcap AP - \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Jam $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$. Pro PB substituatur ejus valor, fiet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 - BL^2 \sqcap BP^2$. Ergo $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$, faciet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 \boxed{-BL^2 + BL^2} \sqcap PL^2$ sive $AP^2 + AL^2 - PL^2 \sqcap 2AP \frown \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Unde

$$AP^4 \boxed{+2AP^2, AL^2} - 2AP^2, PL^2,, + AL^4 - 2AL^2, PL^2 + PL^4 \sqcap$$
$$2 \textcircled{4} AP^2, AL^2 - 4AP^2, BL^2,$$

sive $v^4 - 2v^2s^2 + \omega^4 - 2\omega^2s^2 + s^4 - 2v^2\omega^2 + 4v^2y^2$ [$\sqcap$ 0]. Et haec quidem aequatio omnibus curvis est communis. Nam $BP \sqcap v - AB$. $AB \sqcap \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Ergo $BP \sqcap v - \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Jam $BP^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo pro BP sumendo ejus valorem, erit $v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 \boxed{-y^2, +y^2} \sqcap s^2$. Adeoque $\omega^2 + v^2 - s^2 \sqcap 2v\sqrt{\omega^2 - y^2}$. sive

$$\begin{array}{lllll} & - & & & \\ \omega^4 & \textcircled{+} & 2v^2\omega^2 + v^4 & \sqcap & \boxed{4v^2\omega^2} - 4v^2y^2 \\ & - & 2s^2.. \quad - 2v^2s^2 & & \\ & & + s^4 & & \end{array}$$

ut ante, ut de calculo possimus esse huc usque securi.

4 PL^2. *(1)* et $P(B)^2 + (B)(L)^2 \sqcap PL^2$ Unde $AL^2 - BL^2 + BL^2$ *(2)* Iam *(3)* pro L 9 f. aeqvatio | omnis *ändert Hrsg.* | curvis L

Nunc praeter hanc aequationem alia quaerenda est, ex natura problematis dati, ut scilicet alterutra incognitarum capitalium, ω, vel y. elidatur. Ponamus ergo BP esse quantitatem constantem, fiet: $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo $y^2 \sqcap s^2 - a^2$, unde fiet aequatio

$$\begin{array}{llll} \omega^4 & -2v^2\omega^2 & +v^4 & \sqcap 0. \\ & -2s^2\,.. & -2v^2s^2 & \\ & & +s^4 & \\ & & \overline{-4s^2v^2} & \\ & & +4a^2v^2 & \end{array}$$

Unde methodo Huddenii fiet: $\not4\omega^2 \sqcap \not4s^2 + \not4v^2$. Figura autem, ut aliunde constat est parabola et in parabola $v^2 \sqcap a^2 + 2ax + x^2$ et $s^2 \sqcap 2ax + a^2$. Ergo $s^2 + v^2 \sqcap 2a^2 + 4ax + x^2$ sed $\omega^2 \sqcap 2ax + x^2$. Fiet ergo aequatio absurda inter $2a^2 + 2\textcircled{4}ax\boxed{+x^2}$, et $\boxed{2ax + x^2}$ seu $2a^2 + 2ax \sqcap 0$. Absurdum.

Causa absurditatis in arduo est, et latet in abditissimis artis Analyticae recessibus. A posteriori sane video ideo quidem has solutiones non sufficere, quia patet, explicationem ipsius y non ingredi in totam aequationem, unde si Huddenii more multiplicetur, manifestum est nihil referre, qualis sit terminus ultimus; is enim semper destruetur, ideoque nihil quoque referet qualis sit y. Quodsi loco aequationis $a^2 + y^2 \sqcap s^2$, hanc adhibeas, $a^2 \sqcap v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 - y^2$. Sive $2\textcircled{4}v^2\omega^2 - 2\textcircled{4}v^2y^2 \sqcap \omega^2 + v^2 - a^2 - y^2, \square.$ $\sqcap$

$$\begin{array}{llll} \omega^4 & \boxed{+2v^2}\omega^2 + v^4 & \boxed{-2v^2y^2} + y^4 - 2y^2\omega^2 & \sqcap 0. \\ & -2a^2 \quad -2a^2v^2 & -2a^2\,.. & \\ & \quad +a^4 & & \\ & -2v^2\,.. & +2v^2\,.. & \end{array}$$

Possumus ergo etiam ω destruere, relicto y si velimus.

An forte in locum literae capitalis seu duos habentis valores aequales non licet substituere literas ejusdem valoris, et tamen determinare ad duas radices aequales. Sane

4+9 v^4 | $\sqcap$ 0 *erg. Hrsg.* |. *(1)* Sed hanc aeqvationem secundum ω ordinatam, conferendam cum *(2)* Unde *L* 17 adhibeas, *(1)* $a^2 + y^2$ *(2)* $a^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2$, aut etiam si duas has aeqvationes jungas inter se, fiet: $2a^2 + y^2 \sqcap s^2 + v^2 - 2vx + x^2$ *(3)* a^2 *L*

---

7 f. $-4s^2v^2 + 4a^2v^2$: Richtig wäre $+4s^2v^2 - 4a^2v^2$. 17 qualis sit y: Die folgende Gleichungskette enthält aber den gemischten Term $-2y^2\omega^2$. 18 Sive: Leibniz rechnet im Folgenden fortlaufend. Den letzten Schritt der Umformung der Gleichungskette hat er nicht markiert. Der letzte Term in Z. 20 müsste $+2a^2y^2$ lauten.

Cartesius ait duabus datis aequationibus una $x^2 + v^2 - 2vy + y^2 - s^2$, et altera naturam curvae exprimente, valorem $v - \sqrt{s^2 - x^2}$ pro y. substitui posse, sed hujus rei ratio est, quia idem est ac si valor alius ipsius y. ex altera aequatione sumtus substitueretur. Cartesio hoc vel artificiose, vel quod ita unam semper regulam dare posset pro valore x. vel y. dissimulante. Necesse est ergo unam minimum aequationem dari in qua vel nullae sunt literae duplicis valoris, vel non nisi literae duplicis valoris, (una cum cognitis seu datis) sed haec conjicio.

NB. potest fieri ut circulo curvam secante aequatio inde orta duas habeat radices aequales, et tamen circulus curvam non tangat, ut si circulus centro cum centro Ellipseos vel Hyperbolae communi describatur.

Nota aequationes in quibus una tantum incognitarum capitalium adhiberi nequeunt, eo ipso enim incognita capitalis fit dependens ab incidente v. g. in aequatione $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. et cessat habere duos valores.

[*Teil 2*]

Xb. 1674.

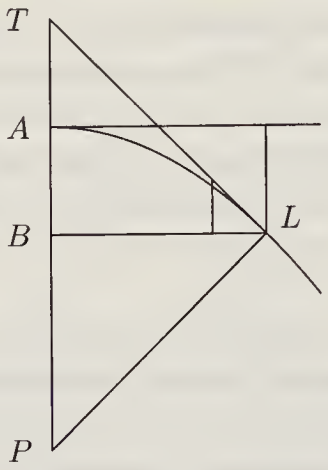
Pars II. inquisitionis in Methodum Cartesii qua invenit proprietates ovalium

Imo haec ratio nihili est, quia idem evenit in qualibet aequatione in methodo tangentium communi reducta ad unam incognitam capitalem. Praeclaro admodum consilio Cartesius adhibuit literam v.

Nam cum opus habeat litera BP, manifestum est ipsam esse duplicem, nam in figura superiore habetur BP, et $(B)P$. Quod si ergo ei dedisset nomen, v. g. p. tunc habuisset tres literas duplicis valoris, p. x. y. At litera v, seu AP, est semper eadem, ergo $BP \sqcap v - x$. Patet non nisi duas esse literas duorum valorum. Nam v. et s. non nisi unum habent valorem, quando datur aequatio: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. quae est generalis. Et adhuc alia, $v - x \sqcap a$. Fit: $x \sqcap v - a$. et $-2vx \sqcap -2v^2 + 2av$. et $x^2 \sqcap v^2 - 2av + a^2$.

10 f. describatur. *(1)* Sed tunc etiam ipsae x et *(2)* Nota *L* 16 pars II. *(1)* sche *(2)* inqvisitionis ... ovalium *erg. L*

1 ait: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 41. 8 f. radices aequales: Leibniz verwechselt vermutlich Doppelwurzeln mit Schnittpunkten, die symmetrisch zu den Achsen liegen. 20 f. in figura superiore: s. Fig. 3.



[*Fig. 4*]

Unde $\boxed{v^2 - 2v^2 + 2av + v^2 - 2av} + a^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Quam patet amplius determinari non posse, tunc enim non nisi una incognita restaret.

Quod si elidere velis y. fiet $a + x - v. \sqcap 0$. Et haec si BP sit recta constans cum scilicet AL est parabola.

Quodsi ponamus $BP \sqcap \frac{\gamma}{\beta}y$. tunc AL est linea recta; et fiet: $\frac{\gamma}{\beta}y \sqcap v - x$. Ergo $x \sqcap \frac{v\beta - \gamma y}{\beta}$. Unde $-2vx \sqcap \frac{-2v^2\beta + 2v\gamma y}{\beta}$, et $x^2 \sqcap \frac{v^2\beta^2 - 2v\beta\gamma y + \gamma^2 y^2}{\beta^2}$. Unde

$$\boxed{\beta^2 v^2} \boxed{-2\beta^2 v^2} \boxed{+2\gamma\beta vy} \boxed{+\beta^2 v^2} \boxed{-2\beta\gamma vy} + \gamma^2 y^2 + \beta^2 y^2 - s^2\beta^2 \sqcap 0.$$

Quae rursus non nisi duarum incognitarum[,] non ergo determinabilis.

Hinc ergo satis video hoc quidem casu elidendo x rediri in eadem, quae provenissent non adhibendo $v - x$.

Si sit $\sqrt{2ax} \sqcap v - x$. fiet: $2ax \sqcap v^2 - 2vx + x^2$. et fiet: $2ax + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Adeoque $x \sqcap \frac{s^2 - y^2}{2a}$, et $x^2 \sqcap \frac{s^4 - 2s^2y^2 + y^4}{4a^2}$. Et hunc valorem in aequationem generalem $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ inserendo, quia $-2vx \sqcap \frac{-2vs^2 + 2vy^2}{2a}$, fiet:

2 f. Qvam ... restaret *erg. L* 4 $\sqcap$ 0. *(1)* si eli *(2)* Si ponas BP $\sqcap \frac{\gamma}{\beta}$y $\sqcap$ v − x. *(3)* Et *L*

9 qvae ... determinabilis *erg. L* 12 et *(1)* x $\sqcap$ *(2)* qvae aeqvatio jungatur *(a)* priori ge *(b)* generali: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2$. *(3)* fiet *L*

$$4a^2v^2 - 4as^2v + 4avy^2 + s^4 - 2s^2y^2 + y^4 + 4a^2y^2 - 4a^2s^2. \sqcap 0.$$

et ordinando: ⊙

y^4	$+ 4avy^2$	$+ 4a^2v^2$	$\sqcap 0.$
	$- 2s^2..$	$- 4as^2v$	
	$+ 4a^2..$	$+ s^4$	
		$- 4a^2s^2$	

multiplicando per 4. 2. 0.

4	2	0

methodo Huddeniana, sequetur

$4y^2$	$+ 8av$	$\sqcap 0.$
	$- 4s^2$	
	$+ 8a^2$	

sive dividendo per 4, fiet: ☽

y^2	$+ 2av$	$\sqcap 0.$
	$- s^2$	
	$+ 2a^2$	

ubi in locum ipsius v substituendo $\sqrt{2ax} + x$. fiet: $y^2 + \sqrt{2ax} + x - s^2 + 2a^2 \sqcap 0$.
Multiplicetur aequatio ⊙ adhuc aliter per -2 $\boxed{*-1}$ 0 $\boxed{*+1}$ 2. et fiet:

$2y^4$	$- 8a^2v^2$	$\sqcap 0$	et fiet	☿	y^4	$- 4a^2v^2$	$\sqcap 0,$
	$+ 8as^2v$					$+ 4as^2v$	
	$- 2s^4$					$- s^4$	
	$+ 8a^2s^2$					$+ 4a^2s^2$	

ubi pro $+4as^2v$, ponatur $4as^2\sqrt{2ax} + 4as^2x$ et quia $v^2 \sqcap 2ax + 2x\sqrt{2ax} + x^2$, erit $4a^2v^2 \sqcap 8a^3x + 8a^2x\sqrt{2ax} + 4a^2x^2$, porro ex aeq. ☽, multiplicando per s^2, fiet: $s^4 \sqcap s^2y^2 + 2avs^2 + 2a^2s^2$. Inseratur is valor in aeq. ☿ fiet:

y^4	$- s^2y^2$	$- 2avs^2$	$\sqcap 0$	sive	y^4	$- s^2y^2$	$+ 2avs^2$	$\sqcap 0$
		$- 2a^2s^2$					$+ 2a^2s^2$	
		$- 4a^2v^2$					$- 4a^2v^2$	
		$+ 4avs^2$						
		$+ 4a^2s^2$						

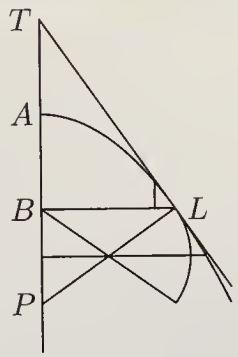
et pro s^2 substituendo $y^2 + 2av + 2a^2$ ex aeq. ☽ fiet ex aeq. ♄ sequens:

20 $+4a^2x^2$, *(1)* | et substitutione facta, erit *streicht Hrsg.* | aeqvatio: $y^4 \sqcap$ *(2)* porro *L*

13 $\sqrt{2ax} + x$: Leibniz vergisst bei der Substitution den Faktor $2a$ vor dem Term. Der Fehler hat keine Auswirkungen auf die weiteren Rechnungen und Überlegungen.

$$y^4 - 4a^2v^2, \; - y^2 \frown y^2 \sqcap 0 \quad \text{sive} \quad \boxed{\begin{array}{cc} + y^4 & + 2avy^2 \\ - y^4 & + 2a^2.. \\ & - 2av.. \\ & - 2a^2.. \end{array}} \begin{array}{l} + 4a^2v^2 \sqcap 0. \\ + 4a^3v \\ + 4a^3v \\ + 4a^4 \end{array}$$
$$+ 2av \quad 2av$$
$$+ 2a^2 \quad 2a^2$$

Quae aequatio est absurda, sequitur enim v, vel x unde v pendet cognitae seu determinatae quantitati aequari, quod est absurdum.



[*Fig. 5*]

Forte ergo error in calculo, quare elaborandus denuo: Figura in qua BP sint $\sqrt{2ax}$ applicatae parabolae, haberi potest Analytice. Nam summa omnium $\sqrt{2ax}$ est $\frac{2}{3}$ maximi $\sqrt{2ax}$ multiplicati per maximum x, seu $\frac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$. Cui aequale pone $\frac{y^2}{2}$ fiet $32ax^3 \sqcap 9y^4$, figura, cujus ordinatarum y, semiquadrata $\frac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$, sunt aequalia summis omnium BP. Nam figura $\frac{32}{9}ax^3, \sqcap y^4$, dabit: $\frac{32}{3}ax^2t \sqcap 4y^4$, unde $t \sqcap \frac{12y^4}{32ax^2} \sqcap \frac{12 \frown \cancel{32}/9 \cancel{ax^3}}{\cancel{32ax^2}} \sqcap \frac{4}{3}x$ ponendo $t \sqcap BT$. Jam $\frac{y^2}{t} \sqcap BP$. Ergo $\frac{4\sqrt{2ax^3}}{3 \frown \frac{4x}{3}} \sqcap \sqrt{2ax}. \sqcap BP$. Ergo $PL^2 \sqcap s^2. \sqcap 2ax + \frac{4x\sqrt{2ax}}{3}$ et $v \sqcap AP \sqcap x + \sqrt{2ax}$. Unde statim dijudicari potest an vera sit aequatio ☽ paginae praecedentis: $y^2 + 2av - s^2 + 2a^2 \sqcap 0$. Inde enim fiet:

$$\underbrace{\frac{4x}{3}\sqrt{2ax},}_{+y^2} + \underbrace{2ax + 2a\sqrt{2ax},}_{+2av} \underbrace{-2ax - \frac{4x\sqrt{2ax}}{3}}_{-s^2} + 2a^2 \sqcap 0.$$

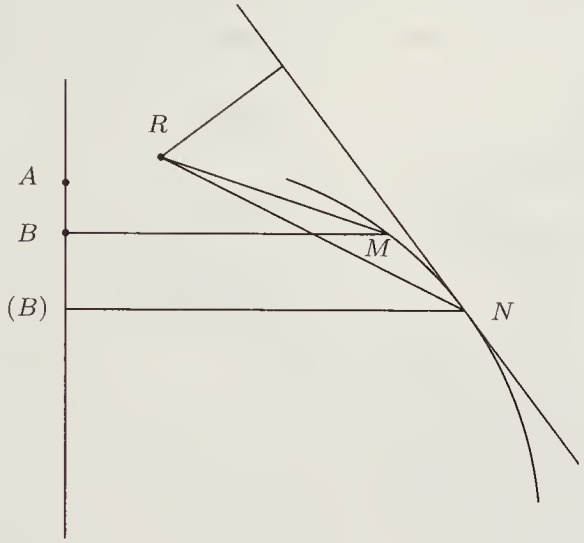
Quae aequatio est absurda. Fiet enim $2a\sqrt{2ax} \sqcap -2a^2$. Itaque error qui si non est in calculo, erit in ratiocinatione, determinatione scilicet ad duas radices aequales.

20–153,1 *Zwischen den beiden Absätzen:* E r r o r.

---

1 sive: In der folgenden Gleichung fehlt der Term $-4a^2v^2$.

Problema: Curvam invenire in qua ipsa PL. relationem habeat cognitam ad AB. Omnes enim ejusmodi curvae sunt Trochoeides. Exempli causa quaeratur curva in qua ipsae PL sint applicatae parabolae seu $\sqrt{2ax}$.



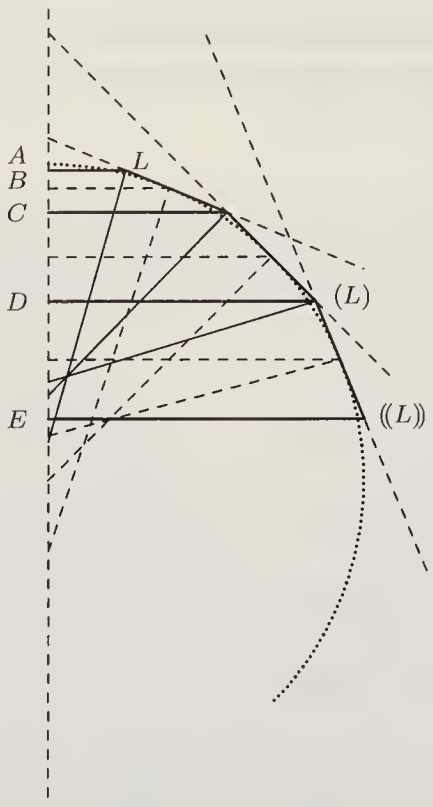
[*Fig. 6*]

Invenienda est alia curva ad quam ex puncto quodam dato seu fixo R ductae rectae RM sint semper applicatae parabolae. Seu sint $\sqrt{2ax}$ ponendo AB vel $A(B)$ esse x. Quod si punctum A et punctum R coincidant[,] curva MN est circumferentia circuli, unde sequitur Cycloeidem satisfacere proposito quod et verum est. Unde illud quoque manifestum plane, esse curvas a se invicem diversas proposito satisfacientes. Hinc sequitur semper inveniri posse curvam, cujus momentum ex dato quodam axe sit datae figurae cognitae homogeneum, quoniam omnes PL constituunt curvae momentum ex AB.

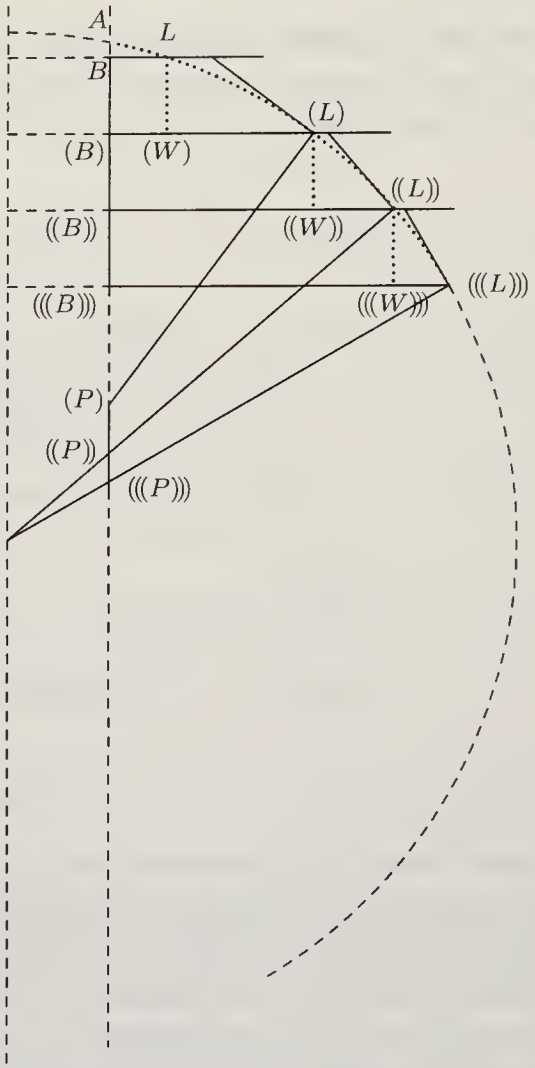
Ope hujus methodi jam in spem erigor rem producendi longius, efficiendique ut quadraturae reduci possint ad curvarum cognitarum dimensiones.

1 problema: *erg. L* 1 f. AB. | semper est in potestate. *streicht Hrsg.* | Omnes *L*

1 Problema: Die ursprüngliche Behauptung (s. Variante zu Z. 1 f.) ist nicht richtig, wie Leibniz im weiteren Verlauf der Untersuchung (s. u. S. 155 Z. 13 – S. 156 Z. 3) erkennt. Er bezeichnet die Aufgabenstellung nachträglich als problema.



[*Fig. 7a, tlw. Blindzeichnung, gestrichen*]



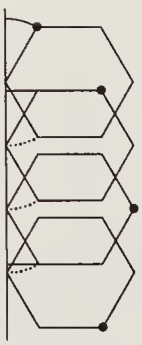
[*Fig. 7b, tlw. Blindzeichnung*]

Nimirum data AP. invenire curvam AL. idem est cum problemate quadraturarum, quod est data BP invenire curvam. Nam data $AP \sqcap v$. datur $BP \sqcap v - x$. Semper enim

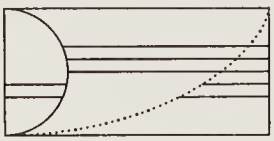
2 f. qvadraturarum, | qvae *ändert Hrsg.* | est data *(1)* BL *(2)* BP L

1 *Fig. 7a, Fig. 7b*: Elemente in Blindzeichnung werden gestrichelt wiedergegeben. Eine weitere gestrichene Vorstufe zu Fig. 7b wird nicht wiedergegeben. Den im Text erwähnten Punkt P und die Normale PL hat Leibniz nicht eingezeichnet.

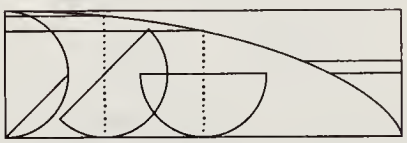
supponitur dari x. Jam si ponamus curvam quaesitam AL. instar trochoeidis describi ab aliqua curva super AP incedente, erunt puncta P, quibus tangit planum AP. et rectae $P(P)$ vel $(P)((P))$ et $((P))(((P)))$ intervalla ipsarum PL. in axe, seu differentiae ipsarum AP. seu latera polygoni infinitanguli id est curvae, provolutae. Ergo AP, erunt horum $(P)((P))$ summae, seu applicatae ipsae Retortarum Trochoeidalium.



[*Fig. 8*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

$\frac{a^2}{x}$. ⌢ $x \sqcap a^2$. Hyperbola dat cycloeidem per centrum seu lineam rectam. $\frac{a^2}{x} + b$⌢ $x \sqcap a^2 + bx$. $a^4 - 2a^2bx + b^2x^2 - x^2$ est aequatio ad Hyperbolam vel Ellipsin, cujus revolutione describetur curva. Habemus ergo methodum figurae cuilibet exhibendi curvam proportionalem. Ergo ex datae Hyperbolae quadratura habetur curva Ellipseos et Hyperbolae.

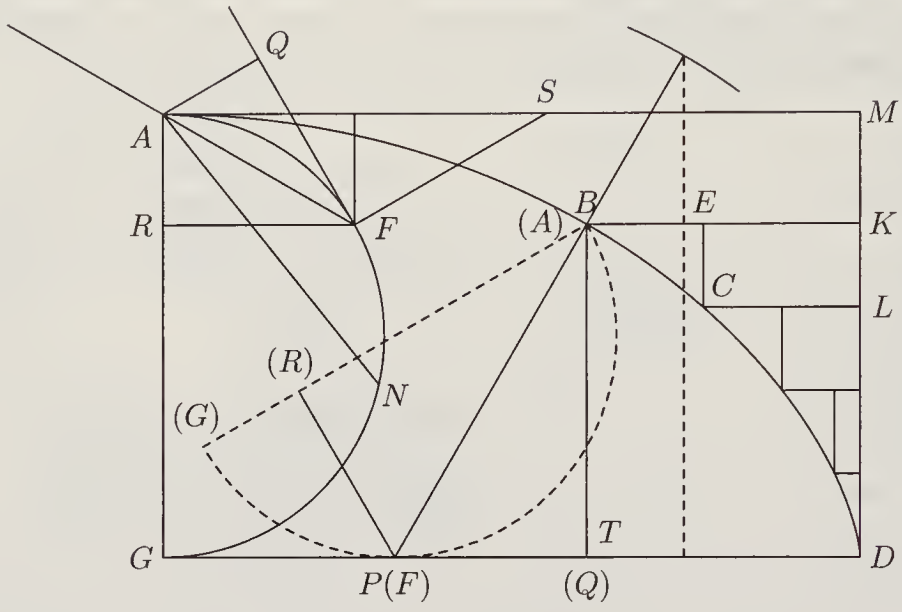
Imo jam video nondum me posse datis perpendicularibus invenire curvam; si datis

8 rectam $\frac{a^2}{x}$ *(1)* – *(a)* a *(b)* b, ⌢ x ⊓ a^2 – *(2)* +b *L*

---

6 f. *Fig. 9, Fig. 10*: Die Kurvenbögen bei Leibniz entsprechen in etwa Zykloidenbögen, die längs der Basis gestreckt wurden; so werden sie in Fig. 9 und 10 wiedergegeben. 8 Hyperbola: Leibniz versucht im Folgenden, die Rechnung von S. 152 Z. 9–12 bzgl. der durch eine Parabelgleichung gegebenen Subnormale auf das Beispiel einer durch eine Hyperbelgleichung gegebenen Subnormale zu übertragen, wobei er Änderungen der angesetzten Gleichung nicht konsequent durchführt. Die Rechnung ist nicht zulässig und führt zu einer falschen Schlussfolgerung. Leibniz bemerkt anschließend den Irrtum in seiner ursprünglichen Behauptung von S. 153 Z. 1 und setzt neu an.

perpendicularibus possem invenire curvam; possem etiam datis curvae laterum progressionibus invenire ejus descriptionem, et data curva invenire aliam cujus ipsa sit Trochoeides.



[*Fig. 11*]

Esto enim curva data $ABCD$, Trochoeides curvae AFG ordinatim applicatae ad oppositam ipsi AG directricem nempe ad DM. sunto BK. CL. quarum habetur progressio, habetur ergo et progressio ipsarum BE differentiarum, quibus in x, seu DL, DK ductis habetur earum momentum ex DG. Ergo habetur progressio perpendicularium a curva ipsis BE homogenea ad DG ductarum. Quod si ergo datis perpendicularibus inveniri potest curva, habebitur curva.

10–157,1 curva. *(1)* At curva illa est eadem cum ipsa AFG qvia BEK ⊓ GNF, et EK ⊓ CL ⊓ GN ponendo enim BP. perpendicularem *(a)* aeqvalem *(b)* aeqvalem AF, posito scilicet punctum A esse describens, erit GP. *(2)* Ex *L*

4 *Fig. 11*: Eine Vorstufe des gestrichelten Halbkreises in Blindzeichnung mit demselben Auflagepunkt aber entgegengesetzt geneigtem Durchmesser wird nicht wiedergegeben. Leibniz hat die Figur auch als Vorzeichnung für Fig. 1 von N. 23 verwendet und wohl dabei die Punktbezeichnungen in Klammern hinzugefügt. In Leibniz' Zeichnung, die möglichst getreu wiedergegeben wird, entspricht die Lage von BP im abgerollten Halbkreis nicht der Lage von AF in der Ausgangsposition. Deshalb gelangt er in S. 157 Z. 1 f. zu den Beziehungen $PD = \widehat{GF}$ und $GP = \widehat{AF}$ statt $PD = \widehat{AF}$ und $GP = \widehat{GF}$. Diese werden von ihm konsequent weiter verwendet, beeinträchtigen die allgemeine Überlegung jedoch nicht.

Ex puncto B ducatur perpendicularis quae erit aequalis AF. Erit PD ⊓ curvae GNF. quia GP ⊓ curvae AF. et GD ⊓ curvae GFA. Ergo perpendiculares Trochoeidis BP sunt rectae ex puncto quodam fixo ut A. figurae describentis, ad quodlibet ejus punctum velut F ductae seu AF, et Reductae PD seu v. sunt portiones Curvae describentis retrorsum sumtae, restat tantum ut investigemus, quid sit BK.

Ut ergo omnia rectius procedant ita faciemus: Curva describens esto $AFNG$. punctum fixum vel extra, vel si placet ut in figura intra curvam, nempe punctum A. abscissae AR, ordinatae RF, convergentes AF. quae eaedem et perpendiculares Trochoeidis, BP. demissae seu rectae ex puncto fixo ad tangentem curvae perpendiculares, AQ, eaedemque Trochoeidis ordinatae ad planum, BT ⊓ DK.

Porro PD semper aequatur Curvae GNF. Erit ergo DT abscissa ex plano ⊓ $PD - PT$ ⊓ $GNF - PT$. Jam PT ⊓ $\sqrt{AF^2 - AQ^2}$. Ergo DT ⊓ $GNF - \sqrt{AF^2 - AQ^2}$; et DK ⊓ AQ. Ergo DT ⊓ $GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$. Datur jam relatio inter AR et DK, item relatio inter AF et AR. Igitur habebitur valor ipsius AR per DK, et quoniam habetur valor ipsius AF per AR. habebitur et valor ipsius AF per DK. Itaque habebitur aequatio trium incognitarum, nempe DT. GNF (curvae). DK. Oblata jam aliqua curva BCD, ex DT datur DK vel contra; item ex DT inveniri potest AF vel BP perpendicularis, itemque ex DK inveniri potest BP, itaque habebuntur duae aequationes[,] una generalis, DT ⊓ $GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$, altera curvae naturam explicans, et valorem ipsarum duarum ex his tribus, DT, BP, (vel AF) DK, per tertiam. Ac proinde habebitur valor ipsarum GNF quarum differentiae seu ipsarum DP differentiae sunt homogeneae elementis curvae descriptricis ad portiones axis Trochoeidis seu datae curvae relatis. Videamus jam an haec sufficiant ad inveniendam curvam descriptricem, nimirum datur triangulum AQF. Quod Triangulum haberi potest pro characteristico majori, si scilicet AF convergens habeatur pro ordinata. Datur inquam, id est datur relatio laterum invicem: Datur praeterea relatio Elementorum curvae AFG, ad ipsam AF, imo et summae elementorum. Ideoque momentum curvae quaesitae, ergo et perpendicularium ad curvam, FS. in ipsarum RF differentias ductarum progressio.

Breviter data Trochoeide habetur describentis curvae portionum dimensio sive ejus elementum; elementa curvae; demissae; interceptae inter demissas et puncta curvae in

5 f. BK *(1)*, in relatione ad *(2)* Ut *L* 17 BCD, *(1)* | datur *streicht Hrsg.* | *(2)* ex DT *(a)* vel DK, dantu *(b)* datur *L* 20 ipsarum *(1)* incogni *(2)* trium incognitarum *(3)* duarum *L* 29 sive *(1)* | momentum *streicht Hrsg.* | ipsarum *(2)* eius *L*

tangente sumta; omnia ex supposita convergente data. Seu ex dato quadrato aequali quadratis ordinatae et abscissae; et per consequens ex datis ordinata et abscissa simul.

Contra si data sit describens datur utique ejus $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ AQF ergo et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BPT Trochoeidis. Quodsi ergo ex dato PBT curva BCD haberi potest patet eo ipso et curvae $AFNG$ dimensionem haberi in Trochoeide et provoluta $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AQF et BPT coincidunt, in Evolutis et evolutione descriptis triangula BPT utrobique similia. Sed reciproce.

Alia vide Schediasmate *de descriptionibus curvarum*, ibi de modo describendi curvas per motuum compositiones.

7 Schediasmate ... *curvarum*: Cc 2, Nr. 831, dat. Dezember 1674.

18. DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONIBUS REDUCTARUM AD ORDINATAS

24. Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 13–14. 1 Bl. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 828

Xb. 1674. ipsis Natalitiorum vigiliis

De Trochoeidibus, et Relationibus Reductarum ad ordinatas et de ratione efficiendi ut eadem curva sit trochoides plurium

Data Curva, et puncto quodam fixo, unde perpendicularis demittatur ad quamlibet curvae tangentem, investigare relationem inter perpendicularem demissam, et interceptam tangentis portionem inter demissam et punctum contactus.

Esto primum curva, circuli circumferentia. Si punctum fixum sit centrum, intercepta tangentis portio erit infinite parva, et perpendicularis semper eadem, nempe radius, locus ergo est ad rectangulum.

Si vero punctum fixum vertex A. quodlibet in curva punctum L. Tangens axi AT occurrens LT. sagitta AB. ordinata seu sinus rectus BL. constat esse $AC \sqcap AB$. quam appellemus x. Jam $AL \sqcap \sqrt{2ax}$. et $AL^2 \sqcap 2ax$. Ergo $CL^2 \sqcap AL^2 - AC^2 \sqcap 2ax - x^2$. Ergo $CL \sqcap \sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL$. Hinc jam patet figuram in qua ordinata ad reductam relationem habeat quam sinus versus ad rectum, esse Cycloeidem.

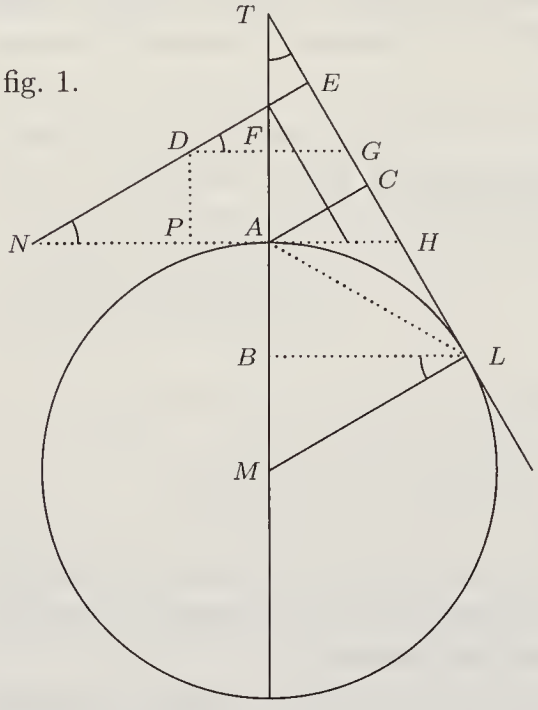
7–9 Nova hic methodus detegitur, qua diversarum figurarum quadraturae ad se invicem reducuntur, ope Trochoeidum.

7–9 De ... ut *(1)* diversa *(2)* eadem ... plurium *erg. L* 10 fixo | extra curvam *gestr.* |, unde *L* 12 inter *(1)* tangentem *(2)* perpe *(3)* perpendicularem *(4)* demissam *L* 22 ope *(1)* volutarum | etiam *streicht Hrsg.* | *(2)* Trochoidum *L*

---

19 f. Hinc ... Cycloeidem: vgl. N. 17 S. 153 Z. 2–8.

fig. 1.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

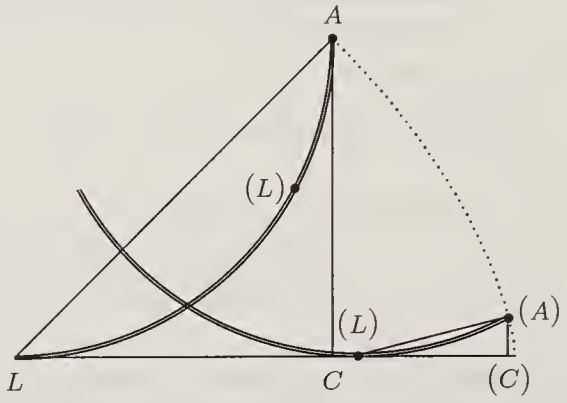


fig. 2.

[*Fig. 2*]

Nam generaliter in curva provolvenda AL, demissa ex puncto quodam fixo, ut A, in tangentem LT, fit ordinata in Trochoeide, et intervallum inter demissam et punctum contactus seu LC, fit reducta, quoniam LA in Trochoeide semper perpendicularis ad curvam. Ut patet conferendo figuram 2^{dam} primae, ubi $A(L)L$ provolvenda, $A(A)$ Trochoeides curva, LA vel $(L)(A)$ perpendicularis ad curvam Trochoeidem, AC vel $(A)(C)$ ordinata ad planum volutionis, LC reducta sive intervallum inter ordinatam et perpendicularem in directrice sumtum.

Esto jam punctum describens, non vertex circuli A, sed aliud quodlibet D. unde ad tangentem LT. demisssa perpendiculari DE, quaeratur relatio quae est inter DE et LE. Cum datum sit punctum D, datum erit ejus intervallum a diametro AB, nempe $DF \sqcap d_{[,]}$ dabitur et ejus intervallum a vertice, nempe recta $AF \sqcap f$. In ipsam LT

5 AL(L) *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 2*: Zwei verworfene Vorstufen der Figur, in denen Leibniz drei Phasen des Abrollens der Kurve darzustellen versuchte, werden nicht wiedergegeben. 9 Esto: Zum Folgenden vgl. Fig. 1.

tangentem ducantur $AH. FG. AC.$ Nam per $DFG.$ habebitur et $DE.$ at $FG.$ per $AH.$ AH autem cognita est, ducto enim radio ML, patet Triangula LBM, TBL, ACH, esse similia, adeoque AH esse ad $AC \sqcap AB \sqcap x$, ut radius LM seu a est ad $BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$. Ergo $AH \sqcap \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL}$. Jam ut BL ad BM ita TA ad AH. Ergo $\frac{TA}{AH} \sqcap \frac{BL}{BM \sqcap a - x}$. Ergo $TA \sqcap \frac{BL \frown AH}{a - x}$. Jam $BL \frown AH \sqcap ax$. Ergo $TA \sqcap \frac{ax}{a - x}$. Jam FG est ad TF ut AH ad TA. seu $FG \sqcap \frac{AH \frown TF}{TA}$. Jam $TF \sqcap TA \mp AF \sqcap \frac{ax}{a - x} \mp f$. Unde fiet $FG \sqcap \frac{\frac{\cancel{ax}}{\sqrt{2ax - x^2}}}{\frac{\cancel{ax}}{a - x}} \frown TF \sqcap \frac{\boxed{a - x}}{\sqrt{2ax - x^2}} \frown \frac{ax \mp af \pm xf}{\boxed{a - x}} \sqcap \frac{ax \mp af \pm xf}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $DG \sqcap \frac{ax \mp af \pm xf}{\sqrt{2ax - x^2}}(\mp)d$. Si punctum $D.$ esset in diametro producta, negligi posset d. Hinc patet semper si velis negligi posse quoniam etsi non in AM, tamen in alia diametro producta.

Quodlibet punctum extra Circulum existere intelligi potest. Habita jam $DG.$ investigabitur facilius DE, est enim DE, ad DG, ut BL sinus rectus ad radium. Ergo $DE \sqcap \frac{DG \frown BL}{a}$, at $DG \frown BL \sqcap \frac{ax \mp af \pm fx(\mp)dBL}{\cancel{BL}}, \frown \cancel{BL}$.

Ergo $DE \sqcap \frac{ax \mp af \pm fx(\mp)d\sqrt{2ax - x^2}}{a}$. Producatur ED in N, dum occurrat ipsi HAN, et in AN demittatur perpendicularis $DP \sqcap AF \sqcap f$. erit $\frac{DN}{DP \sqcap f} \sqcap \frac{ML \sqcap a}{BM \sqcap a - x}$.

ergo $DN \sqcap \frac{af}{a - x}$. et $EN \sqcap \frac{ax \mp af \pm fx(\mp)d\sqrt{2ax - x^2}}{a} ((\mp)) \frac{af}{a - x}$. Inventa autem EN facile habetur $EH.$ ergo et $EL.$

2 est, *(1)* sunt *(2)* Cum enim AC aeqvetur AB. erunt triangula ACL *(3)* ducto L 3 $\sqcap$ x, *(1)* ut BL *(a)* ad *(b)* $\sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ ad radium LM seu a, ergo AH $\sqcap$ *(2)* ut L 15 AHN L *ändert Hrsg.* 15 $\sqcap$ f. *(1)* erit $\frac{NP}{f} \sqcap \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x} \sqcap \frac{BL}{BM}$: ergo NP $\sqcap \frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$ *(2)* erit L 16 f. inventa autem *(1)* EN *(2)* | EA *ändert Hrsg.* | facile ... EL *erg.* L

Imo ista ipsius DN. additio ad ED, locum tantum habere videtur, cum D sumta ut in figura [1.] extra diametrum in latere diametri a tangente averso.

Nota hic casum quo s i g n o r u m a m b i g u o r u m usus haerere videtur. Aliter enim in quibusdam instituendus erit Calculus si sit in sinistro, quam si sit in dextro tangentis latere, quia calculus per Triangulorum similium comparationes peragitur.

Alia enim methodo calculus reddi potest generalis, is ergo praeferendus, nimirum ex datis DE et DG. Est enim EG ad DG, ut $a - x$ seu BM ad ML seu a. Ergo $EG \sqcap \frac{DG \frown a - x}{a}$, et GL, ad $FB \sqcap x \pm f$ ut LM ad BL, seu ut a ad $\sqrt{2ax - x^2}$. seu $GL \sqcap \frac{ax \pm fa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. et $EL \sqcap EG((\mp))GL$. Quod si unicum exemplum calculare volumus, cum punctum D in sinistro latere ipsius AT, extra Circulum, intra T. et A. (vide supra

---

3–5 *Figur, gestrichen:*

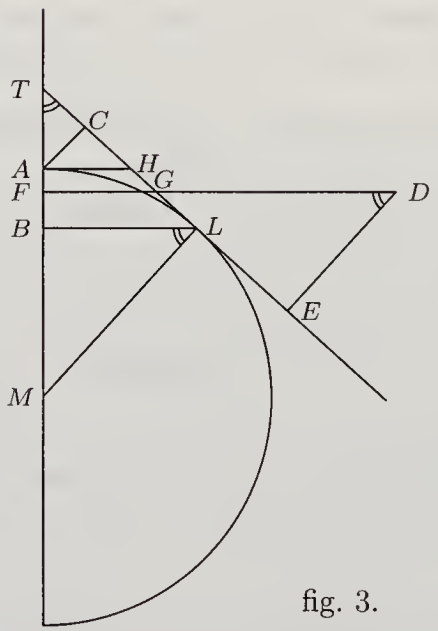


fig. 3.

1 ad | E *ändert Hrsg.* |, locum L 5 latere, *(1)* itaqve facilitatis causa, uno tantum casu utemur nunc qvidem Nimirum qvia omnia *(2)* qvia L

fig. 1.[)] tunc $EN \sqcap \frac{ax - af + fx + d\sqrt{2ax - x^2}}{a} + \frac{af}{a - x}$. Sin malis NH, uti[:] $\frac{NP}{f} \sqcap \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$. erit $NP \sqcap \frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$, addatur AP sive d, et $AH \sqcap \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ fiet: $\frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x} + d + \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} \sqcap NH$.

Jam EH est ad NH, ut a ad $a - x$. Ergo $EH \sqcap \frac{NH \frown a}{a - x}$. Est autem

$$NH \sqcap \frac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax - x^2} - dx\sqrt{2ax - x^2} + a^2x - ax^2}{a - x, \frown \sqrt{2ax - x^2}}$$

ergo $EH \sqcap \frac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax - x^2} - dx\sqrt{2ax - x^2} + a^2x - ax^2}{a^2 - 2ax + x^2, \frown \sqrt{2ax - x^2}}$, cui addatur $HL \sqcap AH$, et fiet EL. et habebitur relatio inter EL et DE.

Sed quoniam calculos tam prolixos odi, videndum potius an omissa d, res sit facilior sumto puncto D in diametro producta si opus fig. 3.

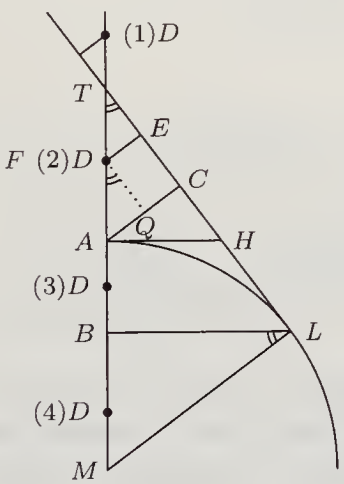


fig. 3.

Nimirum $TA \sqcap \frac{ax}{a - x}$, addatur vel adimatur vel plusquam adimatur AD, fiet: $TD \sqcap +TA + AD$ seu $+TA - AD$ $-TA + AD$

$TD \sqcap \mp TA \mp AD$.

Jam $\frac{DE}{AC} \sqcap \frac{TD}{TA}$. Ergo $DE \sqcap \frac{TD \frown AC}{TA}$. Jam $AC \sqcap AB \sqcap x$. Ergo: $DE \sqcap \frac{\mp \frac{ax}{a - x} \mp f, \frown \not\in}{\frac{a \not\in}{a - x}}$, sive $DE \sqcap \frac{\mp ax \mp af \mp xf}{a}$. Jam DQ ad $AD \sqcap f$ ut $\sqrt{2ax - x^2}$ ad a. Ergo $DQ \sqcap \frac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} \sqcap EC$. Addatur vel ad-

2 addatur | AD *ändert Hrsg.* | sive L 16 $\sqcap$ EC *(1)* addatur CL $\sqcap$ BL fiet EL $\sqcap$ *(2)* addatur L

4 ut a ad $a - x$: Richtig wäre $EH : NH = (a - x) : a$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Berechnung von EH in Z. 6.

imatur, etc. $CL \sqcap BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ fiet EL. Nimirum si D sit intra A et T, seu quando $TD \sqcap +TA - AD$, erit $+EC + CL$, quando D intra A et B, tunc cadit E inter C. et L. et erit $EL \sqcap -EC + CL$. et $TD \sqcap TA + AD$: Quando D ultra B tunc TD etiam $TA + AD$. sed $EL \sqcap +EC - CL$. Quando D ultra T, seu quando $TD \sqcap -TA + AD$ tunc $EL \sqcap EC + CL$. Ut ergo digeramus erunt situs quatuor ipsius D, varietatem afferentes, $(1)D, (2)D, (3)D, (4)D$.

$$\begin{array}{lll} (1)D, \text{ dat:} & TD \sqcap -TA + AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (2)D \ \ldots & TD \sqcap +TA - AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (3)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap -EC + CL \\ (4)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap +EC - CL \end{array}$$

Generaliter ergo TD ita exprimemus:

$$TD \sqcap \ddagger TA \ddagger AD\,, \quad EL \sqcap \ddagger EC \ddagger CL.$$

Ergo hoc modo $DE \sqcap \dfrac{\ddagger ax \ddagger af \ddagger xf}{a}$ et $EL \sqcap \ddagger \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} \ddagger \sqrt{2ax - x^2}$.

Ponendo jam $DE \sqcap y$, fiet: $\dfrac{ay \ddagger af}{\ddagger a \ddagger f} \sqcap x$, et $x^2 \sqcap \dfrac{a^2y^2 \ddagger 2a^2fy + a^2f^2}{a^2 \ddagger 2af + f^2}$.

Unde $EL \sqcap z \sqcap \dfrac{\ddagger f \ddagger a}{a} \frown \sqrt{2ax - x^2}$.

Jam $2ax - x^2 \sqcap \dfrac{2a^2y \ddagger 2a^2f \frown \ddagger a \ddagger f, -a^2y^2 \ddagger 2a^2fy - a^2f^2}{a^2 \ddagger 2af + f^2}$ sive

$$\sqcap \frac{\ddagger 2a^{\not 3}y \boxed{\ddagger 2a^2fy} \ddagger 2a^{\not 3}f + \underset{//}{\boxed{2}}a^2f^2, -a^{\not 2}y^2 \boxed{\ddagger 2a^2fy} \underset{//}{\boxed{-a^2f^2}}}{\underset{///}{\boxed{a^2 \ddagger 2af + f^2}}} \sqcap \frac{a^{\not 2}z^2}{\underset{///}{\boxed{f^2 \ddagger 2af + a^2}}}.$$

Adeoque: $z^2 \sqcap \ddagger 2ay - y^2 \ddagger 2af$ qui locus est ad Circulum; et cum $f \sqcap 0$. tunc fit $z^2 \sqcap +2ay - y^2$: aequatio simpliciter ad ipsummet circulum datum, quae est relatio inter ordinatam ad planum, et reductam in cycloeide primaria, quod cum aliunde sit notum index est calculi veri.

Jam sumtis aliis curvis, parabola, Hyperbola, Ellipsi, videamus an casus esse possint, quo puncta D. talia in illis sumantur, ut relatio ordinatarum et reductarum Trochoeidis parabolicae vel alterius, explicetur aequatione ad Circulum.

19 relatio *(1)* productae ad ord *(2)* inter *L* 20 f. , qvod ... veri *erg. L* 23 ut *(1)* locus *(2)* relatio *L* 24 vel alterius *erg. L* 24 ad *(1)* Hy *(2)* Circulum *L*

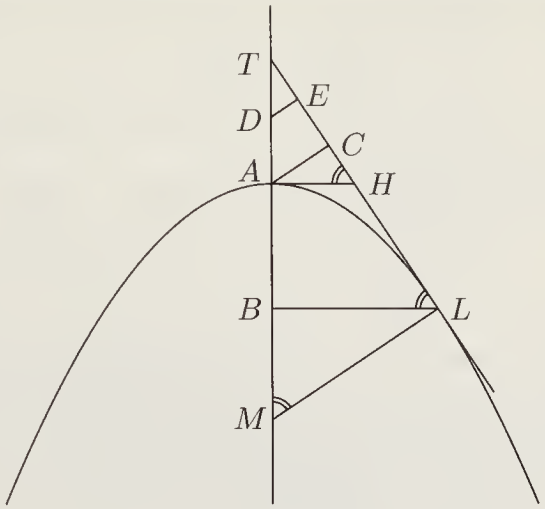


fig. 4.

Ac primum in parabolam inquiramus, et quo major sit calculi simplicitas casum investigemus faciliorem cum punctum D datur in axe parabolae, et intra T et A. Erit $TD \sqcap TA - AD$ seu $\sqcap x - f$. Ergo $AH \sqcap \frac{BL}{2} \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}$. Jam $\frac{AC}{AH \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}} \sqcap \frac{\sqrt{2ax} \sqcap BL}{ML \sqcap \sqrt{a^2+2ax}}$.

Ergo $AC \sqcap \frac{\not{2}ax}{\not{2}\sqrt{a^2+2ax}}$. Jam $\frac{DE}{AC} \sqcap \frac{TD \sqcap x-f}{TA \sqcap x}$. Ergo $DE \sqcap \frac{AC \frown x-f}{x}$ sive DE 5

$\sqcap \frac{\not{2}ax - \not{2}af}{\not{2}\sqrt{a^2+2ax}}$. Porro $TL \sqcap \sqrt{x^2+2ax}$. Erit EL ad TL, ut DB seu $f+x$ ad $TB \sqcap 2x$. Ergo $EL \sqcap \frac{f+x, \frown \sqrt{2ax+x^2}}{2x}$.

Jam $EL^2 \sqcap z^2 \sqcap f^2 + 2fx + x^2 \frown \frac{2a\not{x} + x^{\not{2}}}{4x^{\not{2}}}$, sive

6 $\sqcap \frac{\not{2}ax - \not{2}af}{\not{2}\sqrt{a^2+2ax}}$. *(1)* porro EL est ad DB *(2)* porro L 7 f. $\sqcap \frac{f+x, \frown \sqrt{2ax+x^2}}{2x}$ *(1)* $\sqcap \frac{f+x \frown}{\text{——}}$ *(2)* Jam DE sit y, erit $y^2 \sqcap$ *(3)* Jam | EL $\sqcap$ z *ändert Hrsg.* | $\sqcap f^2$ L

6 $TL \sqcap \sqrt{x^2+2ax}$: Richtig wäre $TL = \sqrt{4x^2+2ax}$; auch die folgende Verhältnisgleichung ist falsch, es müsste $EL : TL = DM : TM = (f+x+a) : (2x+a)$ angesetzt werden. Die Fehler beeinträchtigen die weiteren Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

$$\boxed{4z^2x} \sqcap 2af^2 + 4af\,x + 2a\,x^2 + x^3 \sqcap 0 \quad \odot$$
$$+ \; f^2 \,..\, + 2f \,..$$
$$- 4z^2 \,..$$

Eodem modo $DE^2 \sqcap y^2 \sqcap \dfrac{a^2x^2 - 2a^2fx + a^2f^2}{a^2 + 2ax}$, sive

$$x^3 - 2f \;\; x^2 + f^2\,x \sqcap 0. \quad \supset$$
$$-\frac{2y^2}{a} \,..\, - y^2 \,..$$

Unde pro x^3 substituendo in priori $\odot$ ejus valorem ex $\supset$ fiet:

$$2a \;\; x^2 + 4af\,x + 2af^2 \sqcap 0.$$
$$+4f \;\; .. \;\boxed{+ \; f^2 \,..}$$
$$+\frac{2y^2}{a} \,..\, \boxed{- \; f^2 \,..}$$
$$+ \; y^2 \,..$$
$$- 4z^2 \,..$$

et pro x^2, substituendo ejus valorem ex $\supset$, nempe $2f \;\; x - f^2$ fiet:

$$+\frac{2y^2}{a} \,..\, + y^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2a & \frown\ 2f & \\ +4f & \dfrac{2y^2}{a} & \\ +\dfrac{2y^2}{a} & & \end{array}\right\} \begin{array}{l} +4\,af \,,, \frown x \text{ etc.} \\ + \; y^2 \\ -4\,z^2 \end{array}$$

Sed cum ita calculus fiat prolixior quam velim, contrahendi causa primam aequationem $\odot$ per brachylogiam ita scribemus: $x^3 + lx^2 + amx + 2af^2 \sqcap 0$. $\odot$ alteram $\supset$ ita: $x^2 + nx + ap \sqcap 0$. Unde ex $\supset$. erit $x^3 \sqcap -nx^2 - apx$. Unde ex $\odot$ et $\supset$. fiet $\mathfrak{P}$:

$$+l \;\; x^2 + am\,x + 2af^2 \sqcap 0.$$
$$-n \,.. \;\; - ap \;\; ..$$

et pro x^2 substituendo ejus valorem ex aeq. $\supset$. qui est $-nx - ap$. fiet:

$$+l \;\; x^2 \sqcap - ln\; x - lap$$
$$-n \,.. \qquad + n^2 \,..\, + nap$$

Unde aeq. ☿: $+am\,x^2+2af^2\,x \sqcap 0$. sive $x^2 \sqcap \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2af^2\\-lap\\+nap\end{array}\right.}{+am}\,x \sqcap -nx-ap$. Ergo

$$\begin{array}{lll} -ap \;..\; -lap \;.. & & -ap \\ -ln \;..\; +nap \;.. & & -ln \\ +n^2 \;.. & & +n^2 \end{array}$$

$x \sqcap \dfrac{-a^2mp+a^2p^2-lnap+n^2ap}{2af^2-lap\boxed{+nap}, +nam\boxed{-apn}-ln^2+n^3}$. Jam idem $x \sqcap \dfrac{-2af^2+lap-nap}{am-ap-ln+n^2}$. Sed cum n contineat y^2, patet ascendere incognitas ad sextam usque dimensionem. Et multo impeditior erit, si punctum D assumatur, extra axem. Et credam casum aliquem inveniri posse, in quo possit ita deprimi hinc nota aequatio, ut fiat inde aequatio ad Circulum; quo facto haberemus reductionem quadraturae Hyperbolae ad quadraturam Circuli.

Si D sit ipse vertex erit $DE \sqcap AC \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+2ax}}$. et $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$. Unde $EL \sqcap CL$ ponendo z, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax+x^2$. et $DE \sqcap AC$ ponendo y, fiet: $y^2 \sqcap \dfrac{a^2x^2}{a^2+2ax}$, et ex hac et: $x^2 \sqcap y^2 \frown \dfrac{a^2+2ax}{a^2}$. Unde inserendo hunc valorem in priore, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax+\dfrac{y^2 \frown a^2+2ax}{a^2}$, sive $4z^2a^2 \sqcap 2a^3x+a^2y^2+2ay^2x$, sive $x \sqcap \dfrac{4z^2a^2-a^2y^2}{2a^2+2ay^2}$; et $x^2 \sqcap \dfrac{16z^2a^2-8z^2y^2a^2+a^2y^4}{4a^4, +8a^2y^2+4y^4}$. Unde $4z^2 \sqcap \dfrac{4z^2a^2-a^2y^2}{2a^2+2y^2}+x^2$ etc. Sed hinc judicatu

8 ad *(1)* sextum usqve gradum *(2)* sextam *L* 12 vertex *(1)* | fiet *streicht Hrsg.* | *(2)* erit *L*

13 $+x^2$. | qvae est ad Hyperbolam *gestr.* | et *L* 15 $+2ay^2x$, *(1)* sive $x^2 \sqcap \dfrac{4z^2a^2x-a^2y^2x}{2a^3+2ay^2} \sqcap \dfrac{a^2+2ax}{a^2}$ et reducendo: $4z^2a^3x-a^3y^2x \sqcap 2a^4y^2+2a^3xy^2+2a^2y^4+2ay^4x$, | sive *streicht Hrsg.* | $x \sqcap$ *(2)* sive *L*

3 $x^2 \sqcap$: Vor der folgenden Klammer fehlt ein Minuszeichen. Dieser und ein weiterer Vorzeichenfehler beeinträchtigen die daraus berechnete erste Gleichung für x in Z. 7, die zweite wird direkt aus der Gleichung ☿ bestimmt. 12 $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$: vgl. die Erl. zu S. 165 Z. 6. 16 $x^2 \sqcap$: Konsequent gerechnet müsste der erste Term im Zähler der rechten Seite $16z^4a^2$ lauten. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

facile est, etiam in simplicissimo exemplo calculum sic satis prolixum, tanto magis in aliis. Sed persequi in omnibus Conicis valde operae pretium est, hinc enim in magnam Spem venio omnes Conicas ad se invicem reduci posse. Eadem serviet methodus etiam ad inveniendas dimensiones absolutas quarundam curvarum, dum scilicet quaeruntur quarum revolutione describantur curvae, quae aliarum quoque cognitarum revolutione describuntur, v. g. si Trochoeides paraboloeidis Heuratianae alterius quoque curvae Trochoeides esse possit, huc enim totius hujus schedae inquisitio redit, an fieri possit, ut una eademque curva sit Trochoeides plurium, eo ipso enim eae curvae erunt sygnotae; item an figurae quaedam cognitae, aliarum Trochoeides esse possint. Sed restat tantum inquirendum nonnihil, si punctum ipsum A non sit fixum, sed varians.

10 *Figur unter dem gestrichenen Text, nicht gestrichen:*

8 f. curvae *(1)* ad se invicem *(2)* erunt sygnotae *(a)*. Videndum *(b)*; item *L* 10 si *(1)* Tangens a *(2)* punctum *L* 10 varians. | sed de his vide parte 2. inqvisitionis in methodum Tangentium Cartesii inversam. 1674. *gestr.* | *L*

10 varians: s. N. 23. Der Verweis in der gestrichenen Variante bezieht sich auf den Schluss von N. 17, an den N. 23 inhaltlich anknüpft.

19. APPENDIX SCHEDIASMATIS DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONE REDUCTARUM AD ORDINATAS

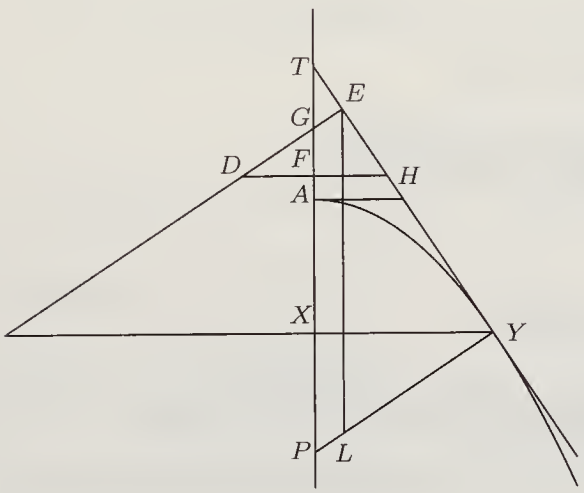
[24. – 31.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 15. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 15 r°. Bl. 15 v° leer.
Cc 2, Nr. 829

Datierungsgründe: Das Stück ist nach dem auf den 24. Dezember datierten N. 18 entstanden.

Xb. 1674.

Appendix schediasmatis de Trochoeidibus et relatione Reductarum ad ordinatas



[*Fig. 1*]

Curva AY parabola, axis AX. tangens TY. punctum quoddam fixum D, ex quo perpendicularis ad tangentem DE. erit ergo parallela ipsi PY. Quaeritur relatio inter DE et EY. Datur DF, quam vocabimus $\underline{d}$, et FA, quam vocabimus $\underline{f}$. Est autem ex natura parabolae $XP \sqcap \underline{a}$, semilatus rectum et $TA \sqcap AX \sqcap \underline{x}$. et $XY \sqcap \sqrt{2ax}$. Ergo $TY \sqcap \sqrt{4x^2 + 2ax}$.

$\frac{GF}{DF \sqcap d} \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{a}$. Ergo $GF \sqcap \frac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $TG \sqcap AT$ sive x, demtis $AF + GF$. Ergo $TG \sqcap x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $\frac{TE}{TG} \sqcap \frac{TY}{TP \sqcap 2x + a}$. Ergo $TE \sqcap$

7–9 Xb. 1674. ... ordinatas *erg. L*

---

20 $\sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{a}$: Richtig wäre $\frac{a}{\sqrt{2ax}}$. Der Fehler und weitere Versehen beeinträchtigen die folgenden Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzlichen Überlegungen.

$\frac{\sqrt{4x^2+2ax}, \frown x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$ et $EY \sqcap TY - TE \sqcap \sqrt{4x^2+2ax} \frown 1 - \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$

sive $EY \sqcap \sqrt{4x^2+2ax} \frown \frac{x + a + f + \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$.

Jam $DG \sqcap \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{a^2}2ax}$, sive $DG \sqcap \sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2 2ax}{a^2}}$, sive $DG \sqcap \frac{d}{a}\sqrt{a^2+2ax}$.

Et $GE \sqcap \sqrt{TG^2 - TE^2}$. sive $GE \sqcap \sqrt{TG^2 - \frac{TY^2, TG^2}{4x^2+4ax+a^2}}$, sive $GE \sqcap$

$\frac{TG}{2x+a}\sqrt{\boxed{4x^2} + 2\boxed{4}ax + a^2, \boxed{-4x^2}\boxed{-2ax}}$

sive $GE \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}\sqrt{2ax+a^2}$.

Et $DE \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a} + \frac{d}{a}, \frown \sqrt{2ax+a^2}$, sive

$$\frac{xa - fa - d\sqrt{2ax} + 2dx + ad}{\boxed{2ax+a^2}\sqrt{2ax+a^2}}\ \boxed{\sqrt{2ax+a^2}} \sqcap z.$$

sive $\frac{-d\sqrt{2ax}\ e\boxed{\begin{matrix}+a\\ +[2]d\end{matrix}}x\ g\boxed{\begin{matrix}-f\\ +d\end{matrix}}a}{\sqrt{2ax+a^2}} \sqcap z$. et quadrando:

$$\frac{2d^2ax - 2dex\sqrt{2ax} - 2dga\sqrt{2ax}, +e^2x^2 + 2egax + g^2a^2}{2ax+a^2} \sqcap z^2$$

---

1 f. *Am rechten Rand:* Quaeritur relatio inter DE et EY.

Am linken Rand, isoliert: Jam $\frac{FH}{\sqrt{2ax}} \sqcap \frac{TF \sqcap x - f}{2x}$. $\frac{z[\sqcap]DE}{\omega \sqcap EY} \sqcap \frac{DH \sqcap d + FH}{EL}$. $\frac{z}{\omega} \sqcap$

$\frac{d + x - f\frac{\sqrt{2ax}}{2x}}{EL \sqcap}$ [*bricht ab*]

4 $\sqcap \sqrt{\mathrm{TG^2 - TE^2}}$. *(1)* sive $\mathrm{GE} \sqcap \mathrm{x^2 - 2fx - \frac{2d}{a}x\sqrt{2ax}, + f^2 + \frac{2df}{a}\sqrt{2ax} + \frac{d^2}{a^2}2ax,,-}$ *(2)* sive L

Unde ordinando: $-2axz^2 - a^2z^2\ [+e^2x^2] + 2d^2\ ax + g^2a^2 \sqcap + 2dex\ \sqrt{2ax} + 2eg + 2dga$

Aequationes duae: $z \sqcap \dfrac{x - f - \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\ \sqrt{2x+a}}\ \boxed{\sqrt{2x+a}} \frown \sqrt{a}$

$\omega \sqcap \dfrac{x + a + f + \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\ \sqrt{2x+a}}\ \boxed{\sqrt{4x^2+2ax}}\ \sqrt{2x} \frown \boxed{\sqrt{2x+a}}$

$\sqrt{2x+a} \sqcap \dfrac{x - f - \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}}{z}\ \sqrt{a} \sqcap \dfrac{x + a + f + \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\omega}\ \sqrt{2x}$ sive 5

7–12 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* Error

1+3 $\sqrt{2ax}$ *(1)* An brevius: $\dfrac{d}{a} + \dfrac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}, \frown \sqrt{2ax+a^2} \sqcap z.$ Ergo $\dfrac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$ *(a)*

$\sqrt{2ax+a^2} \sqcap -\dfrac{d}{a}\sqrt{2ax+a^2} + z \sqcap$ *(b)* $\sqcap \dfrac{-\frac{d}{a}\sqrt{2ax+a^2}+z}{\sqrt{2ax+a^2}} \sqcap \dfrac{EY \sqcap \omega}{\sqrt{4x^2+2ax}}.$ adeoqve:

$\dfrac{\frac{d^2}{a^2}2ax + a^2 - \frac{2zd}{a}\sqrt{2ax+a^2} + z^2}{2ax+a^2} \sqcap \dfrac{\omega^2}{4x^2+2ax}.$ Jam $2ax+a^2 \frown \dfrac{2x}{a}$ dat $4x^2+2ax$ vel $4x^2+2ax \frown \dfrac{a}{2x} \sqcap$ $2ax+a^2$ ergo dividendo utrobiqve per $2ax+a^2$, fiet: $xd^2 \frown \llcorner 2ax+a^2 \lrcorner\!\lrcorner - 2d\not{x}xa\ \boxed{\sqrt{2ax+a^2}} + a^2z^2x \sqcap a^3\omega^2$

$\overbrace{xa - fa - d\sqrt{2ax} + 2dx + ad}^{\not{d}}$

sive $\dfrac{xd^2 2ax + xd^2a^2, -2dxaxa + 2dxafa - 2dxa2dx - 2dxaad + a^2z^2x - a^3\omega^2}{\not{d}} \sqcap \sqrt{2ax} \sqcap$

$-2axz^2 - a^2z^2 + 2d^2ax + g^2a^2$

$+2eg\ ..$

$+2\not{d}ex$

$+2\not{d}ga$ *(2)* Aeqvationes *(a)* tres: *(b)* duae L

---

3 $z \sqcap$: Leibniz setzt für $z = DE$ irrtümlich den von ihm für GE berechneten Wert ein.

$$+x-f \frown \omega\sqrt{a}-\frac{d}{a}\sqrt{a} \frown 2xz \sqcap \frac{d}{\not\phi}\omega \not\phi \sqrt{2x}$$
$$+ \quad x\,z$$
$$+ \quad a\ .$$
$$+ \quad f\ .$$

et ordinando

$$+ \quad \omega\sqrt{a}\,x - \omega f\sqrt{a} \sqcap \quad x\,z\sqrt{2x}$$
$$-2\,z\,\frac{d}{a}\sqrt{a}\ . \qquad\qquad \omega\,d$$
$$+a\,z$$
$$+f\,z$$

sive

$$\sqrt{2x} \sqcap \frac{\begin{matrix}\omega\sqrt{a}\ x-\omega f\sqrt{a}\\ -\frac{2zd}{a}\sqrt{a}\ .\end{matrix}}{\begin{matrix}xz+d\omega\\ az\\ fz\end{matrix}} \sqcap \frac{-z\sqrt{2x+a}}{\boxed{\sqrt{a}}} + x\sqrt{a} - f\sqrt{a},, \smile \frac{d}{\boxed{a}}\,\boxed{\sqrt{a}} \sqcap \frac{\omega\sqrt{2x+a}-\frac{d}{a}\sqrt{a}2x}{x+a+f}.$$

Ergo $\sqrt{2x+a} \sqcap \dfrac{\begin{matrix}\omega\sqrt{a}\ x-\omega f\sqrt{a}\\ -\frac{2zd}{a}\sqrt{a}\ .\end{matrix}}{\begin{matrix}xz+d\omega\\ az\\ f\,.\end{matrix}} \frown d,,+f-x,,, \smile -z$

$$\sqcap \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frown x+a+f,,+\frac{d}{a}\sqrt{a}2x,,, \smile \omega.$$

Unde

5 *(1)* et qvadrando: x^2 *(2)* et *L* 12–14 $\left.\begin{matrix}\smile -z\\ \smile\ \ \omega\end{matrix}\right\}$ *(1)* sive $\dfrac{\begin{matrix}\omega\sqrt{2a}\ \ x-\omega f\sqrt{a} \frown\\ -2z\frac{d\sqrt{a}}{a}\ .\end{matrix}}{\boxed{\begin{matrix}x+d\\ a\\ f\end{matrix}}}, \boxed{\begin{matrix}d\\ x\\ a\\ f\end{matrix}},, + $ *(2)*

Unde *L*

---

12 $+f-x$: Konsequent gerechnet müssten beide Terme mit $\sqrt{a}$ multipliziert werden.

$$\omega \boxed{\sqrt{a}}\, x - \omega f \boxed{\sqrt{a}}\,,,\ \frown + \frac{d}{z} \qquad ,,,\ \frac{+f-x}{z}\boxed{\sqrt{a}} + \frac{d}{a\omega}2x\boxed{\sqrt{a}}\,,,\ \frown\ xz + d\omega + a\ z \sqcap 0.$$

$$-\frac{2zd}{a}\boxed{\sqrt{a}}\ . \qquad \frac{x+a+f}{\omega} \qquad + f\ .$$

Unde reducendo patet x non assurgere ultra quadratum. Cum antea semper ad cubum assurgere videretur, quo specimine discimus non semper ad quadrationes et irrationalium ablationes properandum.

Ex hac jam aequatione repertus valor ipsius x. inseratur in aliqua ex aequationibus superioribus, et evanescente x. solae restabunt incognitae z et ω.

Quo facto videndum est an aequatio inde orta sit ejusmodi, ipsis, d. et f (: et inde pendente e :) pro arbitrio explicatis, ut possit aequatio producta dividi per aliam ad Circulum, $z^2 \sqcap 2a\omega - \omega^2 + 2ag$. in qua rursus g arbitraria est. Ope igitur trium arbitrariarum utique procederet divisio, et proinde curva eadem certo casu a circulo et a parabola provolutis describeretur, adeoque haberetur curvae circularis et parabolicae dimensio, vel quadratura Circuli et Hyperbolae simul.

20. DE PROBLEMATIS QUADRATURARUM REDUCENDIS

[24. – 31.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 166. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 166 v°, Bl. 166 r°.
Cc 2, Nr. 830

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück verweist auf das auf den 24. Dezember 1674 datierte N. 18.

Xb. 1674.

De problematis quadraturarum reducendis ad dimensiones curvarum deque methodo tangentium inversa per duas radices aequales

Dimensio curvae propositae semper haberi potest, supposita quadam quadratura, sed non semper data quadratura inveniri potest curva cujus in rectum extensione absolvi possit. Quadratura Circuli et Hyperbolae per extensiones Curvarum Circuli et parabolae habetur; hoc si in omnibus quadraturis fieri posset, non laboraremus. Videndum tamen:

Sit curva quaelibet cujus aequatio: $x^2+\frac{l}{a}yx+\frac{m}{a}y^2+nx+py+aq \sqcap 0$. $BT \sqcap t$. $AB \sqcap$

---

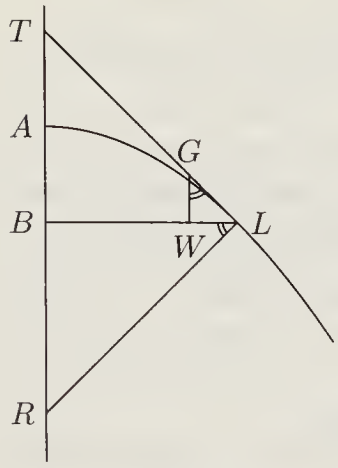
10 f. *Nebenbetrachtung, durch Striche abgetrennt:*

$a^2-x^2+y^2 \sqcap s^2$. $v^2+x^2-2vx+y^2 \sqcap s^2$. Ergo $v^2+x^2-2vx+\boxed{s^2}+x^2-a^2 \sqcap \boxed{s^2}$ Ergo $x^2-vx \left\{ \begin{matrix} +v^2 \\ \frac{-a^2}{2} \end{matrix} \right. \sqcap 0$. Quam ad duas aequales radices determinari impossibile, nisi a ponatur $\sqcap 0$.

10 f. d e q v e ... a e q v a l e s *erg. L* 16 aeqvatio *(1)* $x^3+\frac{l}{a}yx^2+\frac{m}{a}y^2x+\frac{n}{a}y^3+$ *(2)* x^2 *L*

---

11 i n v e r s a: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f. 19 $\sqcap 0$: Für $v^2=2a^2$ ergeben sich Doppelwurzeln.



[*Fig. 1*]

x. $BL \sqcap y$. Ordinetur secundum tangentes et fiet:

$$\begin{array}{rcl} 2xt + \frac{l}{a}yt & \sqcap & -\frac{l}{a}xy - \frac{2m}{a}y^2. \\ +n \;.. & & -p \;.. \end{array}$$

$$-\frac{l}{a}xy - \frac{2m}{a}y^2$$

Ergo $t \sqcap \dfrac{-p \;..}{2x + \frac{l}{a}y + n}$. Pro y substituatur ejus valor, ut habeatur t per x tantum. Jam $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BL \sqcap y}{BT \sqcap t}$. Ergo $WL \sqcap \dfrac{\beta y}{t} \sqcap \beta \frown \dfrac{2x + \frac{l}{a}y + n}{-\frac{l}{a}x - \frac{2m}{a}y}$. Jam ex superioribus:

$$-p$$

$$y^2 + \frac{l}{m}xy + \frac{ap}{m} \;.. \left\{ \begin{array}{l} +\frac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\frac{2lapx}{m^2} \\ +\frac{a^2p^2}{m^2} \end{array} \right\} \sqcap \left\{ \begin{array}{l} +\frac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\frac{2lapx}{m^2} \\ +\frac{a^2p^2}{m^2} \end{array} \right\} \smile 4 \quad - \frac{a}{m}x^2 - \frac{a}{m}nx - \frac{a^2}{m}q.$$

$$4$$

---

6 *Nebenbetrachtung, durch Strich abgetrennt:*

$BR \sqcap \dfrac{WLy}{\beta}$. $\dfrac{\sqrt{WL^2 + \beta^2}}{\beta} \sqcap \dfrac{s}{y}$. $y^2WL^2 + \beta^2y^2 \sqcap \beta^2s^2$. Jam $BR^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2$. Latet vero etiam x in WL. Unde elidendo x, restabit una incognita y determinanda ad duas radices aequales.

1 f. fiet: *(1)* $2x^2 + \frac{l}{a}y \sqcap$ *(2)* $2xt + \frac{l}{a}$ *(a)* ytx *(b)* yt $\sqcap L$ 5 $\frac{WL}{GL \sqcap \beta}$ *L ändert Hrsg.*

7–176,1 $-\frac{a^2}{m}q.$ | Ergo ǂy ǂ $\frac{lx + ap}{2m}$. *streicht Hrsg.* | Ergo *L*

Ergo $y \sqcap \frac{-lx - ap \mp \sqrt{\begin{matrix} l^2 & x^2 & -2manx & -2a^2qm \\ -2ma.. & & -2alp & .. \quad +a^2p^2 \end{matrix}}}{2m}$. Qui valor in locum ipsius y in valore WL substitui potest.

Jam si $\sqrt{WL^2 + \beta^2}$ quaeratur, inquiretur in progressionem ipsius curvae.

Quod si vero data sit figura, et quaeratur alia seu BL cujus sit WL vel BR, item si data sit GL, et quaeratur BL, videndum an alteram ad alteram revocari queat.

Exempli causa si sit $BR^2 \sqcap 2ax \mp \frac{a}{b}x^2$, et $BL \sqcap y.$ et $LR \sqcap \langle s \rangle$ fiet:

$$\odot \quad 2ax \mp \frac{a}{b}x^2 + y^2 \sqcap s^2{}_{[,]}$$

aequatio determinanda ad duas ipsarum x et y radices aequales.

Si detur $WL \sqcap \gamma \frac{\sqrt{2ax \mp \frac{a}{b}x^2}}{a}$, erit $\frac{BR}{BL} \sqcap \frac{WL}{\beta \sqcap GW}$. Ergo $BR \sqcap \frac{WLy}{\beta}$. Jam $BR^2 \sqcap \frac{2\gamma^2y^2\not{a}x \mp \frac{\gamma^2y^2\not{a}x^2}{b}}{\not{a}\beta^2}$. Unde

$$\mathfrak{D} \quad 2\gamma^2xy^2 \mp \frac{\gamma^2}{b}x^2y^2 + a\beta^2y^2 \sqcap s^2\beta^2a.$$

Determinata autem formula $\odot$ ad duas radices aequales etiam determinata est formula $\mathfrak{D}$.

Si autem GL detur $\sqcap \gamma \frac{\sqrt{2ax \mp \frac{a}{b}x^2}}{a}{}_{[,]}$ ergo $WL \sqcap \frac{\sqrt{2ax\gamma^2 \mp \frac{a}{b}x^2\gamma^2 - \beta^2a^2}}{a}$. Ergo $BR^2 \sqcap \frac{2\not{a}y^2x\gamma^2 \mp \frac{\not{a}}{b}x^2\gamma^2y^2 - \beta^2\not{a}y^2}{\beta^2\not{a}}$.

6 sit *(1)* $BR^2 \sqcap \frac{l}{a}x + m + \boxed{\sqrt{\cdots}}$ etc. *(2)* BR^2 *L* 9 Si | qvaeris *ändert Hrsg.* | $WL \sqcap$ *L*

9 f. $BR^2 \sqcap$ *(1)* $\frac{2\beta xy^2 \mp \frac{\beta}{l}x^2y^2}{\beta^2a^2}$ *(2)* $\frac{2\beta xy^2 \mp \frac{\gamma}{l}x^2y^2}{\beta^2a^2}$ *(3)* $\frac{2\gamma^2y^2\not{a}x \mp \gamma^2y^2\not{a}x^2}{\not{a}\beta^2}$ *L* 14 autem *(1)* qvaeratur *(2)* GL *L*

1 Ergo: In der folgenden Gleichung müsste unter dem Wurzelzeichen stehen: $l^2x^2 - 4manx - 4a^2qm - 4max^2 + 2alpx + a^2p^2$.

Unde: $2b\gamma^2x\boxed{y^2} \mp \frac{x^2\gamma^2}{\not{\beta}}\boxed{y^2}\boxed{-\beta^2a\boxed{y^2}+\beta^2ay^2} \sqcap bs^2\beta^2a.$

Unde patet res memorabilis quando curva quaeritur, semper ipsius y quadratum addendum rursus destrui ac proinde facilius inveniri curvam homogeneam quam quadraturam. Porro haec aequatio videtur facilius posse determinari ad duas radices aequales; nam si secundum y^2 ordinetur, jam est determinata ad duas radices aequales, quia aequatio est pura, omnis autem aequatio pura est ad duas radices aequales. Hinc tantum determinanda x ad duas radices aequales. Sed ego jam in his errorem esse puto. Nam alioquin et quadraturae semper darentur.

Aequatio $2b\gamma^2xy^2 \mp \gamma^2x^2y^2 - ab\beta^2s^2 \sqcap 0$[,] ut determinetur ad duas radices aequales, ordinetur primum secundum x, fiet: $x^2 \mp 2bx \pm \frac{ab\beta^2}{\gamma^2y^2}s^2 \sqcap 0$. Conferenda cum hac

$$\begin{array}{r} +x \quad -e \sqcap 0 \\ +x \quad -e \sqcap 0 \\ \hline +x^2 - 2ex\,[+]\,e^2 \sqcap 0. \end{array}$$

Sed malum in eo esse video quod praeter capitales x, et y. non nisi una in aequatione data est incognita s. Et tamen collationes instituendae sunt duae. Cum contra in aequatione tangentium directa, ubi non nisi una instituenda sit aequatio semper duae incognitae v, et s. offerantur. Ergo hic pro x ponamus: $z+\omega$. Fiet:

$$\begin{array}{r} z^2+2\omega z \;+\omega^2 \qquad \sqcap 0. \\ \mp 2b \;..\; \mp 2b\omega \\ \pm \frac{ab\beta^2}{\gamma^2y^2}s^2 \end{array}$$

Conferenda cum $z^2-2ez+e^2 \sqcap 0$. Fiet: $e \sqcap -\omega \pm b$. et $e^2 \sqcap \omega^2 \mp 2b\omega + b^2$, ergo $b \sqcap \pm\frac{a\beta^2s^2}{\gamma^2y^2}$, sive $\frac{s^2}{y^2} \sqcap \pm\frac{\gamma^2b}{a\beta^2}$, sive $\frac{s}{y} \sqcap \frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm\frac{b}{a}}$. Quae conclusio rursus absurda est. Habetur enim valor ipsius s ante tempus.

---

6 Imo falsum est aequationem puram duas habere radices aequales cum habeat oppositas.

20 $\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm\frac{a}{b}}$ *L ändert Hrsg.*

---

6 omnis: Die folgende Behauptung ist falsch, wie Leibniz selbst am Rand vermerkt.

An forte sic: $x \sqcap z + \omega$ et $y \sqcap v + \frac{c}{a}\omega$. Unde:

$$z^2 + 2\omega z + \omega^2 \qquad \sqcap 0.$$
$$\mp 2b.. \mp 2b\omega$$
$$\pm \frac{ab\beta^2 s^2}{\gamma^2 v^2 + 2\gamma^2 \frac{c}{a} v\omega + \gamma^2 \frac{c^2}{a^2}\omega^2}$$

Unde post collationes fiet: $b \sqcap \pm \frac{\frac{a\beta^2 s^2}{\gamma^2}}{v^2 + \frac{2c}{a}v\omega + \frac{c^2}{a^2}\omega^2}$. Sed jam video ista esse erronea, quia ita non $x.$ et $y.$ sed z seu $x-\omega$, et v, seu $y-\frac{c}{a}\omega$ ad duas radices aequales determinabuntur.

An sic: $\frac{GL}{\sqrt{GL^2-\beta^2}} \sqcap \frac{s}{v-x}$ scilicet ponendo: $AR \sqcap v.$ et $AB \sqcap x.$

Itaque $\frac{GL^2}{GL^2-\beta^2} \sqcap \frac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et pro GL^2 ponendo ejus valorem, hoc loco: $2ax \mp \frac{a}{b}x^2$ fiet $\frac{2ax \mp \frac{a}{b}x^2}{2ax \mp \frac{a}{b}x^2 - \beta^2} \sqcap \frac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et in hac aequatione quod mirum non nisi una incognita capitalis est, x. Sed malum, quod non ita veniri potest ad duas radices aequales. Haec aequatio si jungatur superiori: $2ax \mp \frac{a}{b}x^2 \sqcap \frac{s^2\beta^2}{y^2}$, ad duas radices aequales determinandae poterit inde fieri aequatio, in qua duae sint incognitae capitales ad duas radices aequales determinandae, et duae incognitae incidentes, s et v. Sed vereor tamen tunc quoque ne res non succedat, quia una aequatio alteri perfecte inserenda est, id est elidenda incognita.

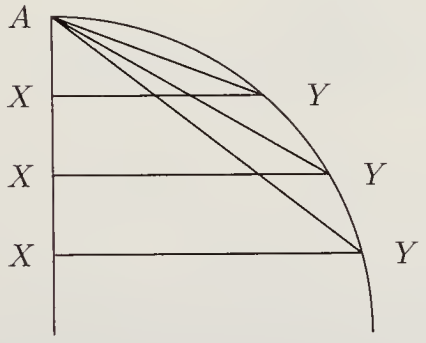
Nota[:] si junctis inter se duabus aequationibus elidere velis x, restabit una tantum incognita duarum radicum aequalium. Et ea determinata elidetur $s.$ vel $v.$ et habebitur

7 sic *(1)* $\frac{\mathrm{GL}}{\beta} \sqcap \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{y}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{GL}}{\sqrt{\mathrm{GL}^2-\beta^2}}$ *L* 13 incognitae *(1)* supernumerariae *(2)* incidentes *L*

9 $2ax \mp \frac{a}{b}x^2$: Leibniz vergisst den Faktor $\frac{\gamma^2}{a^2}$ für diesen Ausdruck. Dies wirkt sich auch auf die zwei folgenden Gleichungen aus.

aequatio in qua duae tantum supersint y et v. vel y. et s. Quarum proinde relatio habebitur. Et tale problema solvi poterit revolutione curvae, ut alibi docui ubi *de Geometria arcana et Methodo Tangentium inversa*, et *Trochoeidibus* Xb. 1674. Nimirum ad descriptiones illas ne puncto quidem fixo absolute opus esse arbitror. Omnia ergo problemata Methodi tangentium inversae ad curvarum in rectum extensiones reducerentur.

Notandum est unum hactenus a me omissum, et ut arbitror a Cartesio animadversum, non esse necesse, ut incognitae x. et y. seu capitales sint ordinata et abscissa, imo aliquando esse satius, ut sint rectae non parallelae rectangulae, sed parallelae obliquae, imo et convergentes.



[*Fig. 2*]

Ponendo $AX \sqcap x$, et $AY \sqcap y$. ita aequatio ad circulum est: $2ax \sqcap y^2$, quae alioquin ad parabolam. Ita fiet ut incognitae magis varientur, et facilius ad duas radices aequales aequationes determinentur.

Notanda valde haec schedula, cum tot nova obtulerit.

Nota: an curva quadam data punctum fixum capax demissam ad tangentes, quales postulamus, non ita inquirendum ut initio feceram in schediasmate *de Geometria arcana et methodo Tangentium inversa* sed ut in schediasmate *de Trochoeidibus*, ubi ex puncto assumto calculo.

---

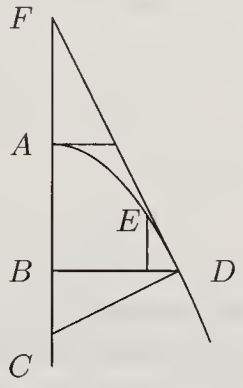
2 f. *de ... inversa*: vgl. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, VII, 3 N. 39, insbesondere S. 570–574; *Trochoeidibus*: N. 18 u. 19. 6 a Cartesio: vgl. den Brief von Descartes an Debeaune vom 20. Februar 1639, gedr. in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–414 [Marg.] (*DO* II S. 514–517). Zum Übergang von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Koordinaten vgl. auch Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176 f. [Marg.].

21. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 6. 1 Bl. 4°. 1 1/2 S.
Cc 2, Nr. 840

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück setzt VII, 3, N. 39, dat. Dezember 1674, voraus (vgl. S. 181 Z. 4–7 und die zugehörige Erl.). Die Symbole für Mehrfachvorzeichen in den Varianten zu S. 181 Z. 8 – S. 182 Z. 1 verwendet Leibniz bis Anfang 1675.

Methodus tangentium inversa



[*Fig. 1*]

Circa methodos Tangentium inversas notandum est, quando ex data BC. quaeritur BD. inquisitionem vel ideo satis difficilem esse, quia $BD \sqcap y$ habetur simpliciter ad quadratum ascendens, nam $BC^2 + y^2 \sqcap CD^2$ atqui talis aequatio ordinata secundum y^2,

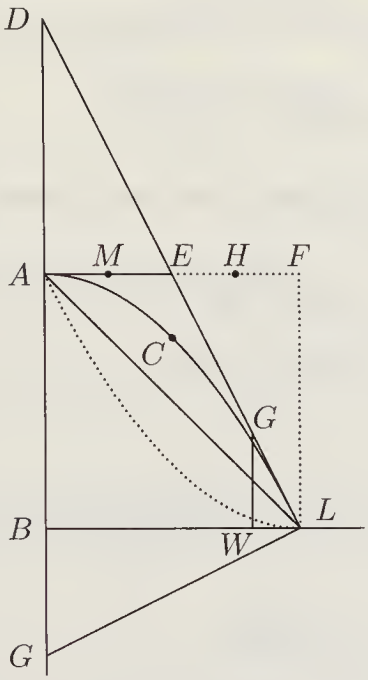
$$\begin{array}{ccc} / & \backslash & \\ x^2 \,..\, x. & a & p^2 \end{array}$$

non potest ad duas radices aequales determinari, quia nulla aequatio pura quadratica ad duas aequales radices determinari potest; sed contra ad duas oppositas, seu mole aequales, forma sive signo inaequales, jam determinata est.

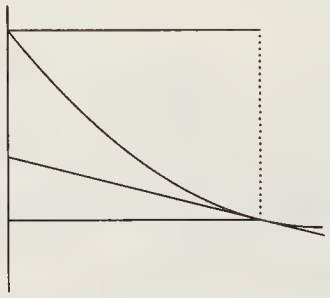
Cui malo videndum est an remedium quaeri possit, vel explicando quod experiemur, vel alia inquirendi ratione substituta:

8 Methodus ... inversa *erg. L* 14 qvia *(1)* omnis pur *(2)* nulla *L* 15 duas *(1)* inaeqvales *(2)* oppositas *L* 16 f. est. *(1)* Esto aeqvatio: *(2)* Cui *L*

14 determinari: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Nempe non tantum semper haberi potest summa omnium BG, vel Summa omnium WL; sed et summa omnium AH. vel FM. Nimirum summa omnium AE aequatur segmento $ALCA$ duplicato; summa omnium EF concavo $AFLCA$ duplicato. Jam concavum simplex auctum segmento simplici aequatur Triangulo ABL. Ergo summa omnium AH, seu $AE + EH$ (ponendo $EH \sqcap \frac{EF}{2}$), vel summa omnium MF seu $EF + EM$ (ponendo $EM \sqcap \frac{AE}{2}$), aequatur Triangulo ABL. Appellando ergo AB, x, BL, y. $BD \sqcap l$. Erit $AD \sqcap -l + x$. vel si mavis $+l - x$ et $\frac{AE}{AD}$ erit: $\sqcap \frac{y}{l}$. Adeoque $AE \sqcap \frac{yAD}{l}$ sive

3 omnium *(1)* EF. *(2)* AH. *L* 5 segmentum *L ändert Hrsg.* 8 AD $\sqcap$ *(1)* ⟨∓⟩l ∓ x. vel si mavis ∓l∓ x *(2)* | + *ändert Hrsg.* | l + x *L*

1 *Fig. 2*: Die Punktbezeichnung G tritt zweimal auf. Im Text wird nur der auf der Geraden $DABG$ liegende Punkt verwendet. 2 semper: Dies setzt voraus, dass die Ordinate BL bekannt ist. 4–7 summa ... ABL: Der richtige Wert für die Summe der EF wäre die einfache, nicht die doppelte Fläche $AFLCA$. Der Fehler wirkt sich aus auf die Summierung der AH. Leibniz hält die Summe der AH irrtümlich für gleich mit der Summe der MF, für die er den richtigen, in VII, 3 N. 39 S. 566 berechneten Wert angibt.

$AE \sqcap \frac{+yl - yx}{l}$. Porro $EF \sqcap y - AE$, sive $EF \sqcap \frac{yl - yl + yx}{l}$, fiet: $EF \sqcap \frac{yx}{l}$ et $EH \sqcap \frac{yx}{2l}$, et $AH \sqcap AE + EH \sqcap \frac{2yl - 2yx + yx}{2l}$ sive $AH \sqcap \frac{2yl - yx}{2l}$.

Ponamus jam exempli causa AH esse applicatam parabolae quae valeat $\frac{x^2}{a}$, fiet $\frac{x^2}{a} \sqcap \frac{2yl - yx}{2l}$ sive $\underset{-}{+2lx^2} \underset{-}{+yxa} \underset{+}{-2yla} \sqcap 0$. et $l \sqcap \frac{yxa}{+2ya - 2x^2}$. Est autem $\frac{l}{y} \sqcap \frac{y}{BG}$ seu $\frac{BG}{y} \sqcap \frac{y}{l} \sqcap \frac{1}{\frac{xa}{2ya - 2x^2}} \sqcap \frac{2ya - 2x^2}{xa}$, fiet: $BG \sqcap \frac{2y^2a - 2x^2y}{xa}$[,] cujus quadratum: $\frac{4y^4a^2 - 4y^3ax^2, +4x^4y^2}{x^2a^2}$, addatur ei $BL^2 \sqcap y^2$, fiet: $\frac{4y^4a^2 - 4y^3ax^2 + 4x^4y^2 + y^2x^2a^2}{x^2a^2} \sqcap p^2$, ponendo $p \sqcap GL$. sive

$$y^4 \; - \; \frac{x^2}{a} \; y^3[+] \; \frac{x^4}{a^2} \; y^2 \quad * \quad - \; \frac{x^2}{4} \; p^2 \sqcap 0.$$
$$\frac{x^2}{4} \; ..$$

vel aliter ordinando:

$$x^4 \quad * \quad - \; \frac{a^2p^2}{4y^2} \; x^2 \quad * \quad + \; y^2a^2 \sqcap 0.$$
$$- \quad ya \quad ..$$
$$+ \quad \frac{a^2}{4} \quad ..$$

Aequationem $y^2 \langle - \rangle 2ey + e^2$, multiplicemus per $\frac{l}{a}y^2 + my + an$, fiet:

$$\frac{l}{a} \; y^4 \quad - \; 2\frac{le}{a} \; y^3 \quad + \quad \frac{le^2}{a} \; y^2 \qquad\qquad \sqcap 0$$
$$+ \quad m \; .. \quad - \; 2em \; .. \quad + \; e^2m \; y$$
$$+ \quad an \; .. \quad - \; 2ane \; .. \quad + \; e^2an$$

sive:

1 AE ⊓ *(1)* ŧyl *(2)* $\frac{\text{+ŧyl +ŧ yx}}{\text{l}}$ *(3)* $\frac{\text{+yl} - \text{yx}}{\text{l}}$ *L*

5 quadratum: Im Zähler des folgenden Bruches müsste $-8y^3ax^2$ stehen. Der fehlerhafte Term geht in die weiteren Rechnungen ein und wirkt sich bis zum Ende des Stücks aus.

$$\left.\begin{array}{llllllllll} y^4 & - & 2e\ y^3 & + & e^2\ y^2 & + & \frac{e^2ma}{l}\ y & + & \frac{e^2a^2n}{l} & \\ & + & \frac{ma}{l}\ .. & - & \frac{2ema}{l}\ .. & - & \frac{2a^2ne}{l}\ .. & & & \\ & & & + & \frac{a^2n}{l}\ .. & & & & & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Unde aequationes collatitiae:

$-lx^2 \sqcap -2ela + ma^2$, et $m \sqcap \frac{2ela - lx^2}{a^2}$. Et: 5

$4x^4l + a^2x^2l \sqcap 4e^2a^2l - 8ema^3 + 4a^4n$, sive $n \sqcap \dfrac{4x^4l + a^2x^2l \overset{+12}{\boxed{\begin{matrix}-4\\+16\end{matrix}}} e^2a^2l - 8elx^2a}{4a^4}$.

$$\frac{2ela - lx^2}{a^2}$$

Et $em \sqcap 2an$, sive $8e^2a^3\not{l} - 4a^2e\not{l}x^2 \sqcap 8ax^4\not{l} + 2a^3x^2\not{l} + 24e^2a^3\not{l} - 16e\not{l}x^2a^2$.

Sed displicet quod ita video $\underline{l}$ ubique evanescere et ipsius quod nolim, $\underline{e}$ valorem definiri. Cui malo nescio an mederi liceat explicando y per $z + q$. 10

22. DE TRIANGULO CURVARUM CHARACTERISTICO

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 20 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 891

Jan. 1675.

De Triangulo Curvarum characteristico

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ TDL et GWL similia

(1) $TD \frown WL \sqcap DL \frown GW$, sive productae, in partes basis aequantur ordinatis in partes axis, seu ordinatarum summae id est ipsi figurae. Adde 21.

(2) $TD \frown GL \sqcap TL \frown GW$. seu summa Tangentium aequatur productis ad curvam. Adde 16.

(3) $DL \frown GL \sqcap TL \frown WL$. seu Tangentes ad basin (vel axem reciprocum. Directus AD reciprocus AE) aequantur momento curvae ex axe.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ LDM, GWL similia:

(4) $DL \frown WL \sqcap DM \frown GW$. Ergo summa omnium reductarum ipsius DL semiquadrato.

(5) $DL \frown GL \sqcap ML \frown GW$. seu summa omnium perpendicularium ad curvam ex axe aequatur momento curvae ex axe.

---

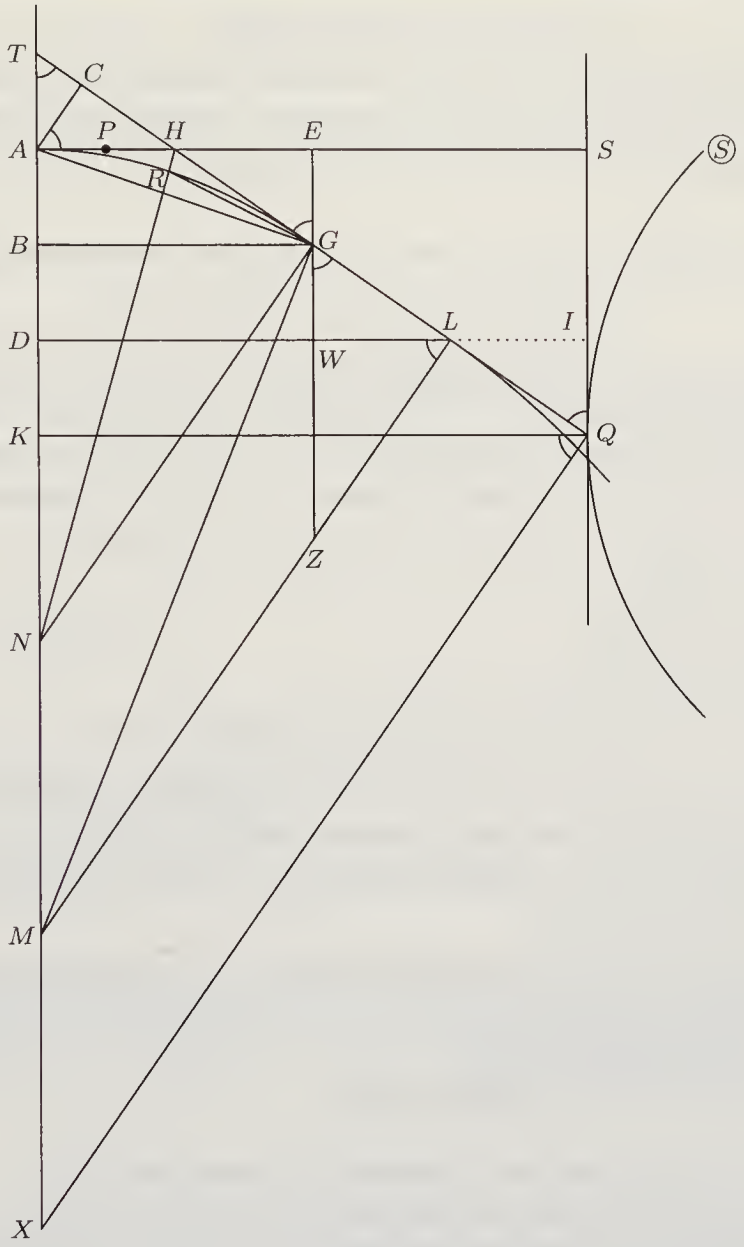
6 *Darunter:* Pleraque ista jam biennio abhinc a me deprehensa, hic breviter recolui; sub finem exemplum de crementorum Conicae momentis ex data Conicae quadratura.

15 f. *Hinter* semiquadrato: NB.

5 Ian. 1675. *erg. L* 6 de ... characteristico *erg. L* 7 ob ... similia *erg. L* 9 adde 21. *erg. L* 11 adde 16. *erg. L* 18 momento | figurae *ändert Hrsg.* | ex axe. | adde 19. *erg., streicht Hrsg.* | *L*

---

19 biennio abhinc: Leibniz bezieht sich wohl in erster Linie auf VII, 4 N. 26 u. 27; vgl. den Abschnitt zum charakteristischen Dreieck in der Einleitung, VII, 4 S. XXIII. 20 sub finem: s. u. die Sätze (27) bis (31) S. 189 Z. 21 – S. 191 Z. 7.



[*Fig. 1*]

C o r o l l a r. Hinc sequitur ex hac et 3, esse: $TL \frown WL \sqcap ML \frown GW$. Tangentes ad basin aequari summae perpendicularium scilicet ad axem.

(6) $DM \frown GL \sqcap ML \frown WL$ seu reductae ad curvam perpendicularibus ad basin.

2 |(6) *gestr.*| C o r o l l a r. *L* 3 f. axem. *(1)* (7) *(2)* (6) *L* 4 ad *(1)* axem *(2)* basin *L*

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia ACH, GWL

(8) $AC \frown WL \sqcap CH \frown GW$. Summa omnium CH $\sqcap$ omnibus AC. ad basin.

(9) $AC \frown GL \sqcap AH \frown GW$. seu summa resectarum aequatur duplo segmento AGA. quia summa omnium AC seu occurrentium, ad curvam aequatur dicto duplo segmento. Adde 11. et 14.

(10) $CH \frown GL \sqcap AH \frown WL$. seu occurrentes ad curvam, resectis ad basin.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia TAH, GWL

(11) $TA \frown WL \sqcap AH \frown GW$. seu summa omnium TA ad basin seu axem reciprocum, aequatur duplo figurae segmento. Quod idem etiam ex 1. demonstrari potest, nam quia omnes TD ad basin aequantur figurae convexo, et quoniam si a figurae convexo auferas omnes AD ad basin seu figurae concavum restat duplum figurae segmentum, patet residuorum TA summam ad basin aequari duplo figurae segmento, unde etiam 9. demonstrari posset. Adde 14.

(12) $TA \frown GL \sqcap TH \frown GW$.

(13) $AH \frown GL \sqcap TH \frown WL$.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia GEH, GWL

(14) $GE \frown WL \sqcap EH \frown GW$. Omnes EG ad basin, aequantur summae omnium EH ad axem, unde cum constet EG ad basin complere figurae concavum, vel ut generalius loquamur s u p p l e m e n t u m ; sequitur etiam EH ad axem, eidem aequari, quod et ex prioribus, nempe 9. et 11. patet.

(15) $GE \frown GL \sqcap HG \frown GW$. seu summa omnium HG aequatur momento figurae ex vertice. Ut generalius loquamur, dicendum non ex vertice, sed axe reciproco. Potest enim fieri ut curva non perveniat ad AE.

(16) $HE \frown GL \sqcap GH \frown WL$. coincidit cum 2.

Sit in ipsa AH, medium punctum P, sequitur Theorema mirabile,

(17) summam omnium PE aequari Triangulo ABG. Nam si a summa omnium AE seu figura $ABGA$ auferatur summa omnium AP seu segmentum simplex AGA. restabit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ABG.

5 adde ... 14 *erg. L* 9 ex *(1)* junctis *(2)* 1. *L* 13 adde 14. *erg. L* 15 f. $\sqcap$ TH $\frown$ WL *(1)* Sit in ipsa AH medium punctum P. *(2)* ob *L* 19 ad *(1)* basin *(2)* axem *L*

2 (8): Zählung springt. 6 occurrentes: Gemeint sind vielmehr die Tangentenabschnitte CH. 25 Theorema: vgl. N. 21 S. 181 Z. 6 f.

Portiones Tangentium infinite parvae seu latera curvae ponantur esse RG, GL etc. Sint N, M puncta ubi perpendiculares ad curvam axi occurrunt. Patet figuram totam $AMLGRA$. conflari ex omnibus Triangulis RNG, GML quorum vertices in axe[,] bases in curva; et ex omnibus Triangulis NGM etc. quorum vertices in curva[,] bases in axi. Jam

(18) summa omnium Triangulorum GNM, aequatur ordinatis in incrementa Reductarum dimidiatis seu $\frac{GB \frown NM}{2}$.

(19) Summa $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ RNG. aequatur dimidiis perpendicularibus in curvam.

(20) Hinc omnes $\frac{GB \frown NM}{2}$ aequantur spatio $AMLGRA$, demtis dictis dimidiis. Adde 26.

Sit recta SQ. ipsi ADK parallela; erit recta $KQ \sqcap a$. semper eadem. Porro $\bigtriangledown^{\text{la}}$ TKQ, GWL similia, hinc:

(21) $TK \frown WL \sqcap a \frown GW$. Semper ergo NB. habentur TK ad basin, et aequantur rectae constantis in abscissam facto. Unde et IQ, in basin WL, aequantur spatio inter curvam, et SI. Quod coincidit cum 1.

(22) $TK \frown GL \sqcap TQ \frown GW$.

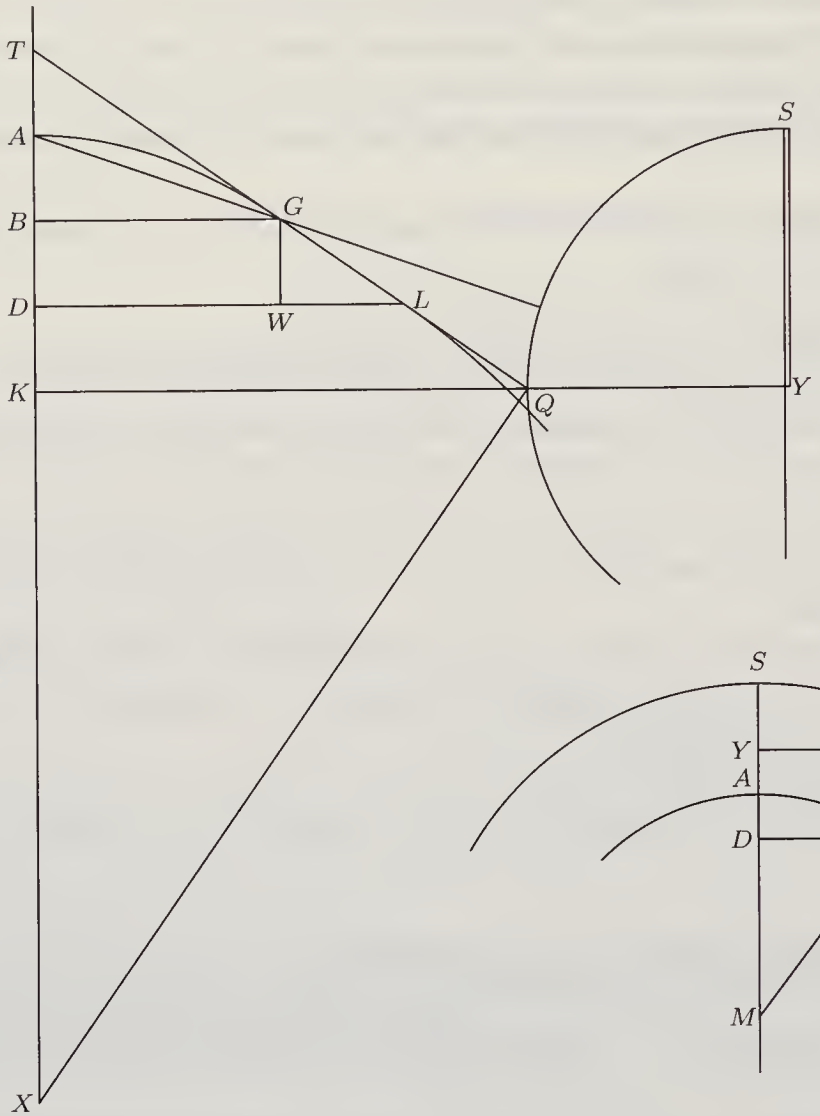
(23) $KQ\,(\sqcap a) \frown GL \sqcap TQ \frown WL$. Hinc summa omnium TQ. aeq. rectangulo sub curva et a.

Si ducatur QX perpendicularis ad TQ ob Triangula QKX et GWL similia, fiet

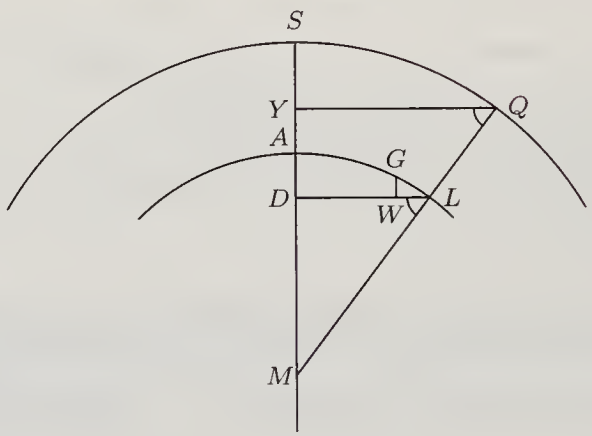
(24) (KQ sive) $a, \frown WL \sqcap KX \frown GW$. Habetur ergo summa omnium KX, quae semper aequabitur rectangulo $DL \frown a$. Sunt enim KX ipsis crementis seu WL homogenea.

1 f. etc. *(1)* sit N punctum ubi perpendicularis ad curvam occurrit *(2)* Sint *L* 8 f. dimidiis *(1)* productis in *(2)* perpendicularibus ... curvam | *(a)*, seu dimidio curvae momento ex axe. vide 5. *(b)* demtis ⟨—⟩ in perpendiculares *gestr.* | (20) *L* 9 aeqvantur *(1)* dimidio curvae momento ex axe *(2)* spatio AMLGRA, *(a)* demto dimidio curvae momento ex axe *(b)* demtis *L* 10 adde 26. *erg. L* 16 f. TK ⌢ GL ⊓ | DL ⌢ G. *ändert Hrsg.* | (23) *L* 17 ⊓ TQ ⌢ | GW. *ändert Hrsg.* | Hinc *L*

6 (18): Die folgende Aussage gilt für die NM, die Zuwächse der Subnormalen sind aber gleich $NM - GW$. Das Versehen wirkt sich auf Satz (26) aus.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

(25) Sit ipsa SQ non recta sed alia quaelibet linea v. g. Circularis. Idem dicendum est quod propositionibus 21. 22. 23. 24. nisi quod KQ. non est constans. Ideo nec $TQ \frown WL$, habetur nec $KX \frown GW$. Pone Circuli diametrum ipsi TX parallelam vel alterius curvae

3 f. nec | KQ ⌢ GW, *ändert Hrsg.* | habetur *L* 4 pone *(1)* centrum *(2)* Circuli *L*

directricem SY. erit summa omnium KY, semper earundem seu rectangulum sub $KY \sqcap a$, et $AD \sqcap$ omnibus TK in WL. Hinc curvarum quarundam ex se invicem derivari possunt dimensiones, et rursus aperitur ratiocinandi campus; sed et eodem modo non tangentes, sed perpendiculares ad certam quandam lineam constantem rectam curvamve produci intelligi possunt, quae materia adhuc examinanda restat.

Usui inprimis haec inquisitio esse potest, cum portiones axis SY, semper aequales seu cum SY ipsi AD proportionaliter dividitur, quod intelligi inprimis potest in figuris similibus et similiter positis. Imo vereor ut eae semper proportionaliter dividantur, quod forte non nisi in circulis concentricis locum habet.

Huc adde cum curva una ad tangentem alterius angulum facit datum vel dato modo crescentem.

(26) Manifestum est ex dictis, spatium $AMLA \sqcap$ omn $GML +$ omn NGM. Vide 18. 19. 20. Jam omn $NGM \sqcap$ omn $\frac{GB \frown MN}{2}$. et $GML \sqcap \frac{GB \frown GZ}{2}$; et $GZ \sqcap GW + \frac{WL^2}{GW}$: et $AMLA \sqcap$ omn $GB \frown GW + \bigtriangledown LDM$. Ergo fiet:

$$\text{omn } GB \frown GW + \bigtriangledown LDM \sqcap \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} + \text{omn } \frac{GB \frown GW}{2}, + \text{omn } \frac{GB \frown WL^2}{2\,GW}$$

sive auferendo utrobique $GB \frown GW$, fiet:

$$+\bigtriangledown LDM \sqcap + \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} - \text{omn } GB \frown \frac{GW}{2}, + \text{omn } GB \frown \frac{WL^2}{2\,GW}.$$

Patet ergo quadraturam figurae ex his tribus compositae semper haberi. Unde sequitur si ex his tribus habeatur una haberi et compositam ex caeteris, si habeantur duae etiam tertiam haberi.

(27) In Conicis ipsa MN est constans, posito GW esse constantem; sive GW ad MN certam semper constantemque habet rationem, unde sequitur in Conicis $\frac{GB \frown WL^2}{GW}$ pendere ex quadratura figurae.

5 intelligi | potest *ändert Hrsg.*|, qvae *L* 16 utrobiqve | $\frac{\text{GB} \frown \text{GW}}{2}$ *ändert Hrsg.*|, fiet *L*
19 et *(1)* summam, vel *(2)* compositam *L*

17 $+\bigtriangledown LDM \sqcap$: Da Leibniz die MN statt der $MN - GW$ für die Zuwächse der Subnormalen hält (s. o. S. 187 Z. 6 f.), erkennt er nicht die mögliche Vereinfachung der rechten Seite der Gleichung.

(28) In omni figura $\frac{GB \frown WL^2}{GW}$ dupliciter concipi possunt, vel sumendo GW constantem, vel sumendo WL constantem. Itaque sic dici potest: Crementorum quadrata ducta in figuram, aequantur momento ex initio, figurae crementorum contrariorum (ad alteram directricem) reciprocae.

(29) Hinc sequitur in Conicis tam crementorum quadrata seu momenta ex axe ducta in figuram, quam momentorum momenta ex principio, figurae crementorum contrariorum reciprocae haberi posse: supposita Conicae Quadratura.

(30) Operae pretium est in eam rem calculo uti. Generalis est conicae proprietas: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ ponendo $x \sqcap AB$ et $y \sqcap BG$. Ponatur $BT \sqcap t$. $GW \sqcap \beta$. Unde $2at \mp \frac{2a}{q}xt \sqcap 2y^2$, sive $t \sqcap \frac{y^2}{a \mp \frac{a}{q}x}$, $\sqcap \frac{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{a \mp \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{ax}{a \mp \frac{a}{q}x} + x$. Est autem $WL \sqcap \beta,, \frown \frac{ax}{a \mp \frac{a}{q}x} + x \sqcap \frac{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{a \mp \frac{a}{q}x}\beta$ / $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$. adeoque $WL \sqcap \frac{\beta\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}}{a \mp \frac{a}{q}x}$. Ergo $\frac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap$ $\frac{\beta\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{a^2 \mp \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2}$. Cujus dimensio ex ipsius Conicae sectionis dimensione pendet.

1 figura *(1)* $\frac{GB \frown WL^2}{GW}$ aeqvatur *(2)* \|omnes *erg. u. gestr.*\| $\frac{GB \frown WL^2}{GW}$ *L* 3 momento *(1)* crementorum contrariorum *(2)* ex *L* 6 momentorum *(1)* crementorum *(2)* momenta *L*

12 $\frac{\beta\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{a^2 \mp \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2}$ *(1)* Data ergo *(2)* Ergo in sect *(3)* Ergo ex data sectione Conica haberi potest figura, Cubis *(4)* Cuius *L*

10 $WL \sqcap$: Leibniz berechnet auf der rechten Seite $\frac{\beta t}{y}$ statt $\frac{\beta y}{t}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 12, wirkt sich aber nicht auf die Schlussfolgerung aus.

(31) Ponamus jam contra directricem esse non AD, sed AE, constantem WL, quam vocabimus λ. Crementum ordinatarum EG, esse GW; ipsam $EH \sqcap l$. primum investigemus hoc modo: $2ax \mp \frac{2a}{q}x^2 \sqcap 2yl$. sive $l \sqcap \frac{ax \mp \frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \frac{2ax \mp \frac{a}{q}x^2 - ax}{y}$ sive $\frac{y^2 - ax}{y}$. Jam ut x inveniatur, erit $x^2 \mp \frac{2q\not{\phi}}{\not{a}}x + q^2 \sqcap q^2 \mp y^2$, adeoque fiet $\mp x \mp q \sqcap \surd, q^2 \mp y^2$, et $x \sqcap \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}$ adeoque $l \sqcap \frac{y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y} \sqcap EH$. Ergo GW erit $\sqcap \frac{\lambda,, \frown y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y,, \frown \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}$; et $\frac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap \frac{y \frown \lambda\not{2}, \frown y, \frown \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}{\not{\lambda},, \frown y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}$, cujus seriei itidem habetur summa, ex datis omnibus $\sqrt{q^2 \mp y^2}$.

Quae theoremata vel ideo annotanda duxi, quod semel elapsa non facile rursus in mentem venirent, et non nisi per multas ambages deprehensa sint. Et haec quidem de Trianguli characteristici usu ad dimensiones curvilineorum nunc sufficiant.

---

4 *Nebenbetrachtung zu* $\mp x \mp q$:

$$\begin{array}{c} + \; x \; + \; q \\ \boxed{- \; x \; - \; q} \\ + \; x \; - \; q \\ - \; x \; + \; q \end{array}$$

2 vocavimus *L ändert Hrsg.*

---

4 $\sqcap q^2 \mp y^2$: Richtig wäre $q^2 \mp \frac{q}{a}y^2$; bei der Berechnung von GW kommt ein weiteres Versehen hinzu. Die Rechenfehler beeinträchtigen die Schlussfolgerung nicht.

23. DE TROCHOEIDIBUS GENERIS COMPOSITI

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 11–12. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 11 r°. Bl. 11 v°, 12 r° u. 12 v° leer.
Cc 2, Nr. 902

Januar. 1675.

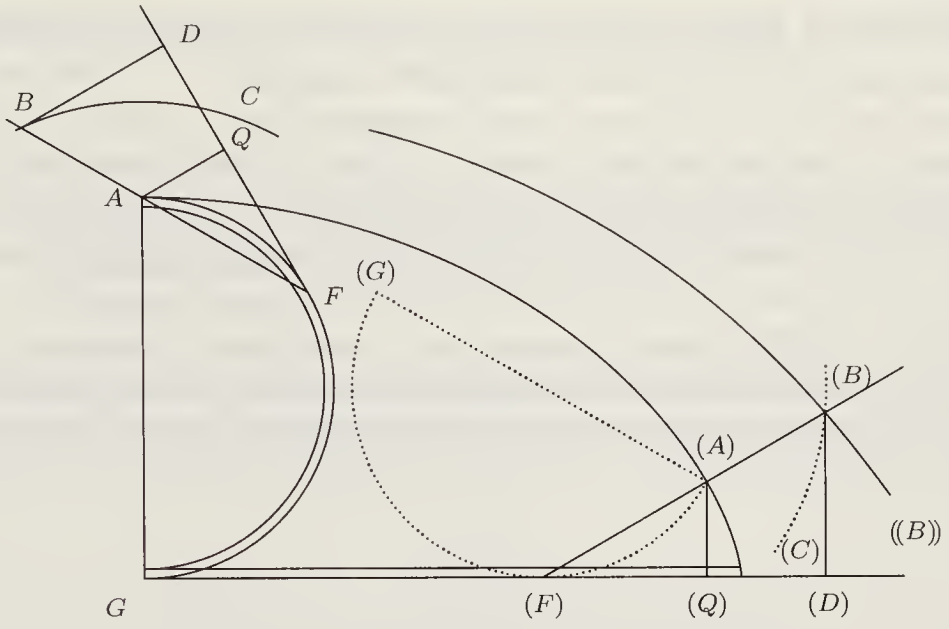
De Trochoeidibus generis compositi.

Trochoeidem voco quaecunque applicatione continua lineae cujusdam curvae rigidiae ad aliam lineam (: neque enim hic de motu rotae per planum superficiemve excurrente loquor :), describitur. Linea autem cui applicatur describens, quam possis appellare sustinentem, est aut curva, aut recta; rectam autem nunc quidem supponemus. Rursus descriptio fiet aut ope puncti fixi, aut ope puncti mobilis. Ac primum descriptio per punctum fixum super recta verbo attingenda est, ut altera eo clarius intelligatur.

Esto linea describens FG. punctum fixum A. recta super qua fieri debet volutio, sive sustinens sit $G(F)$. Transferatur motu dicta figura AFG in situm $(A)(F)(G)$ eoque motu describetur curva Trochoeides $A(A)$. Ex puncto A. ad rectam quae curvam describentem in puncto F tangit, demittatur perpendicularis AQ. Patet eam esse ordinatam Trochoeidis in basin seu rectam sustinentem.

Hinc posito curvam describentem esse analyticam, ex data AF, dabuntur AQ, FQ. Itaque Trochoeidis quoque inde descriptae trium rectarum perpendicularis $(A)(F)$, ordinatae $(A)(Q)$ et reductae $(Q)(F)$ nota invicem relatio erit, et aequatione analytica exprimi poterit; etsi ipsa Trochoeides non sit analytica, id est etsi ordinatarum $(A)(Q)$ ad abscissas $G(Q)$ relatio aequatione explicari non possit, nisi curvae GF magnitudine data. Haec autem qualiscunque et ut ita dicam semianalytica curvarum ejusmodi non analyticarum $A(A)$ explicatio in multis analyticam supplet. Nam si alia quaedam reperiatur curva, cujus eadem sit aequatio relationem explicans inter ordinatam et reduc-

7 Trochoeidibus *(1)* a puncto variante descri *(2)* compositionibus *(3)* generis *L* 9 f. (neqve ... loqvor :) *erg. L* 12 supponemus. *(1)* Si recta est sustentans *(2)* Rursus *L* 16 GF *L ändert Hrsg.* 24 f. nisi ... data *erg. L* 27 cuius *(1)* eadem sit proprietas *(2)* ea *(3)* eadem sit aeqvatio *(a)* semianalyti *(b)* relationem *L*



[*Fig. 1*]

tam, sequitur eam cum proposita esse eandem. Eodem modo et diversae curvae invicem similes agnosci possunt. Et si quidem ope diversarum curvarum describentium, ad eandem aequationem, qualem dixi relationem inter $(A)(F)$ et $(A)(Q)$ explicantem perveniri potest; hae duae curvae invicem dimensione pendebunt. Unde quam vastus aperiatur novae Geometriae campus Analyticus sagax facile judicabit, praesertim si eadem ope Trochoeidum compositi generis, ad quae nunc progrediar in immensum proferri cogitet.

Ostendam enim unius ejusdemque curvae analyticae ope tot alias describi posse curvas semianalyticas ex Trochoeidum genere, quot curvae analyticae sunt in rerum natura. In tanta autem multitudine infinitis utique modis evenire necesse est ut diversarum quarundam Curvarum describentium inter se coincidant Trochoeides. Satis tamen compertum habeo, impossibile esse, ut datis duabus quibuslibet curvis una utrique communis Trochoeides semianalytica reperiatur, alioquin enim omnes curvae ad unam reduci possent; et unius dimensione habita, uti certe habetur multorum, haberentur omnes: quod

1 *Fig. 1*: Leibniz übernimmt die Figur zum größten Teil aus Fig. 11 von N. 17 (s. Erl. zu S. 156 Z. 4). Dies gilt insbesondere für die falsche Neigung des punktierten Halbkreises, der hier in der korrekten Lage wiedergegeben wird.

impossibile esse scio. Itaque impossibile est, ut exempli causa parabolae Heuratianae et Apollonianae communis Trochoeides semianalytica reperiatur.

Porro ut hoc Trochoeidum genus novum intelligatur sumto quolibet in curva describente puncto F, recta per punctum constans A trajecta producatur dum curvae cuidam BC, occurrat in B. Unde in tangentem curvae ad F, seu in rectam volutionis demittatur perpendicularis $(B)(D)$ ea erit trochoeidis descriptae ordinata. Itaque quot diversae substitui possunt curvae excipientes BC, tot diversae trochoeides unius ejusdemque curvae volutione describi possunt. Imo et situs unius ejusdemque curvae excipientis diversus aliam atque aliam faciet Trochoeidem $(B)((B))$. Quoniam autem ipsa $(F)(B)$ non est perpendicularis ad curvam $(B)((B))$ superest, ut in eam inquiramus.

1 f. et *(1)* Archimedeae *(2)* Apollonianae *L*

24. MOMENTA CURVAE PARABOLICAE. DE MAXIMIS ET MINIMIS

[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 148. 1 Bl. 4°. 1 3/4 S. Bl. 148 bildete ursprünglich mit LH 35 XIII 1 Bl. 355 (N. 25) und LH 35 XIV 1 Bl. 70 (Cc 2, Nr. 1450; Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1167

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Januar 1675 belegt. N. 24 u. N. 25 sind vor Cc 2, Nr. 1450 geschrieben worden, in der sich Leibniz mit Schootens Methode der Koordinatentransformation vertraut macht. Der Hinweis in N. 26 S. 207 Z. 3–5 dürfte danach verfasst worden sein.

[*Teil 1*]

Momenta Curvae Parabolicae

Cum Centrum Gravitatis et dimensio Curvae parabolicae ex sola Hyperbolae quadratura pendeat, sequitur omnia ejus momenta ex qualibet recta haberi posse.

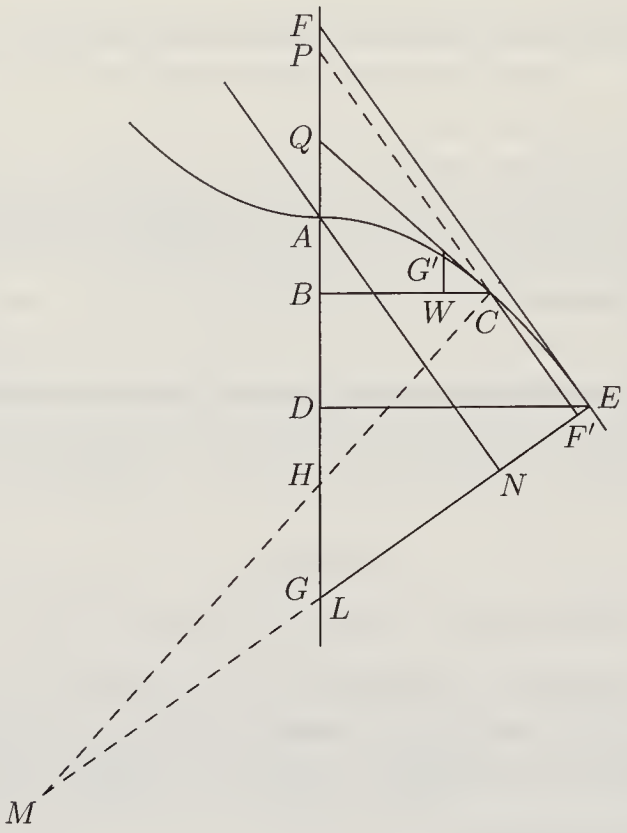
In parabola: $AB \sqcap x$. $BC \sqcap \sqrt{2ax}$. $DE \sqcap b$. At $\sqrt{2ADa} \sqcap b$. Ergo $2aAD \sqcap b^2$, seu $AD \sqcap \frac{b^2}{2a} \sqcap AF$. $DG \sqcap a \sqcap BH$.

Ut $\overbrace{\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+b^2}}$ ad $\frac{b^2}{a}+a$, ita PF' ad PL. Est autem $PL \sqcap PA + \overset{\wedge}{AD} + DL$ $\frac{b^2}{2a} \sqcap a$

et $PA \sqcap PB - x$. et $\frac{PB}{BC \sqcap \sqrt{2ax}} \sqcap \frac{FD \sqcap \frac{b\not{^2}}{a}}{DE \quad \not{b}} \sqcap \frac{b}{a}$. Ergo $PB \sqcap \frac{b\sqrt{2ax}}{a}$. Et $PA \sqcap \frac{b\sqrt{2ax}-ax}{a}$ et $PL \sqcap \frac{2b\sqrt{2ax}-2ax+b^2+2a^2}{2a}$.

$-AB$

11 Momenta ... Parabolicae *erg. L* 12 Gravitatis | *(1)* et dimensio *(2)* et dimensio *erg.* | Curvae *(a)* Hyperbo *(b)* parabolicae ex *(aa)* eius *(bb)* sola *L* 15 f. ⊓ BH. | *(1)* Triangula FDE, et CFM similia, item *(2)* FDE et ANL similia. *gestr.* | Ut *L* 17 $\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+2ax}$ *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 1*]

Jam ut $FL - PL$, ad FL, ita EF' ad EL sive ut

$$\frac{\overbrace{b^2+a^2}}{a} \qquad\qquad \overbrace{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$\frac{\textcircled{2}b^2\boxed{+2a^2} - 2b\sqrt{2ax} + 2ax\boxed{-b^2}\boxed{-2a^2}}{2\not{a}} \text{ ad } \frac{b^2+a^2}{\not{a}}; \text{ ita } EF' \text{ ad } \sqrt{b^2+a^2} \text{ sive ut } \mp b \pm$$

---

1 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Figur und im Text die Punktbezeichnungen F und G doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wurden die Bezeichnungen F' und G' eingeführt. Der Schnittpunkt der Normalen EM mit der vertikalen Achse trägt die Bezeichnungen G und L, welche beide von Leibniz im Text benutzt werden; dies wurde beibehalten. Ein verworfener Ansatz der Figur wird nicht wiedergegeben. 4 sive ut: Leibniz vernachlässigt ab jetzt den Faktor $\frac{1}{2}$ auf der linken Seite der Proportionsgleichung. Dies beeinträchtigt (zusammen mit einem weiteren Rechenfehler) die Rechnung bis S. 197 Z. 10.

$\sqrt{2ax}$ ad $\sqrt{b^2+a^2}, \square$; ita EF' ad $\sqrt{b^2+a^2}$. Ergo ut $\mp b \pm \sqrt{2ax}, \square$ ad $\sqrt{b^2+a^2}$, ita EF' ad 1. Eritque $EF' \sqcap \frac{\mp b \pm \sqrt{2ax}, \square}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

Jam $G'C$ infinite parva est ad $G'W \sqcap \beta$. ut QC $(\sqcap \sqrt{QB^2+BC^2})$ ad $QB \sqcap 2x$.
$\bigwedge$ $\bigwedge$
$4x^2$ $2ax$

Eritque $G'C \sqcap \frac{\beta\sqrt{4x^2+2ax}}{2x}$, ponamus compendii causa $\sqrt{b^2+a^2} \sqcap 1$. erit $G'C$ ducta in $EF' \sqcap \frac{\mp\beta b\sqrt{4x^2+2ax}}{2x} \pm \frac{\beta\sqrt{8ax^3+4a^2x^2}}{2x}$. Cujus summa ex quad. Hyperbolae. Ex quibus partibus, utraque separatim examinetur ponaturque $\frac{b\sqrt{4x^2+2ax}}{x} \sqcap y$. Ergo $\frac{b^2 \frown 4x+2a}{x} \sqcap y^2$. adeoque $b^2, \frown 4x+2a \sqcap y^2x$. sive $4b^2x + 2ab^2 - y^2x \sqcap 0$. et $x \sqcap \frac{-2ab^2}{4b^2-y^2} \sqcap \frac{2ab^2}{y^2-4b^2}$ quae pendet ex quad. Hyp. ut constat. Ergo et altera; ex eadem pendebit quam sic examinabimus, $\frac{\not{x}\sqrt{2ax+a^2}}{\not{x}}$. Ea autem est ipsissima Hyperbola. Sed si EF' jam sumta et appellata z, in caeteras inquiramus aliae habebuntur quadraturae.

[*Teil 2*]

$\sqrt{2ax-x^2} + a - x \sqcap \omega$. Ergo $\sqrt{2ax-x^2} \sqcap \omega + x - a$. Ergo $2ax - x^2 \sqcap \omega^2 + 2\omega x - 2a\omega, +x^2 - 2ax + a^2$. Unde ordinando ad tangentes fiet:

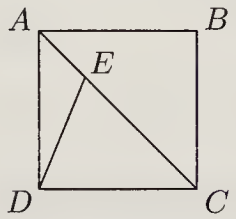
$$\begin{array}{rrcr} -2\not{4}x^2 & +2\not{4}ax \ \ldots\ldots & & \not{2}\omega^2 + \not{2}x\omega \\ & -\not{2}\omega & & -\not{2}a\omega \\ \text{vel } -2xl & +2al & \sqcap & \omega^2 + x\omega\ , \\ & -\omega\ .. & & [-a\omega] \end{array}$$

5 $\sqcap$ 1. | et $\beta \sqcap 1$. *gestr.* | erit L 6 Cuius ... Hyperbolae. *erg.* L 7 partibus, *(1)* prior erit: *(2)* utraqve *(a)* ad aliam *(b)* separatim L

---

5 f. $G'C$ ducta in EF': Leibniz übernimmt EF' fehlerhaft ohne Quadrierung von $\pm b \mp \sqrt{2ax}$ im Zähler. 10 Hyperbola: Es müsste Parabola lauten.

sive $l \sqcap \frac{\omega^2 + x\omega - a\omega}{-2x+2a \atop -\omega}$. Ut autem ω sit omnium possibilium maxima, necesse est l esse infinitum, quod fit si nominator valoris sit $\sqcap$ 0. sive $\frac{-2x+2a}{-\omega} \sqcap 0$. seu $\boxed{+2}x - \boxed{2}a + \boxed{\omega}\sqrt{2ax - x^2}\,\boxed{+a}\,\boxed{-x} \sqcap 0$. Ergo $2ax - x^2 \sqcap a^2 - 2ax + x^2$. Id est necesse est ut sinus complementi sit aequalis sinui recto. Unde $2x^2 - 4ax + a^2 \sqcap 0$. unde $x^2 - 2ax + a^2 \sqcap \boxed{a^2 - \frac{a^2}{2}}\,\frac{a^2}{2}$. Ergo $a - x \sqcap \frac{a}{\sqrt{2}}$. sive $x \sqcap a - \frac{a}{\sqrt{2}}$. Igitur sinus complementi eligendus est, qui sit ad radium, ut quadrati latus ad diagonalem[,] id est faciendo $\frac{a - x \sqcap \text{sin. compl.}}{a} \sqcap \frac{a}{a\sqrt{2}}$, erit sinus complementi ipsis diagonali in quadrato radii et radio tertia proportionalis. Id est si quadratum a radio sit $ABCD$, sinus complementi quaesitus erit DE, recta ex D angulo quadrati a radio AD, demissa in diagonalem AC.



[*Fig. 2*]

$\sqrt{\frac{200}{100}} \sqcap \frac{\sqrt{200}}{10}$. $\frac{14}{10} \sqcap \frac{7}{5}$ ergo $\sqrt{2} \sqcap e + \frac{7}{5}$. et sinus complementi quaesitus $\sqcap \frac{a}{\frac{5e+7}{5}} \sqcap \frac{5a}{5e+7}$. id est sinus complementi suo sinui recto aequalis, seu qui maximam cum suo sinu recto summam constituit, $\sqcap \frac{5a}{7}$ seu paulo minor quam quinque radii septimae. Cujus

---

12 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \not{1}\,\not{2}\,4 \\ \dot{2}\,0\,\dot{0} \\ \hline 1\quad 4 \\ \hline \not{1}\,\not{2}\,\not{4} \end{array}$$

1 $+2x\omega - 2a\omega$ *L ändert Hrsg.* 5 sinus *(1)* versus *(2)* complementi *L* 6 f. id est *(1)* sumenda est media *(2)* faciendo *L* 7 erit *(1)* radius media proportionalis *(2)* sinus *L* 12 $\sqrt{2}$ *(1)* $\sqcap$ 1 *(2)* $\sqcap$ *(a)* 2 *(b)* e + $\frac{7}{5}$. *L* 12 qvaesitus *(1)* circiter *(2)* $\sqcap$ *L* 14–199,2 Cuius ... utilissimo *(1)* est ad utilissimum, *(2)* ad ... 7. *erg. L*

duplum, vis machinae est $\frac{10}{7}a$. Ergo status machinae in situ utilissimo ad inutilissim. est ut 10 ad 7.

Hic calculus exemplum est calculi pro invenienda maxima minimave alicujus figurae ordinata ad directricem datam. Nimirum ubi figuram ad aequationem duarum incognitarum reduxisti: tunc si maximam (m i n i m a m) quaeris ordinatam, retenta incognita abscissas seu parte axis (o r d i n a t a s) significante abjice membra omnia in quibus incognita retenta non reperitur; residua multiplicabis per numerum dimensionum incognitae quantitatis retentae, in ipsis: et formulam ita natam pones nihilo aequalem. Habes ergo duas aequationes[:] priorem, quae figurae naturam explicat, inventam, quarum ope alterutra tolli potest incognitarum, ac proinde determinatum est problema, cum residuae valor hoc modo habeatur. Saepissime ope posterioris statim ab initio habetur aequatio unius tantum incognitae, nempe retentae, si scilicet incognitae in se invicem non ducuntur.

Nota sint casus ubi regula applicari non potest. Sunt enim figurae quae nullam habent ordinatam maximam v. g. parabola, Hyperbola etc. sunt quae nullam habent minimam, ut Hyperbola. Regula generalis est; ut inveniatur maxima ordinata oportet l ponere infinitam; ut minima, infinite parvam. l autem per regulam tangentium invenitur.

Infinitum ita exprimit W a l l i s i u s ∞. sed rectius divisione finiti spatii per rectam infinite parvam 0. v. g. $\frac{a^2}{0}$.

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{10}{7} \frown \frac{7}{8} \sqcap \frac{5}{4}$

14 *Isolierte Nebenbetrachtung:* $a^2 \sqcap yx.\ l \sqcap -x.$

5 (m i n i m a m) *erg. L* 6 (o r d i n a t a s) *erg. L* 6 abjice *(1)* terminos omnes in qvibus incognita retenta non reperitur; residuos *(2)* sig *(3)* qvantitates *(4)* membra *L* 8 in *(1)* ipsa: *(2)* | ipso: *ändert Hrsg.* | *(a)* illi *(b)* productorumqve summa *(c)* et *L* 11 ope *(1)* novi *(2)* posterioris *L* 18 divisione *(1)* finitae per 0, ut $\frac{a^2}{0}$ *(2)* finiti spatii per rectum inf *(3)* finiti *L* 21 $a^2 \sqcap yx.$ | yx ⊓ 0. *gestr.* | l ⊓ *(1)* (−y)x *(2)* −x *L*

---

1 vis machinae: s. Cc 2, Nr. 1192 C. 14–17 Nota ... invenitur: Leibniz entgeht hier, dass die Lage der genannten Kurven entscheidend ist für das Vorhandensein von Maxima und Minima. Fehlerhaft ist außerdem die Bedingung für Minima als Punkte, in denen die Subtangente unendlich klein wird.
18 exprimit W a l l i s i u s : J. WALLIS, *De sectionibus conicis*, 1655, S. 4, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 70 u. *Mechanica*, 1670–71, pars 2, S. 12 (*WO* I S. 297, 405 u. 582).

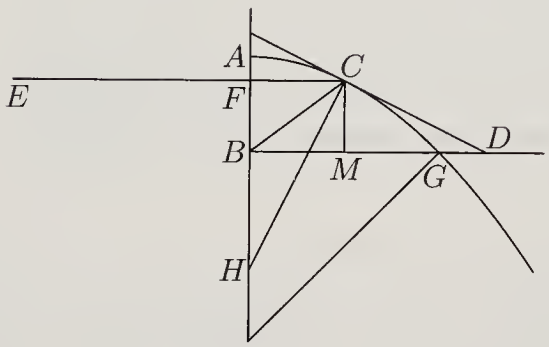
25. DE MEIS FIGURIS SEGMENTORUM

[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 355. Ca 3/5 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 355 r°. Bl. 355 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XIV 1 Bl. 70 (Cc 2, Nr. 1450; Druck in einem späteren Band der Reihe) und LH 35 XIII 3 Bl. 148 (N. 24) ein vollständiges Bl. 2°. Bl. 355 v° enthält das ursprüngliche Ende des Textes der Aufzeichnung Cc 2, Nr. 1450, welches Leibniz vor dem Zerschneiden des Blattes weiter unten abschrieb (LH 35 XIV 1 Bl. 70 v°) und danach oben durchstrich.
Cc 2, Nr. 1196

Datierungsgründe: s. N. 24.

De meis figuris segmentorum



[*Fig. 1*]

Methodus qua usus sum ad segmenta figurarum dimetienda semper utilis, quotiescunque certum aliquod punctum in figura inveniri potest a quo ductae ad curvam rectae habeant certam proprietatem, ut sunt centra et foci. Semper enim intervallorum a recta per punctum illud fixum transeuntium summa a figurae quadratura pendebit, ut in parabola, cujus focus B vertex A. et ad sumtum in ea punctum C, tangens CD. BD ex B productae occurrens in D. Summa omnium BD in EF translatorum portioni $CBGC$ aequabitur. Ducta jam CH perpendiculari ad CD tangentem, posita $AF \sqcap x$ et $AB \sqcap \frac{a}{2}$, patet esse ut $\begin{matrix} FC \\ \wedge \\ \sqrt{2ax} \end{matrix}$ ad $\begin{matrix} FH \\ \wedge \\ a \end{matrix}$ ita FB seu $CM \sqcap \frac{a-2x}{2}$ ad MD. Ergo

11 De ... segmentorum *erg. L*

21 *Fig. 1*: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben. 23 portioni *CBGC*: Es müsste duplo portionis *CBGC* lauten.

$MD \sqcap \frac{a, \frown \frac{a-2x}{2}}{\sqrt{2ax}}$. Jam $BD \sqcap \sqrt{2ax}+MD$. Ergo $BD \sqcap \frac{2\textcircled{4}ax + a^2 \boxed{-2ax}}{\sqrt{2ax}}$. Haberi ergo potest summa omnium $\frac{2ax+a^2}{\sqrt{2ax}}$; at $\frac{2ax}{\sqrt{2ax}} \sqcap y$. et $\frac{2\not{4}a^{\not{2}}x^{\not{2}}}{2\not{\phi}\not{x}} \sqcap y^2$ est ipsa parabola: Ergo habetur summa omnium $\frac{a^2}{\sqrt{2ax}}$. quod mirum non est cum sit Hyperboloeides. $\frac{x^2-a^2}{\sqrt{2ax}}$, hinc etiam habetur, nam addendo ad $\frac{a^2}{\sqrt{2ax}}$ fiet: $\frac{x^2}{\sqrt{2ax}} \sqcap y$ et $\frac{x^4}{2ax} \sqcap y^2$. seu $\frac{x^3}{2a} \sqcap y^2$.

1 Ergo $BD \sqcap$: Der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wäre im Zähler mit einem globalen Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren. Leibniz rechnet konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

26. DE FIGURIS ANALYTICIS FIGURAE ANALYTICAE QUADRATRICIS CAPACIBUS

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 282–283. 1 Bog. 2°. Unteres Drittel von Bl. 283 r° und Bl. 283 v° leer. 2 2/3 S.
Cc 2, Nr. 906

Januarii. 1675.

De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus

Figuras Analyticas appello, in quibus relatio ordinatae ad abscissam aequatione explicari potest.

Figuram Quadratricem voco, qua semel descripta cuilibet portioni figurae propositae spatium rectilineum aequale una generali constructione exhiberi potest.

Scholion.

Figuras malim vocare Analyticas, quas alii post Cartesium Geometricas. Nam Cycloeidem exempli [gratia] non video quid prohibeat appellari Geometricam, cum uno continuo motu eoque admodum simplici exacte describi possit, et proprietates habeat admirandas; Analyticam autem esse nego, quoniam relatio inter ordinatas et abscissas nulla aequatione explicari potest.

8f. de figuris *(1)* Qvadrabilibus *(2)* analytice *(3)* analyticis ... capacibus *erg. L* 10 Figuras *(1)* Qvadrabiles *(2)* Analyticas *L* 11f. potest. | Figuras | Analyticas *(1)* analytice *(2)* universaliter *erg.* | Qvadrabiles voco in qvibus relatio *(a)* segmentorum *(b)* portionum sub abscissa ordinata et curva comprehensarum ad Parallelogrammum *(aa)* ipsarum *(bb)* eiusdem basis et altitudinis analytice haberi, sive aeqvatione qvadam explicari potest Demonstrari potest circulum et Hyperbolam, et alias figuras ab harum dimensione pendentes non esse universaliter qvadrabiles. *gestr.* | *(aaa)* Figuras Qvadratices voco, *(aaaa)* qvarum ordinatae sunt portionibus sub abscissa ordinata, et curva figurae datae comprehensis, proportionales *(bbbb)* qvibus descriptis *(bbb)* Figuram *L* 17 exacte *erg. L*

15 post Cartesium: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 21. 17 uno continuo motu: vgl. *a. a. O.*, S. 18.

Lineae Quadratricis nomine jam et Veteres Geometrae usi sunt; nam si exacte et per omnia puncta sive continuo motu describi posset, Circuli omniumque ejus portionum dimensio haberetur. Prorsus quemadmodum Linea Logarithmica est quadratrix Hyperbolae.

Hinc facile demonstrari potest Circulum et Hyperbolam nullam habere Quadratricem Analyticam; quoniam impossibile est Quadratricem Veterum, et lineam Logarithmicam Analyticas esse.

Unde porro colligitur: impossibilem esse Circuli et Hyperbolae quadraturam, per quam portionum quarumlibet abscissa ordinata et curva comprehensarum relatio ad parallelogrammum inscriptum et circumscriptum aequatione quadam exprimatur.

Hinc illud porro sequitur inutiles esse omnes vias, quae si succederint una eademque regula quorumlibet Circuli Segmentorum dimensionem darent. Unde judicare possum problemata quaedam methodi tangentium inversae esse impossibilia; exempli gratia, lineam exhibere analyticam, in qua reductae ad abscissas eandem habeant relationem quam sinus recti ad versos.

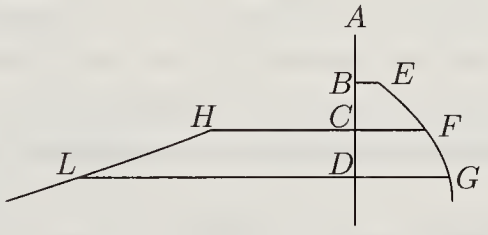


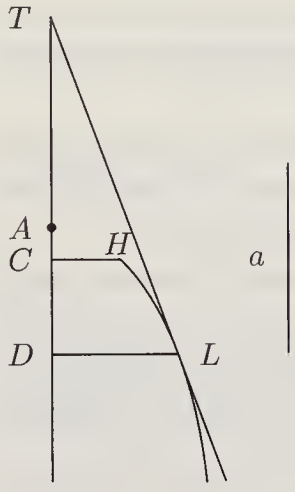
fig. 1.

Porro varia sunt linearum Quadratricium genera, sed ex omnibus eligam unum Simplicissimum, et ex quo alia derivari, aut ad quod alia reduci possint, nimirum pone rectam directricem AD, ad quam ex curva EFG, ordinatae BE, CF, DG. Sit alia curva, HL, ad eandem directricem relata, ita ut ordinatae ejus, HC, LD, sint portionibus prioris $EBCFE, EBDGE$. proportionales; ajo curvam HL esse curvae EFG [quadratricem]. Unde sequitur crementa ipsarum CH, DL, ipsis ordinatis datae, BE, CF, DG. proportionalia esse.

12 darent. *(1)* Unde illud didici methodo Tangentium inversa non *(2)* Unde *L* 21 EBCFE, | FCDGF *ändert Hrsg.* |. | etc. *gestr.* | proportionales *L*

2 f. Circuli ... dimensio: vgl. PAPPUS, *Collectio* IV, prop. 26 u. 27. 13–15 lineam ... versos: vgl. N. 18 S. 159 Z. 19 f.

Quod si ergo proposita figura Analytica, inveniri potest alia etiam Analytica, cujus crementa sint ordinatis datae proportionalia quadratura omnium portionum figurae propositae generali constructione haberi potest.



[*Fig. 2*]

Jam alibi a me demonstratum est, rectas crementis proportionales quales sunt ipsae BE, CF figurae 1. esse ad rectam quandam constantem quam vocabimus a, ut ordinata DL ad ipsam DT productam ipsius curvae HL, seu portionem axis inter ordinatam DL, et tangentem LT, interceptam.

Proposita ergo qualibet figura cujus ordinatae CF, DG, quaerenda est alia figura cujus ordinatae CH, DL, in qua ratio DL ad DT, sit perpetuo ut DG ad a.

Hoc problema per Analysin communem solvere nondum satis est in nostra potestate; advocanda est ergo Synthesis, et datis figuris seu DL, inquirendae sunt DT. quod ordine faciendo et de gradibus ad gradus figurarum procedendo, condi poterit velut Tabula in qua constantem quandam progressionem mox detectum iri pro certo habendum est quam facile sit continuare in infinitum, etiam sine calculo in singulis repetito; quo facto facile detegi poterit, oblata figura qualibet an sit ex numero quadrabilium per Quadratricem Analyticam.

Calculus autem investigandarum DT, ex datis DL. non est difficilis post publicatam a Slusio methodum tangentium. Ut ergo ordine procedamus, per omnes aequationum, quae duas incognitas continent, gradus assurgemus ac primum: ponendo $AD \sqcap x$, DL

6 ut *(1)* ipsa DT producta ad *(a)* i *(b)* por *(c)* qvadra *(2)* ordinata L 12 communem *erg.* L 19 poterit, | an *streicht Hrsg.* | oblata L 23–205,1 primum: *(1)* (I) $x+\frac{b}{a}y+c \sqcap 0$. *(a)* Unde $t \sqcap -b$ *(b)* ponendo AD ⊓ x, CD, y, vel contra; DT ⊓ t. *(aa)* Unde ope regulae Slusianae, fiet: *(bb)* si AD ⊓ x fiet $t \sqcap \frac{-b}{a}y$. Sin CD ⊓ x, fiet: $t \sqcap \frac{-ax}{b}$. Jam prior aeqvatio multiplicetur per x (II) $x^2 + \frac{b}{a}yx$ *(2)* ponendo AD ⊓ x, | CD *ändert Hrsg.* ⊓ *erg. Hrsg.* | y, vel contra AD ⊓ y, | CD *ändert Hrsg.* | ⊓ x L

4 alibi: vgl. VII, 4 N. 40_1 S. 657 Z. 13–24 . 21 publicatam: vgl. R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

$\sqcap\ y$, vel contra $AD \sqcap y$, $DL \sqcap x$. $DT \sqcap t$. ex aequationibus sequentibus ita habebitur valor ipsius t, et hujus ope valor ipsius $\frac{DL}{t} a \sqcap z \sqcap DG$.

(I) $b + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a}x \sqcap 0$. Ergo ponendo $CD \sqcap y$, $DL \sqcap x$, $t \sqcap \frac{-dx}{c}$. et pro x substituendo $\frac{-cy-ab}{d}$, erit $t \sqcap \frac{+cy+ab}{c}$. Ergo $z \sqcap \frac{-cy-ab}{d} \frown a \smile \frac{+cy+ab}{c} \sqcap \frac{-ac}{d}$.

Ponendo vero $CD \sqcap x$. $DL \sqcap y$. fiet: $\underline{t} \sqcap \frac{-cy}{d}$. et pro $\underline{y}$ substituendo ejus valorem, $\frac{-dx-ba}{c}$ fiet: $t \sqcap \frac{+dx+ba}{d}$, et erit $z \sqcap \frac{-dx-ab}{c} \frown a \smile dx + ba \frown d \sqcap \frac{-ad}{c}$.

(II) $a^2b + acy + adx + ey^2 + fyx + gx^2 \sqcap 0$.

Ponendo $CD \sqcap y$, $DL \sqcap x$. fiet: $act + 2eyt + fxt \sqcap -adx - fyx - 2gx^2$. Adeoque $t \sqcap \frac{-adx-fyx-2gx^2}{ac+2ey+fx}$. Pro $-2gx^2$ ponatur ejus valor, $+2a^2b+2acy+2adx+2ey^2+2fyx$. Unde $t \sqcap \frac{+adx+fyx+2acy+2ey^2}{ac+2ey+fx}$, sive $-act - 2eyt + 2acy + 2ey^2 - ft\ x \sqcap 0$. Sive

$+ad\ ..$
$+fy\ ..$

$gx^2 \sqcap \frac{+actgx+2eytgx-2acygx-2ey^2gx}{-ft+ad+fy}$ adeoque $a^2b + acy + adx + ey^2 + fyx + \frac{actgx+2eytgx-2acygx-2ey^2gx}{-ft+ad+fy} \sqcap 0$ sive

$-ftadx$	$-ftfyx$	$+\ act\ gx$	$-ft \frown a^2b \sqcap 0$
$+ad\ldots$	$+ad\ldots$	$+2eyt\ g.$	$+ad\ +acy$
$+fy\ldots$	$+fy\ldots$	$-2acy\ g.$	$+fy$
		$-\ 2ey^2g.$	

et pro x substituendo: $\frac{act+2eyt-2acy-2ey^2}{-ft+ad+fy}$, fiet:

$$act + 2eyt - 2acy - 2ey^2 \,,, \frown \begin{pmatrix} -ft \frown -ft \\ +ad \quad +ad \\ +fy \quad +fy \end{pmatrix} \begin{matrix} +actg \\ +2eytg \\ -2acyg \\ -2ey^2g \end{matrix} \,,,, -ft \frown -ft \frown \quad a^2b \sqcap 0. \quad \begin{matrix} \\ +ad \quad +ad \quad +acy \\ +fy \quad +fy \\ \\ \end{matrix}$$

---

10 $t \sqcap$: Im folgenden Term für t fehlt $+2a^2b$ im Zähler. Dies wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung Z. 21 aus. 12 sive: In der folgenden Gleichung fehlt auf der linken Seite $+ey^2(-ft+ad+fy)$. Dies wirkt sich zusammen mit einem weiteren Rechenfehler auf die Gleichung Z. 18–21 aus.

Sed quoniam reductio hujus calculi nimis prolixa est, satis est, opinor[,] ire per casus simpliciores, et paulatim assurgere ad altiores, ut appareat, an ad progressionem pervenire liceat:

1) $a^2b + acy + gx^2 \sqcap 0$. Unde ex y $t \sqcap \frac{-2gx^2}{ac} \sqcap \frac{2a\not{^2}b + 2\not{c}cy}{\not{c}c} \sqcap \frac{2ab + 2cy}{c}$ et $x \sqcap \sqrt{\frac{-a^2b - acy}{c}}$ adeoque $z \sqcap \frac{xa}{t}$ erit $\sqcap \frac{\frac{xa}{2gx^2}}{ac} \sqcap \frac{a^2c}{2gx} \sqcap \frac{a^2c}{2g\sqrt{\frac{-a^2b - acy}{c}}}$ sive $z \sqcap \sqrt{\frac{a\not{^4}^3c^3}{-4g^2a\not{^2}b - 4g^2\not{c}cy}}$, quod si ponatur $b \sqcap 0$. fiet $z \sqcap \frac{c[a]\sqrt{a}}{2g\sqrt{y}} \sqcap \frac{ca}{2g}\sqrt{\frac{a}{y}}$. Et haec colligendo t ex y. sed si colligatur t ex x, fiet:

$2gxt \sqcap -acy$, sive $t \sqcap \frac{-acy}{2gx}$, et pro y ponendo $\frac{-gx^2 - a^2b}{ac}$ fiet: $t \sqcap \frac{gx^2 + a^2b}{2gx}$, adeoque $\frac{ya}{t} \sqcap z$ erit $\frac{\frac{-gx^2 - a^2b}{ac}}{\frac{gx^2 + a^2b}{2gx}}a \sqcap \frac{-2gx}{c}$.

2) $a^2b + acy + adx + gx^2. \sqcap 0$. Ex y fiet $t \sqcap \frac{-2gx^2 - adx}{ac}$, et ut vero eliminetur x, pro $-2gx^2$, ponatur $2a^2b + 2acy + 2adx$. fiet:

$$t \sqcap \frac{2a^2b + 2acy + 2adx - adx}{ac} \sqcap \frac{2a\not{^2}b + 2\not{c}cy + \not{c}dx}{\not{c}c},$$

unde $x \sqcap \frac{ct - 2ab - 2cy}{d}$ et $x^2 \sqcap \frac{c^2t^2 - 4cabt - 4c^2ty + 4a^2b^2 + 8abcy + 4c^2y^2}{d^2}$, unde ex aequatione initio proposita eliminando x, fiet: $\overline{+}a^2bd^2 \overline{+}acyd^2 + ad^2ct\boxed{-ad^2 2ab}\boxed{-ad^2 2cy} + gc^2t^2 - 4cabgt - 4c^2tgy + 4ga^2b^2 + 8abcgy + 4c^2gy^2 \sqcap 0$ et pro t substituendo $\frac{ya}{z}$ habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z, et y.

---

5 $x \sqcap \sqrt{\frac{-a^2b - acy}{c}}$: Der Nenner unter der Wurzel müsste g lauten. In der anschließenden Berechnung von z kommen weitere Fehler hinzu. 16 $\frac{ya}{z}$: Die Substitution ist nicht zulässig; als Voraussetzung der Überlegung war $\frac{z}{a} = \frac{x}{t}$ gesetzt worden.

Sed calculus hic prolixus longe facilius expediri poterat, considerando locum esse ad parabolam, atque ita ipsam $\underline{t}$, ac proinde et ipsam $\underline{z}$ aequationis $a^2b+acy+ad[x]+gx^2 \sqcap 0$ facile derivari ex habita $\underline{t}$ vel $\underline{z}$ aequationis $acy + gx^2 \sqcap 0$ adhibita methodo generali ad exemplum Schotenii, quemadmodum abscissae ordinataeque unius directricis ex aliis alterius derivantur.

3 f. methodo ... Schotenii: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178 [Marg.]. Auf S. 177 hat Leibniz Eintragungen am Rand und in der Zeichnung angebracht; vgl. dazu auch die Aufzeichnung *Mutatio aequationis curvae pro mutata directrice* (Cc 2, Nr. 1450).

27. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA

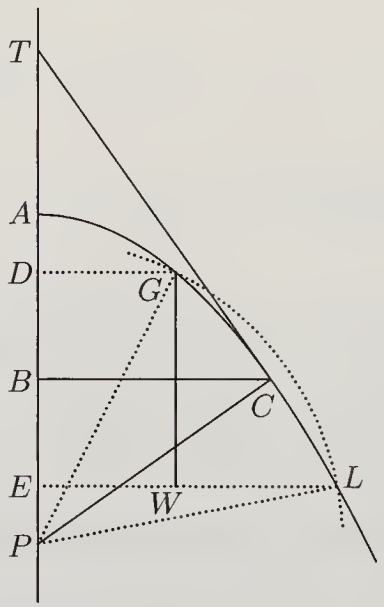
Januar 1675

27_1. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 903 tlw.

Januar. 1675.

Methodus Tangentium inversa nunc tandem explicata



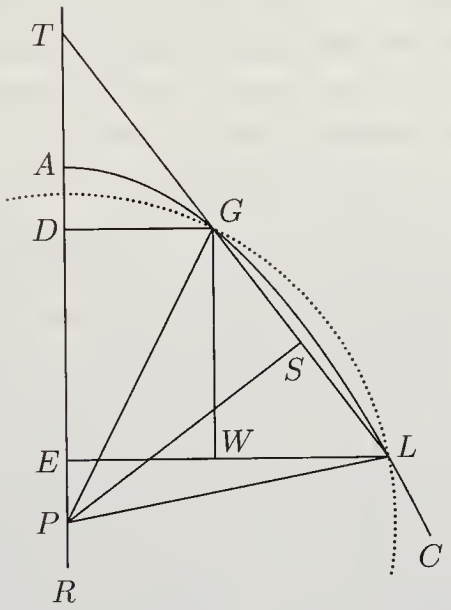
[*Fig. 1*]

6 Januar. 1675. *erg. L* 7 Methodus ... explicata *erg. L*

8 *Fig. 1*: vgl. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44 f. Zu den Punkt- und Streckenbezeichnungen vgl. auch S. 40 f.

Esto AD vel $AE \sqcap x$, et DG vel $EL \sqcap y$ et $PC \sqcap s.$ et $AP \sqcap v$. Erit $BP \sqcap v - x$. Jam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ ubi vero tam y, quam x duos habent valores nempe y significat tam DG, quam EL, et x tam AD, quam AE.

Sit alia quaedam aequatio data; ea sane admitti potest, si non nisi relationem inter AD et DG vel AE, et $EL.$ exprimat; sed regulariter admitti non potest, ut in ea ipsa aequatione rursus contineatur $\underline{v}$, vel $\underline{s}$. Illud inprimis fieri non potest, ut in secunda aequatione data, una tantum contineatur ex indeterminatis; eo ipso enim quia valor ejus per ipsas $s.$ et $v.$ quae hoc loco pro determinatis habentur, explicari potest, illa ipsa indeterminata, fiet ex hac suppositione determinata. Ante omnia ergo necesse est ut in alteram illam aequationem duae ingrediantur indeterminatae, x et y. Insistamus huic methodo quantum licet. Reassumamus ergo.



[*Fig. 2*]

Esto curva quaelibet: $GLC.$ referenda ad rectam AR a puncto fixo A indefinite progredientem. In qua sumta recta AP, quae data intelligatur, $\sqcap v$, et intervallo PG etiam dato $\sqcap s.$ describatur arcus Circuli GL occurrens curvae in duobus punctis G et $L.$ Jungatur LG arcus hujus chorda, quae producta ipsi AP occurrat in $T.$ et ex P agatur in GL normalis $PS.$ Ex punctis $G.$ $L.$ demittantur perpendiculares in directricem AR, nempe

6 ut *(1)* tam v *(2)* in ea sola ex incognitis contineatur una, v. g. x. *(3)* in L

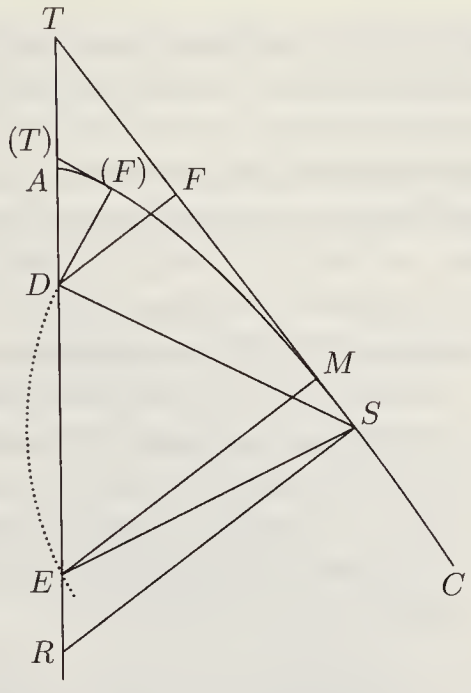
GD, LE. et ex G. demittatur GW, perpendicularis ad EL, aequalisque ipsi DE. Ipsas AD, vel AE, appellemus, x, et ipsas DG vel EL appellemus y. cum sint ordinatae et abscissae unius ejusdemque curvae GLC. Et hoc quidem modo patet, si dentur AP, seu v, PG seu s. et curva praeterea positione, dari positione et puncta $G.L.$ adeoque problema esse definitum, et dari etiam rectas $AD, AE; DG, EL$.

Sed ponamus dari rectam AD vel DG, eo ipso si caetera omnia dantur dabitur et AE, vel EL. Attamen hac inquisitione nunquam hic utemur, sed semper ponemus AD et AE, et DG, EL, unam eandemque incognitam, itaque sumendo AD vel AE, dataque positione curva, eo ipso invenientur AP, PL. Juncta enim GL et bisecta[,] perpendicularis SP dabit punctum P. Quodsi punctum P. jam detur, necesse est ipsas DG et EL, non dari, neque adeo relationem inter x et y, seu AD et DG. Porro semper ex natura circuli dabitur haec aequatio ut supra: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$.

Jam si velimus dari DP, vel quod idem est dari AP, ex data AD, necesse est dari eodem modo ex data AE. Si volumus servare coeptam characteristicam, ut scilicet x, significet aeque quamcunque abscissam quare cum eadem linea AP, componatur eodem modo ex duabus AD, et AE, componetur eodem modo ex omnibus, quemadmodum in aliqua figura latus rectum eodem modo componitur ex qualibet ordinata et abscissa. Cumque impossibile sit eodem modo componi ex omnibus abscissis, nisi et ingrediatur ordinata ut duae sint indeterminatae componentes unicam indeterminatam, ideo servato valore universali ipsius x vel y. necesse est s. non nisi ex ambabus simul componi. Sed hinc jam malum illud ingens, quod sit eadem AP, quae componitur eodem modo ex duabus, ergo erit et eadem quae componitur eodem modo ex omnibus. Quod est contra institutum, neque enim illud volumus eandem AP pro omnibus esse abscissis et ordinatis, sed eandem AP, pro duabus, et aliam AP esse pro aliis duabus.

Itaque ut servemus indeterminatas, non abscissis vel ordinatis; sed earum paribus aut independentibus imponenda essent haec nomina. Quod vero fieri non debet, neque enim ita unquam veniemus ad aequationem determinandam ad duas radices aequales. Nam si exempli causa rem reducamus ad aequationem in qua v. g. GL inquiratur AP. neque ullae aliae incognitae ingrediantur; nondum inde exitum video ullum etsi haec consideratio sit satis memorabilis.

5 definitum *(1)*; sed si qvid horum desit, pro *(2)*, et *L* 5 f. DG, | DP *ändert Hrsg.* | *(1)* qvoniam *(2)* Sed *(a)* et *(b)* ponamus aliqvid ex caeteris deesse; seu non dari, | et *streicht Hrsg.* | *(3)* Sed ponamus *(a)* eius loco *(b)* dari *L* 26 aut independentibus *erg. L* 26 non *(1)* potest *(2)* debet *L*



[*Fig. 3*]

Fingamus curvam quamlibet SC ad quam Tangens TS. Nota TS hic respondet AP figurae superioris. Centro S. intervallo SD, vel SE, describatur circulus rectam AR secans in duobus punctis $D.E$. Unde in ipsam TS. ducentur perpendiculares DF, EM. Patet jam TF, TM respondere AD, AE, figurae superioris et DF, EM. ipsis DG, EL et SD vel SE ipsis PG, PL. Itaque TF vocetur $x, FD \sqcap y$. $TS \sqcap v$. $SD \sqcap s$. Hinc jam inveniri poterit aequatio determinanda ad duas radices aequales.

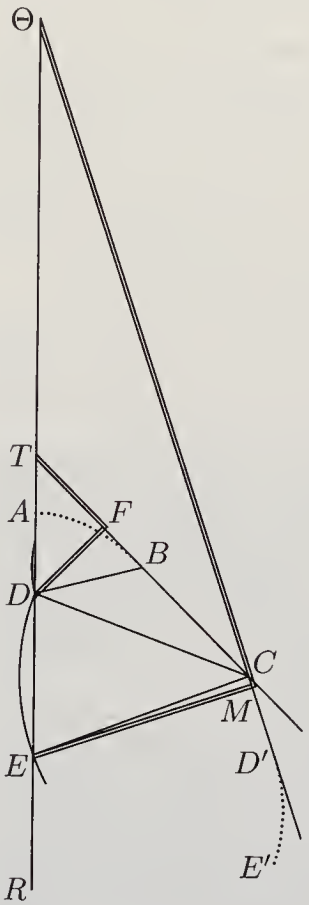
Sed considerandum id nihili esse, quoniam conditio illa non est ingressa calculum, quod TS sit alicujus curvae tangens. Nam si ingressa fuisset haec conditio, rem absolvissemus sane si $(T)(F)$ esset alia quaedam tangens, (distincta a TM,) ad quam $D(F)$ perpendicularis; tunc equidem apparet lineam $(F)SC$ esse curvam, sed non potest veniri ad aequationem duarum radicum aequalium. Et certe frustra inquiritur in methodos,

2 *(1)* | Si fingamus exempli causa *streicht Hrsg.* | *(2)* ponamus dari *(3)* fingamus *L* 2 TS *(1)* et perpendicularis PS. *(2)* nota *(a)* TS, h *(b)* T hic respondet puncto A, TS rectae *(c)* TS *L* 11 FSC *L ändert Hrsg.*

2 Nota: Leibniz' Konstruktionsvorschrift für Fig. 3 ist nicht korrekt; TS müsste TP aus Fig. 2 entsprechen. Ebenso sollten TF und TM mit den Linien TD bzw. TE aus Fig. 2 übereinstimmen. Dies ist bei der Wiedergabe der Figur berücksichtigt. Leibniz benutzt die falschen Beziehungen konsequent weiter; auf die allgemeinen Überlegungen hat dies jedoch keinen Einfluss.

quae si succederent in omnibus Curvis succederent, quod est impossibile. Opus enim quadam particulari in quibusdam tantum curvis succedente methodo; sed quae in proposita qualibet ostendat an res succedat an non.

Et ita tandem inani spe inveniendi per duas radices aequales serierum summas, et figurarum quadraturas sum liberatus; rationemque detexi cur sic ratiocinari non liceat, quod me diu satis vexavit.



[*Fig. 4*]

An sic: sit curva $ABCD'E'$ duo ejus latera infinite parva BC, CD'. duo Tangentes in eodem se puncto C secantes $TBC, \Theta CD'$. Centro C, radio $CD \sqcap CE$ describatur circulus secans rectam AR in punctis $D.E.$ Ponatur data relatio inter TF, et DF vel inter ΘM et EM. ΘM vel $TF \sqcap x.$ et EM vel $DF \sqcap y.$ $TC \sqcap v.$ $\Theta C \sqcap (v)$. Sed TF vocabo $x, DF\, y.$ Et $\Theta M\,(x)$ et $EM\,(y)$. $FC \sqcap v - x.$ et $MC \sqcap (v) - (x).$ $DC \sqcap s.$

$$s^2 \sqcap \boxed{y^2} + v^2 - 2vx + x^2 \sqcap \boxed{y^2} + (v)^2 - 2(v)(x) + x^2$$

Malum in eo, quod non potest una obtineri aequatio, qua derivetur $s.$ eodem modo ex TF, DF, quo ex $\Theta M, EM$. Nimirum hoc modo fit una praeterea incognita v, nempe aequatio est: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$ et unam ex his tribus, $y.\ x.\ v.$ elidendo ope datae aequationis, restabit aequatio in qua duae sunt incognitae capitales, et utraque duas habet radices aequales, formula itaque inde proveniens ordinanda est utroque modo ad duas radices aequales, atque ita inveniantur s, et v per x si (ablata jam ante y,) ordinentur omnia secundum x. Vicissim invenientur $s.$ et x per v, si ordinentur omnia secundum v. Quod si ergo relationes duae inter x et $v.$ inter se consentiunt, possibile est problema, et habebitur relatio inter ordinatam et perpendicularem.

26 v. *(1)* Reperitur ergo valor ipsius *(2)* qvod L

15 s^2: In der folgenden Gleichung wäre nach dem 2. Gleichheitszeichen $(y)^2 + (v)^2 - 2(v)(x) + (x)^2$ richtig gewesen. 28 *Fig. 4*: Leibniz hat die Punktbezeichnungen D und E in der Figur und im Text doppelt verwendet. Zur Unterscheidung wurden deshalb zwei Punkte mit D' bzw. E' bezeichnet.

Sed si quaeramus relationem inter ordinatam et abscissam non ΘM, vel TF, sed ΘD, et ΘE adhibebimus quas ingredietur x, abscissa, quippe earum pars ex TD^2 vel ΘE^2 subtrahendo DF^2 vel EM^2, habebimus TF^2 vel ΘM^2. quibus addemus novam incognitam FC vel CM. unde erunt incognitae ambiguae quatuor: ΘC vel TF, AD vel AE, DF vel EM, FC vel MC, et una fixa DC vel $EC \sqcap s$. Unde unam elidendo ex data problematis conditione restabunt incognitae ambiguae tres quarum quaelibet duos habet valores aequales, itaque secundum singulos ordinanda aequatio est, quod si consentiunt calculi provenientes solutum est problema; sin minus impossibilis habenda est aequatio quae naturam curvae quaesitae exhibeat.

Hic nota si duae datae essent conditiones non ideo numerum ambiguarum deminui posse, sed proceden[dum] quasi duo essent problemata et videndum an calculus consentiat. Quia una conditione res est satis determinata.

Vide haec melius tradita schedula addita sub signo $\mathfrak{X}$.

27_2. APPENDIX METHODI TANGENTIUM INVERSAE NUNC TANDEM EXPLICATAE

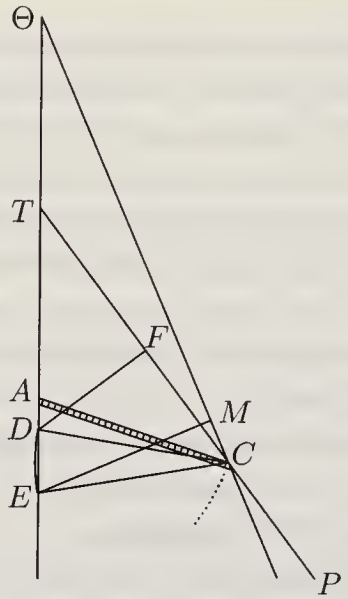
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. Papier unvollständig geschöpft, es fehlt ein halbmondförmiger Ausschnitt am rechten Rand. 1 S. auf Bl. 2 r°. Am linken Rand Figur außerhalb des Textzusammenhangs (s. u. S. 215 Z. 8). Auf Bl. 2 v° N. 27_3. Cc 2, Nr. 903 tlw.

Appendix Januar. 1675. methodi Tangentium inversae nunc tandem explicatae

TF vel $\Theta M \sqcap x$. DF vel $EM \sqcap y$. $CD \sqcap CE \sqcap s$. $AC \sqcap v$. FC vel $MC \sqcap t$. Ex datis TF. FD. AC. quaeritur CD. Videndum an hoc satis determinatum. Quod ita patebit, centro A, radio AC, describatur circulus[,] inde datus angulus rectus TFD extremitati lineae rigidae PFT affixus circa quodlibet in circumferentia circuli sumtum punctum C tamdiu agatur, simulque et sursum ac deorsum moveatur, donec puncta T. et D. cadant in rectam ΘAE. directricem. Quod cum dato quolibet puncto C. obtineri

4 ΘC vel | TD *ändert Hrsg.* |, AD *L* 20 Appendix ... explicatae *erg. L*

13 schedula addita: vgl. N. 27_2.



[*Fig. 1*]

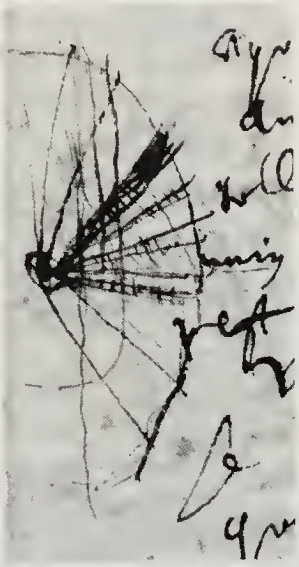
possit, patet non esse problema determinatum, nisi alia accedat data, v. g. FC. Itaque ex TF. FD. FC. AC. datis, quaeritur CD. Eodem autem modo quo ex his invenietur $CD\,(\sqcap\, CE)$ eodem modo etiam ex $\Theta M, ME, MC, AC$ invenietur CE, seu CD. Itaque habebitur aequatio ubi tres ambiguae seu duplicis valoris, nempe x. y. t. et duae simplicis valoris nempe s et v. Una autem ex his tribus, nempe ex x. y. t. poterit eliminari, ex problemate scilicet dato; itaque restabit aequatio duarum ambiguarum, et duarum simplicium indeterminatarum. Quam secundum utramque ex ambiguis determinabimus ad duas radices aequales, ordinando nunc secundum unam, nunc secundum alteram; et secundum utramque ordinationem, arithmetica progressione (compendio Huddenii) multiplicando praeter datam ergo, habebuntur adhuc duae aequationes, ope harum multiplicationum; id est habebuntur aequationes tres. Ergo duae quantitates ambiguae tolli poterunt duobus modis; nam tollantur primum una ope unius aequationis, inde altera bis, ope reliquarum duarum, restabunt tantum duae, nempe v et s. idque duobus modis, necesse est ergo inter se consentire hos duos modos atque coincidere; quo facto solutum erit problema, et habebitur modus describendi Geometrice curvam quaesitam. Sin vero

2 FC. *(1)* aut etiam qvaedam relatio *(2)* itaqve *L* 13 primum *(1)* ope duarum aeqvationum, *(2)* una *L*

3 quaeritur CD: Bei gegebenem FC ergibt sich CD bereits aus $CD^2 = FD^2 + FC^2$.
10 compendio Huddenii: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. S. 507–516.

non consentiant, pro certo habendum est, problema esse impossibile sive naturam curvae quaesitae nulla ejusmodi aequatione relationem s et v continente, exprimi posse. Experienda haec methodus in quibusdam problematis methodi tangentium inversae jam a posteriori notis. Hinc etiam semper haberi potest methodus inveniendi curvam quam proxime satisfacientem. Etiam forte ope hujus methodi inveniri possunt ejusmodi solutiones ex hypothesi cujusdam quadraturae.

[*Figur ohne Bezug zum Text*]



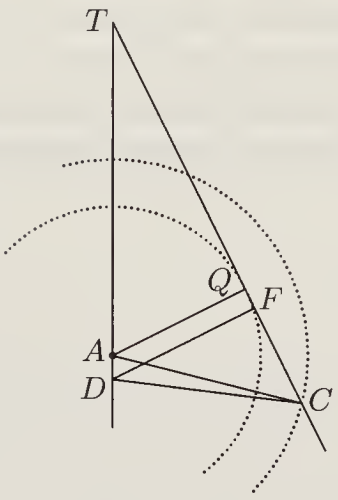
[*Fig. 2*]

27_3. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA. JANUAR. 1675. PARS II[DA]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 2 v°. Auf Bl. 2 r° N. 27_2. Cc 2, Nr. 903 tlw.

De Methodo Tangentium inversa. Januar. 1675. pars II[da]

$DC \sqcap s$. $AC \sqcap v$. Jam $TA^2 - AQ^2 \sqcap TQ^2$. $v^2 - AQ^2 \sqcap QC^2$. $\frac{TQ}{AQ} \sqcap \frac{TQ+QF}{DF}$ sive $\frac{TQ}{AQ} - \frac{TQ}{DF}$, $\widehat{\ }$ $DF \sqcap QF$. $FC \sqcap \dagger\sqrt{v^2 - AQ^2}(\dagger)\frac{TQ \widehat{\ } DF - TQ, AQ}{AQ}$. et $DC^2 \sqcap s^2 \sqcap$



[*Fig. 1*]

$v^2 - AQ^2 \dagger (\dagger)\ DF - AQ \frown \frac{TQ}{AQ}\ 2\sqrt{v^2 - AQ^2}_{,,} + DF^2 - 2DF, AQ, +AQ^2, \frac{TQ^2}{AQ^2}_{,,,} + DF^2$. In qua aequatione duae sunt simplicis valoris, nempe s et v, reliquae tres, AQ, DF, TQ. duplicis, ut ex figura paginae praecedentis patet. Res eodem redit, si ut TQ elidamus, ingredi calculum malimus TA. Item si nolimus uti DF possumus uti AD. Fiet enim: $\frac{QF}{AD} \sqcap \frac{TQ}{TA}$. Ergo $QF \sqcap \frac{TQ, AD}{TA}$. Atque ita neque AQ, neque DF utemur. Ergo $AQ^2 \sqcap TA^2 - TQ^2$. et $QC^2 \sqcap AC^2 - AQ^2 \sqcap AC^2 - TA^2 + TQ^2$ et erit: $FC \sqcap \frac{\dagger\sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2}\ TA(\dagger) - TQ, AD}{TA}$ et $\frac{DF}{AQ \sqcap \sqrt{TA^2 - TQ^2}} \sqcap \frac{TA + AD}{TA}$. Ergo $DF \sqcap \frac{TA + AD, \sqrt{TA^2 - TQ^2}}{TA}$. Ergo DC^2 seu $s^2{}_{[,]}\ TA^2 \sqcap +AC^2 - TA^2 + TQ^2, TA^2{}_{,,} \dagger (\dagger) - 2TA, TQ, AD, \sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2} + TQ^2, AD^2{}_{,,,} + TA^2 + 2TA, AD, +AD^2{}_{,,} \frown TA^2 - TQ^2$.

Unde cum rursus alia opus sit quadratione ad calculum purificandum; satis intelligi potest, posteriorem calculum priore nihilo esse compendiosiorem, imo fortasse priorem compendiosiorem esse. Obtenta ergo denique aequatione pura, et aliqua ex tribus ambiguis, AQ, DF, TQ vel TA, TQ, AD ope proprietatis tangentium datae ad curvam quaesitam, elisa; restabit aequatio duarum ambiguarum, determinanda ad duos utriusque ambiguae valores aequales. Itaque nunc secundum unam, nunc secundum alteram ordinata multiplicabitur ad duas radices aequales, methodo Huddeniana, itaque habebuntur aequationes tres, data, facta ex data secundum unam ordinationem, facta ex data secundum alteram ordinationem. Ope factae ex data secundum unam ordinationem, inveniatur unius ex ambiguis valor, et elidatur ambigua, illa ex data; ope factae ex

1 $AQ^2(\dagger\dagger)DF$ *L ändert Hrsg.* 3 sunt *(1)* fixae ac *(2)* simplicis valoris *(a)* indeterminatae *(b)*, nempe *L* 17 AD *(1)* ope problematis dati particularis elisa, restat aeqvatio *(2)* ope *L*

4 figura: s. Fig. 1 in N. 27_2. 10 *Fig. 1*: Lediglich zur Konstruktion dienende Linien in Blindtechnik werden nicht wiedergegeben.

data secundum alteram ordinationem elidatur altera ambigua; et habebitur aequatio in qua nulla restabit ambigua.

Inspice exempli causa has tres aequationes[:] $x+y+a \sqcap 0$. $x^2+y^2+b \sqcap 0$. $y^2+x+c \sqcap 0$. Ope primae aequationis habebitur valor ipsius x. Substituatur is in secunda et tertia, elisa erit x. Restabunt aequationes duae, in quibus non nisi una incognita erit y. Itaque quaerendo valorem ipsius y tam secundum unam, quam secundum alteram, necesse est oriri aequationem identicam, sive coincidere hos duos valores; sin minus problema erit impossibile, non quidem absolute, attamen per calculum analyticum. Quod si aliquo casu felici fiat, ex natura problematis, ut ope conditionis sive proprietatis datae tollantur ex aequatione proposita ambiguae duae, tunc certum erit utique problema esse possibile. Itaque inquirendum subtilius, quaenam proprietates tangentium sint hujusmodi; item, an obliquato problemate, supposita aliqua quadratura aut dimensione curvae, veniri possit ad ejusmodi destructionem. Hoc enim jam superest maxime inquirendum quomodo problemata Tangentium inversa reducantur ad simplicissimas Quadraturas vel curvarum in rectum extensiones. Item videndum an ope quantitatum arbitrariarum effici possit, ut obtineatur sub finem duorum calculorum coincidentia. Denique ista ad numerorum quoque summas transferri possunt.

27_4. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PARS III^{TIA}

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°. 4 S.
Cc 2, Nr. 904

Januar. 1675.

De Methodo Tangentium inversa pars III^{tia}

Duabus prioribus schedulis rem antea desperatam effeci, ut problemata Tangentium inversa, seu modi inveniendi figuram, data tangentium proprietate, ad calculum analyticum revocarentur; secunda earum inprimis, ubi ostendi regulariter problemata

7 *Über* valores: error

23 prioribus schedulis: N. 27_1 sowie N. 27_2, 27_3. 23 effeci: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

methodi tangentium inversae revocari ad aequationem quam ingrediantur indeterminatae quatuor, ex quibus duae sunt capitales, duae vero incidentes. Et duae capitales sunt ambiguae sive duos habent singulae valores aequales. Itaque aequatio primum secundum unam, deinde secundum alteram ordinanda, et semper Huddeniano more ad duas radices aequales multiplicanda est. Habebuntur aequationes tres, quarum unius ope ex duabus reliquis tolletur una indeterminatarum capitalium; restabunt aequationes duae, quarum cum quaelibet eandem habeat indeterminatam capitalem, ope unius ex ipsis valor ejus quae restat, capitalis habebitur; et in altera in ipsius capitalis locum substituetur; atque ea aequatio in qua substitutus est valor, nullam amplius ex duabus illis incognitis capitalibus habebit, sed residua aequatio nullas habebit indeterminatas praeter incidentes, quae tamen eae ipsae sunt quas potissimum quaerebamus.

Et ita quidem videtur semper haberi posse quod desideramus, regulariterque solvi poterunt problemata tangentium inversa; nisi subsit aliquid quod nos turbet, quod quale sit nondum satis judico. Fieri equidem potest quibusdam casibus, ut una sola aequatio tollat duas incognitas; et ut duae incognitae reapse non nisi pro una haberi possint, et eo casu calculus exitum reperire sane non potest, ut si sit aequatio $y^2+2yx+x^2+bx+by-a^2 \sqcap 0$. Nam in hac aequatione duae sunt in speciem incognitae y et x, reapse non nisi una est: $y+x \sqcap z$. Perinde enim est ac si diceres: $z^2+bz-a^2 \sqcap 0$. Saepe nimirum fiet ut una quadam linea recta incognita sive quaesita sumta, fiat aequatio unius incognitae; cum alias sit duarum incognitarum apparentium, ut si sit aequatio: $+y^2+2y\sqrt{ax+ax+by+a^2} \sqcap 0$.
$+\ b\ \ldots$

Et adhuc ordinando: $y^2+ax+by+a^2 \sqcap -2y\sqrt{ax}$ sive quadrando:
$-\ b\ \ldots$

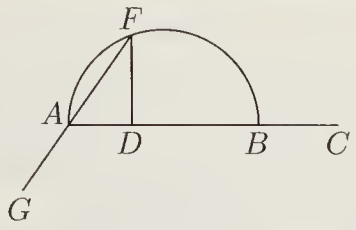
$$y^4+2a\,y^2x+2by^3+2a^2y^2,+a^2x^2+2ab\,yx+2a^3\,x,+2b^2y^2+2ba^2y,+a^4 \sqcap 0.$$
$$-4a\ \ldots \qquad -4ba\ \ldots -b^2a\ .$$

Haec aequatio duarum in speciem incognitarum, non est revera nisi unius. Sint enim lineae, data $a \sqcap AB$. quaesitae $y \sqcap BC$, et $x \sqcap AD$. Circa AB diametrum describatur

1 ad *(1)* duas aeqvationes *(2)* aeqvationem *L* 3 Itaqve *(1)* ordin *(2)* multiplicando aeqvation *(3)* aeqvatio *L* 5 tres, *(1)* incognitae aut *(2)* indeterminatae autem *(3)* qvarum *L* 6 duae, *(1)* et unica in illis *(2)* qvarum *L* 20 si *(1)* dicas y + *(a)* √az *(b)* √ax ⊓ z *(2)* sit *L* 21 adhuc *(1)* tollendo *(a)* ra *(b)* irrationalem *(2)* ordinando *L* 25 AD. *(1)* Centro B radio BA describatur ci *(2)* Circa *L*

---

22 $+2b^2y^2$: Es müsste $+b^2y^2$ heißen.



[*Fig. 1*]

circulus AFB, ita ut FD sit perpendicularis ad AB. Juncta AF erit $\sqcap \sqrt{ax}$. et producta FAG, dum AG aequetur ipsi BC erit $GF \sqcap y + \sqrt{ax}$. Quae si appelletur z, et ipsa z seu GF velut incognita quaeratur, aequatio producta in speciem tam alta, duarum incognitarum, ad unam redibit incognitam valde simplicem: $z^2 + bz + a^2 \sqcap 0$. Unde apparet saepe fieri, ut aequatio duarum appareat incognitarum, nec sit tamen, atque ita fiat, ut existentibus eo casu duabus aequationibus problema fiat impossibile. Oblata autem aequatione ejusmodi res ita apparebit, si ex ea unius incognitarum valorem extrahere laboremus, quaerendo aequationis radicem, ita enim eadem opera inveniemus duarum valorem: v.g. $y^2 + 2yx + x^2 + by + bx - a^2 \sqcap 0$. Ergo: $y^2 + 2xy + x^2 \sqcap 0$.
$+ \; b. \; + bx$
$- a^2$

Unde $y^2 + 2xy + 4x^2 \sqcap 4x^2 - x^2$. Unde extrahi potest radix etc.
$+ \; b. \; + 4xb \quad + 4bx - bx$
$+ b^2 \quad + b^2 - a^2$

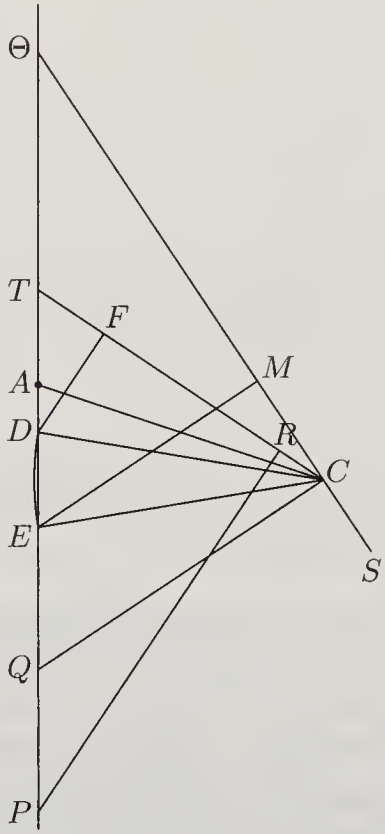
Sed jam video hic lapsum me, dum credo certis casibus problema esse nimis determinatum, quando certo valore novae incognitae assumto, ex aequatione duarum incognitarum fieri potest una, jam enim video id semper fieri posse, semper scilicet posse lineam duci qua pro incognita assumta, ex aequatione duarum incognitarum fiat aequatio incognitae unius, nimirum unius illius incognitae ratione problema est determinatum; non vero ratione duarum ex quibus componitur ejus valor, quemadmodum fieri potest, ut duarum linearum ignotarum summa sit nota etc.

7 f. impossibile. *(1)* Ibi *(2)* it *(3)* Haec facile agno *(4)* Oblata *L* 16 credo *(1)* problema *(2)* duas tantum incognitas locum habere *(3)* certis *L*

1 *Fig. 1*: Leibniz hatte zunächst (vgl. Stufe *(1)* der Variante zu S. 218 Z. 25) einen Halbkreis mit Radius BA gezeichnet, DF bis zum Schnittpunkt mit dem Halbkreis verlängert und die Verbindungsstrecke zu A gezogen. Anschließend hat er den Halbkreisbogen gestrichen. Es werden nur die gültigen Elemente der Figur wiedergegeben. 15 $+b^2 - a^2$: Es müsste $+b^2 + a^2$ stehen.

Hinc jam sequitur si sit aequatio duarum vel etiam plurium incognitarum, quarum quaelibet duos habeat valores aequales; semper posse reduci aequationem ad unicam duos tantum valores aequales habentem, quia semper linea aliqua poterit duci, cujus solius duplex valor sufficiat. Itaque tum demum impossibilis reddi potest aequatio, cum unius aequationis ope tolli possunt incognitae duae.

Caeterum in exempla inquiramus, in quibus certum est aliunde exitum haberi: Quaeritur curva, in qua sit reducta semper constans.

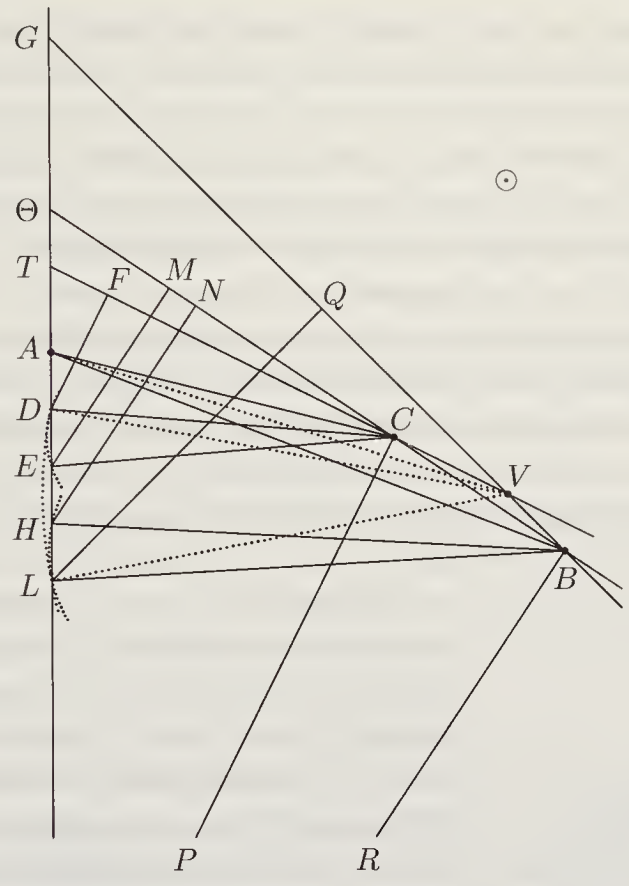


[*Fig. 2a*]

1 f. *Zwischen den Zeilen:* (+ Ita posset etiam methodus Tangentium inversa tractari methodo Fermatiana. [+])

1 si *(1)* sint aeqvationes *(2)* sit *L* 2 f. unicam *(1)* unius tantum valoris *(2)* duos *L*

8 *Fig. 2a*: Zwei gestrichene sowie eine durch Überschreiben ungültig gemachte Vorstufe werden nicht wiedergegeben. 10 methodo Fermatiana: s. Erl. zu N. 7_4 S. 84 Z. 9.



[*Fig. 2b*]

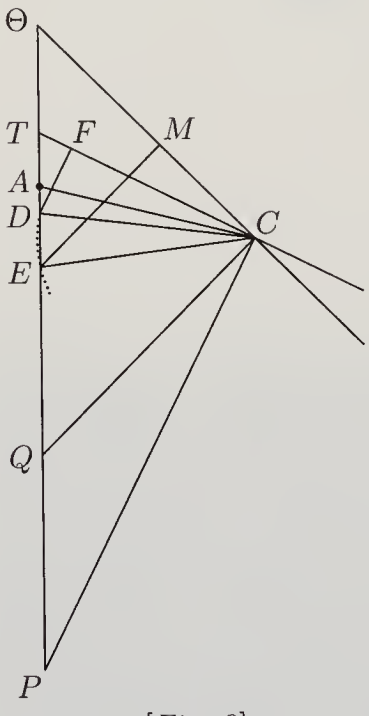
Esto directrix $G\Theta TADEHLPR$, in qua punctum fixum A. Tres curvae quaesitae tangentes $TC, \Theta CB, GB$. latus unum infinite parvum CB determinantes. Jungantur rectae AC, AB. Centro C, radio quolibet CD. describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis D. E. Eodem modo centro B radio BH describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis, H, L. Quod si intervallum DE ponatur infinite parvum, vel etiam HL. idem est ac si recta CD vel CE, item BH et BL esset ad directricem perpendicularis seu ordinatim applicata. Ipsi TC tangenti perpendicularis CP directrici occurrat in P, et ipsi ΘCB alteri tangenti perpendicularis BR, eidem occurrat in R, erunt reductae DP, et HR, inter se aequales.

3 unum *(1)* indefinite *(2)* infinite L 10 et | HP *ändert Hrsg.* | inter L

1 *Fig. 2b*: Die Punkte P und R fallen in Leibniz' Zeichnung jenseits des Papierrands als Schnittpunkte der Normalen mit der Achse GL. Eine nicht gestrichene Vorstufe wird nicht wiedergegeben.

Quo posito quaeritur natura hujus curvae, seu relatio ipsius CD, ad ipsam AC. Nimirum ducantur perpendiculares DF, EM, HN, LQ. Patet parallelas esse, DF, CP, item EM, HN, BR. Investigetur DC, ex DF, TF, TA (vel aliter,) habebitur CD, eodem modo ex EM, ΘM, ΘA fiet $CE \sqcap CD$. Unde aequatio trium incognitarum ambiguarum (quarum una elidi potest). Similiter rursus ex $HN, \Theta N, \Theta A$, investigetur BH, et eodem modo ex LQ, GQ, GA investigetur BL. Ita alia rursus aequatio.

Sed jam video Tribus istis tangentibus, duobusque punctis curvae, non esse opus, nisi quando quaerimus progressiones illas in se continue reflexas, cum terminus sequens derivatur ex antecedente; ubi fieri potest etiam ut duobus sit opus lateribus, et tribus punctis et quatuor tangentibus ut cum laterum progressio explicatur dependentia unius ex altero. Hoc loco videntur puncta $G.Q.B.H.L.R.$ omitti posse. Nempe ipsa DF valorem habet determinatum, et efficiendum ut ipsa calculum cujus ope [*bricht ab*]



[*Fig. 3*]

Sit per punctum datum A transiens recta indefinita positione data, ΘAP, quam vocabo directricem, cui in punctis $T.\Theta.$ occurrant duae rectae in puncto $C.$ se secantes, CT, $C\Theta$. Centro C, radio, CD, describatur arcus circuli DE, secans rectam directricem, in punctis $D.E.$ Ex puncto D ducatur perpendicularis DF ad rectam TC, et ex puncto E, perpendicularis EM ad rectam $C\Theta$. Datum intelligatur punctum A, et rectae AC magnitudo ac proinde circulus in cujus circumferentiam incidit punctum C. Data etiam intelligatur AP. rectaque indefinita circa punctum C gyrata, secabit alicubi circulum centro A, radio AC descriptum. Quod si praeterea daretur etiam AT, determinatum erit punctum C, idem est si alia quaedam ejusmodi linea detur: denique data recta DF, dabitur etiam punctum D.

Jam ex rectis AT, AP, DF, AC, datur recta DC. et eodem plane modo, ex datis $A\Theta$, AQ, EM, AC, datur

3 ex *(1)* AC, TD, DF, *(2)* DF *L* 7 curvae *(1)* imo et pluribus *(2)* non *L* 10 f. ut ... progressio *(1)* pendet ex se invicem *(2)* explicatur ... altero *erg. L* 25 C, *(1)* qvia angulo | recto *erg.* | TCP circa centrum P gyrato *(2)* idem *L*

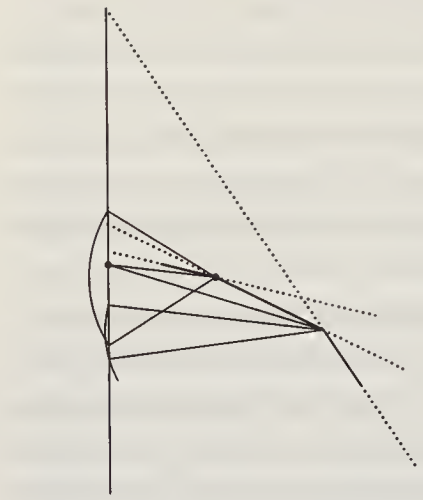
recta $CE \sqcap DC$. Itaque litera una eademque, sed duplicis valoris repraesentari possunt AT et $A\Theta$, item AP et AQ; ac denique DF, et EM. Ex his ambigua AP, vel AQ elidi potest, quia valor ejus hoc loco supponitur esse datus et constans; restant incognitae duae, AT vel $A\Theta$, et DF vel EM. Aequatio autem per quam ex datis AT, AP, DF, AC. invenitur DC, ordinetur tum secundum ambiguam AT vel $A\Theta$, tum secundum ambiguam DF vel EM, et multiplicetur secundum utramque ordinationem ad effectum duarum Radicum aequalium, et praeter inventam habebuntur duae aliae aequationes, quarum ope elidentur duae illae ambiguae, nec aliae restabunt indeterminatae quam AC, et DC. Recte ista quidem et intelligi potest sumta alia AC, et alio quolibet puncto C. etc. eundem calculum valere; sed una tamen difficultas superest, quod hac ratione exprimitur quidem puncta C. omnia cadere in curvam quaesitam; et quod miror, determinatur natura Curvae; sed non determinatur rectam TC ejus curvae esse tangentem; unde cum infinitis modis ductae intelligi possint rectae $TC, \Theta C$, ut si jungantur tangentes alterius cujusdam curvae datae ipsam curvam quaesitam in eo loco secantis; manifestum est problema non debere determinatum esse. Et miror tamen, ut dixi curvam fieri determinatam, seu restare duas tantum incognitas.

Nisi scilicet dicamus non exprimi magnitudinem ipsius DE. Quod ita videbimus: posita $T\Theta$ infinite parva, coincident puncta T et Θ. ergo et rectae CT et $C\Theta$. Rectae autem DF, et EM sunt aequales seu differentiae infinite parvae, sed hinc non potest probari eas coincidere. Itaque patet nullo modo exprimi naturam curvae, quia prout DE alia atque alia assumitur alia atque alia fit curva, et si sumatur infinite parva, tum demum habetur curva determinata.

Itaque ejusmodi inquisitione nihil agitur. Ac proinde etsi nondum desperem, video tamen alia ratione opus esse.

Quod si duabus ad unam eandemque aequationem ordinatis vel abscissis opus est, non veniemus profecto ad aequationem, sed semper ad calculos illos mirabiles in se reflexos, quos tamen fateor, valde operae pretium est persequi, cum profundas contineant et miras speculationes, quae apparent, cum duo diversissimis istis viis quaeruntur. Venit

2 AP, *(1)* | et *streicht Hrsg.* | *(2)* vel *L* 16 tantum *(1)* ambiguas *(2)* incognitas *L* 17 DE. *(1)* Neqve enim ex datis TQ, et EM. DF. *(2)* Imo exprimitur: nam posita *(a)* TQ *(b)*, TQ infinite parva, *(aa)* erit et *(bb)* erunt TC et CΘ linea eadem; *(3)* Qvod *L* 18 posita | TQ *ändert Hrsg.* | infinite *L* 18 et | Q. *ändert Hrsg.* | ergo *L* 18 et | CM. *ändert Hrsg.* | *(1)* puncta *(2)* rectae *L* 19 seu ... parvae *erg. L*



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

tamen in mentem aliqua observatio, cujus ope fortasse evitari potest duplicitas incognitarum earundem, inspice figuram ⊙. Ibi tres sunt tangentes TCV, ΘCB, et GVB. Sive si mavis polygoni ordinati circumscripti latera producta TCV, GVB curvam in punctis $C.$ $B.$ tangentia; latus unum polygoni inscripti productum ΘCB. Appello enim polygona ordinata, quaecunque curvae alicubi certa regula constanti, inscribuntur aut circumscribuntur. Centro $V.$ radio VD vel VL describatur arcus circuli LD, secans directricem in punctis D, L. Unde posita recta $DL.$ infinite parva, poterit $VD.$ censeri ordinata curvae quaesitae. Jungatur AV. Videndum jam est, an ope ipsarum ductarum TC, ΘCB; eodem calculo inveniri possit DV, quomodo ope ductarum GB, et ΘCB inveniri potest VL. Adhibitis scilicet AT vel AG una ambigua expressis, et perpendicularibus tam ex D quam ex L in ipsam $\Theta CB.$ ductis rursus una ambigua expressis. Ita enim si postea ea ambigua dicatur habere duos valores aequales eo ipso dicetur puncta $D.$ et $L.$ coincidere. Ipsam autem $CB.$ esse infinite parvam (quoniam ambigua non est) reapse assumetur. Quod si jam ita eodem modo habebitur valor ipsius DV vel $LV.$ ex his ambiguis, etiamsi signa varientur forte, modo ulteriori multiplicatione ad altiorem gradum, signa reddi possint eadem, (: ecce usum methodi meae, quam voco universalium :) habebitur aequatio in qua ambiguae duos habent valores aequales; et determinando veniri poterit ad solutionem.

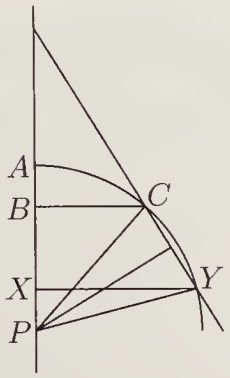
Sed et aliud jam succurrit remedium, ponamus duo ejusdem curvae puncta, et duas AC, item AB, simul in eundem calculum intrare; vitato solum, ne duae simul ambiguae eaedem intrent eundem calculum, quoniam AC et $AB.$ pono non esse ambiguas, nec litera exprimi duplicis valoris. Hoc posito calculus absolvatur, et ambiguis caeteroquin, si licet, ope duarum radicum aequalium exterminatis, restabit denique aequatio trium

4 f. polygoni *(1)* reguli *(2)* ordinati *(a)* intra curvam *(b)* circumscripti *L* 28 aeqvatio *(1)* duarum *(2)* trium *L*

---

3 figuram ⊙: s. o. Fig. 2b. Im Folgenden wird der Punkt V eingeführt. Die Punkte D und L aus ⊙ erhalten eine neue Funktion (vgl. Z. 10). 22 methodi meae: vgl. *De la Methode de l'Universalité*, Cc 2, Nr. 863, tlw. gedr. in COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, S. 97–143.

indeterminatarum, AB, AC, et DC (vel DE). Ubi in locum alterutrius ex his AB, AC substituendo valorem alterius quantitate infinite parva auctum vel minutum verbi gratia in locum AB ponendo $AC + 0$. et quae per 0. multiplicantur abjiciendo sive quod idem est in locum AB. simpliciter substituendo ubique AC. restabunt incognitae tantum duae. Sed ut hoc fieri possit, necesse est ut ipsa DC, ex ambiguis quae adhibentur, una cum ipsa AC et AC. eodem modo oriatur, quod tamen difficile. Sin vero plures calculum necesse sit intrare ejusdem denominationis rectas, seu ejusdem progressionis terminos; tunc remedium hoc locum non habet.



[*Fig. 5*]

$AP \sqcap v.\ PC \sqcap s.\ AB \sqcap x.\ s^2 \sqcap y^2 + v^2 + 2vx + x^2$. Pone $s.$ esse quantitatem constantem seu determinatam, $\sqcap a$, fiet: $y^2 + x^2 + 2vx + v^2 \sqcap 0$. Quod cum fiat in Circulo, videndum $-a^2$ est an hinc derivari possit, talem curvam esse circumferentiam circuli. Nimirum tantum haec aequatio ad duas utriusque incognitae radices aequales determinanda est, quod per Slusii regulam ita fiet: $-2y^2 \sqcap 2xl + 2vl$; sive $l \sqcap \frac{-2y^2}{2x + 2v}$. Jam $l \sqcap \frac{y^2}{x - v}$. ut constat aliunde. Ergo hinc nulla obtineri potest aequatio: Quandocunque $s.$ vel v, ita explicari possunt, ut in eorum valorem non ingrediatur neque x, neque $y.$ sequitur aequatio identica v. g. quaeritur curva, in qua sit $s \sqcap \frac{v^2}{a}$. Fiet: $v^4 \sqcap y^2a^2 + a^2v^2 + 2a^2vx + a^2x^2$, sive ordinando ad duas radices aequales:

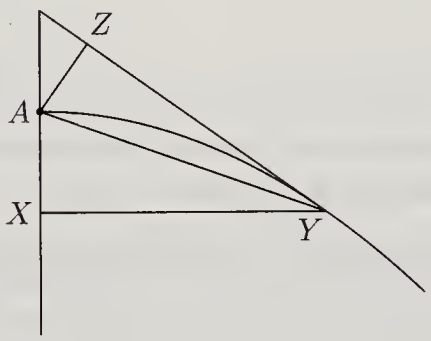
4 AC. *(1)* restabit incognita tantum una *(2)* restabunt *L* 5 ut *(1)* caeterae ambiguae e⟨o⟩sd *(2)* ipsa *L* 17 aeqvatio: *(1)* Sumamus aliam qvaestionem, in qva: s ⊓ $\frac{v^2}{a}$. et *(2)* Qvandocunqve *L* 18 y. *(1)* poterit semper solvi problema, Methodi Tangentium inversae. *(2)* seqvitur *L*

9 $s^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $-2vx$ stehen. Leibniz benutzt die fehlerhafte Gleichung bis S. 226 Z. 6. 14 f. Slusii regulam: s. *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059). Leibniz vermischt im Folgenden in unzulässiger Weise Berechnung der Subtangente und Bestimmung von Doppelwurzeln, wie er selbst in S. 228 Z. 7 f. erkennt. 16 *Fig. 5*: Die Kurve *ACY* war zunächst nicht als Kreis, sondern als allgemeine Kurve konzipiert. Die zugehörige Vorstufe enthielt zusätzlich zum Kurvenbogen einen später gestrichenen Kreisbogen durch C und Y.

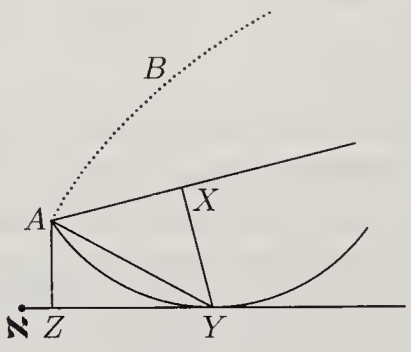
$-2y^2 \sqcap 2vl + 2xl$. Unde rursus aequatio identica seu valor ipsius l. dudum notus. Semper enim valor ille destruetur.

Ponamus jam valorem esse alium, v. g. $v - x \sqcap a$. vel $v - x - \beta \sqcap a$. Substituendo hunc valorem in aequatione $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + a^2$. Et alia: $s^2 \sqcap y^2 + a^2 + 2a\beta + \beta^2$. Quae duae aequationes sunt aequivalentes, sed nihil hinc duci potest.

Video jam semper videri posse inveniri curvam data relatione inter $\underline{s}$. et $\underline{v}$. nempe explicando non s per v, sed v per s. Ita ponendo $v \sqcap \frac{s^2}{a}$, ex aequatione generali: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + \frac{s^4}{a^2} - \frac{2s^2}{a}x + x^2$, et ordinando ad duas radices aequales: $-2y^2 \sqcap -\frac{2s^2}{a}l + 2xl$, sive $l \sqcap \frac{-y^2}{\frac{s^2}{a} + x}$. Jam $l \sqcap \frac{y^2}{-v - x}$. Ergo $-\frac{s^2}{a} - x \sqcap -v - x$, unde redit aequatio supposita $\frac{s^2}{a} \sqcap v$. neque quicquam hinc duci potest.



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*]

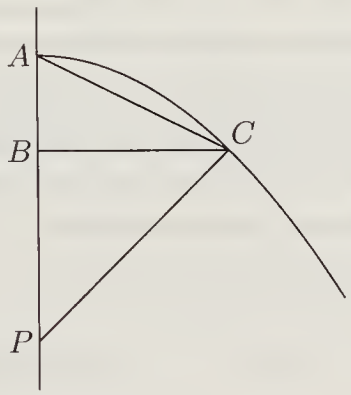
Sit planum rigidum ZY super quo volvitur curva AY, et puncto A describitur alia curva AB. quam pono dari. Directrix incipit in ZY ex ℵ. Data Analytice curva AB dabitur et relatio inter ℵY et AY item inter AZ et ZY. Quaeritur an modus habeatur semper ducendi rectam AX in fig. 2. Is vero ex his solis datis non habetur. Si detur curva

4 $+v^2$ *(1)* + *(2)* $-2vx$ *L* 9 $+v^2$ *(1)* + *(2)* $-2vx$ *L* 14 Data *(1)* Geometrice *(2)* Analytice *L*

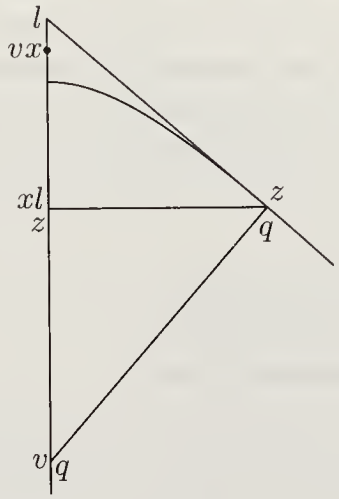
10 sive $l \sqcap$: Im Nenner müsste $-\frac{s^2}{a}$ stehen. 16 fig. 2: s. Fig. 6b.

AY. ejusque in rectum extensio, eo ipso dabitur descriptio Trochoeidis AB. Datur autem curvae in rectum extensio si detur [relatio] inter ℵY ⊓ curvae AY et inter AY, ergo ex his datis, datur curvae AB. descriptio.

Videndum an liceat mutare non nihil calculum methodi tangentium inversae, utendo una tantum indeterminata simplici s, et non utendo ipsa v. sed ejus loco adhibendo ambiguas, ut scilicet valor per ambiguas substituatur in ambiguae locum, non vero valor simplicis in locum ambiguae.



[*Fig. 7a*]



[*Fig. 7b*]

Sit AB ⊓ x. AC ⊓ z. BP ⊓ p. et CP ⊓ s. fiet: $z^2 - x^2$ ⊓ $s^2 - p^2$, ubi patet etiam p esse ambiguam, solam s. non esse. Jam ponamus ut in parabola, p. esse fixam seu substituamus, a, fiet: $z^2 - x^2$ ⊓ $s^2 - a^2$. aequatio ad Hyperbolam; quae ad duas radices aequales ordinabitur inveniendo Hyperbolae hujus tangentes, nempe ordinando ad duas

2 ℵZ *L ändert Hrsg.* 11 $-a^2$. *(1)* ordinando ad duas radices aeqvales: $2z^2$ ⊓ 2xl. seu $\frac{z^2}{x}$ ⊓ l. ⊓ *(a)* $\frac{x^2}{-}$ *(b)* $\frac{z^2}{v-x}$. fiet: 2x ⊓ v. *(2)* aeqvatio *L*

12 nempe: Leibniz berechnet die Subtangente zu $z^2 = x^2 + s^2 - a^2$ nicht mit dem korrekten Wert $s^2 - a^2 = 2ax$, sondern mit konstantem $s^2 - a^2$. In der zugehörigen Zeichnung (s. Fig. 7b) hat er die oberen Endpunkte von x und v zunächst richtig in den Scheitelpunkt der Hyperbel gelegt, diese dann aber gemäß seiner falschen Annahme in den hervorgehobenen Punkt oberhalb des Scheitels verschoben. Bei konsequenter Rechnung hätte dieser Punkt sogar über dem Endpunkt der Subtangente l liegen müssen. Fig. 7b orientiert sich weitgehend an Leibniz' Vorlage.

radices aequales: $z^2 \sqcap xl$. $l \sqcap \frac{z^2}{x}$. $\sqcap \frac{z^2}{v-x}$. $v \sqcap 2x$. Substituantur hi valores in aequatione $q^2 \sqcap z^2 + v^2 - 2vx + x^2$ unde explicando $q^2 \sqcap z^2 + x^2$. Sed ex his nihil habeo. Quaerenda scilicet ratio, cujus ope aequatio aliqua ita ad duas radices aequales ordinetur ut nulla tamen inde oriatur nova litera, nempe haec: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$, si ita ordinari posset, ut nova haberetur aequatio, in qua nulla esset alia litera nova, et in qua esset s. collatione duarum tolli posset s, et haberetur aequatio, in qua non nisi z et x extarent. Quae est quaesita. Sed regula Slusiana aequatio proposita non ordinatur ad duas radices aequales nisi nova adhibita incognita $\underline{l}$, credo Huddenium id aliter posse. Mira dubia, quomodo regula Huddenii de multiplicatione aequationis duas radices aequales habentis per progressionem Arithmeticam vera et universaliter esse possit cum tamen non habeat locum, quando duae sunt ambiguae, v. g. cum quaeritur modus ad duas radices aequales determinandi aequationem ad circulum: $x^2 + y^2 \sqcap a^2$. Deinde videndum an si sit aequatio: $x^2 - a^2 + ba \sqcap 0$. determinanda ad duas radices aequales, ubi simpliciter fieret $x \sqcap 0$. an liceat mederi explicando: $z^2 + 2cz + c^2 - a^2 + ba \sqcap [0]$ unde $2z + 2c \sqcap 0$. seu $z + c \sqcap 0$. Ergo nihil facit explicatio.

Si potuissent conferri $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$ cum $z^2 + x^2 - 2vx + v^2 - q^2$ fuisset aliquid.

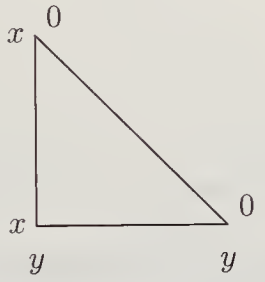
28. ORDINATARUM IN PARTES RESOLUTIO AD QUADRATURAS

[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 94. 1 Bl. 2°, von dem das obere Drittel abgeschnitten wurde. 4/5 S. auf Bl. 94 r°. Bl. 94 v° leer.
Cc 2, Nr. 788

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück stehen in engem inhaltlichen Zusammenhang und dürften etwa gleichzeitig entstanden sein. Mit Überlegungen zur Umordnung und Division von Kurvengleichungen hatte Leibniz im Dezember 1674 begonnen (vgl. VII, 3 N. 39 S. 567 sowie VII, 1 N. 141 u. 143). Die in N. 28 u. 29 verwendeten Symbole für Mehrfachvorzeichen benutzt Leibniz in der zweiten Hälfte von 1674 und vereinzelt bis ins Frühjahr 1675. Das Wasserzeichen des Papiers von N. 28 ist für Januar 1675 belegt.

Ordinatarum in partes resolutio ad quadraturas



[*Fig. 1*]

Si sit Aequatio $y^2 + x^2 \sqcap 0$. seu $y^2 \sqcap -x^2$. quaeritur modus inveniendi ipsam y. Erit $y \sqcap x\sqrt{-1}$. Sane nondum video quomodo id quidem instrui queat, nisi ita procedamus forte: $ya \sqcap xa\sqrt{\frac{-a}{a}}$. Pro $-a$ substituatur b, et pro $+a$, ponatur $-b$, fiet: $\not{+}y\not{\flat} \sqcap \not{+}x\not{\flat}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Sed ne hoc quidem satisfacit.

Si inde facias $y^2 + a^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $y^2 + a^2 \sqcap a + x \frown a - x$. Jam $y^2 + a^2$, potest intelligi facta ex $ay \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}$, fiet $\frac{ay^2}{a} + \frac{aya}{y}$, sive $y^2 + a^2$, fiet $\frac{ay}{a+x} \sqcap \frac{a-x}{\frac{y}{a} + \frac{a}{y}}$ sive

12 Ordinatarum ... qvadraturas *erg. L* 13 *(1)* Constructio *(2)* Si *L* 14 ipsam *(1)* x, e⟨r⟩ *(2)* y *(3)* | x *ändert Hrsg.* | Erit *L* 15 qvidem *(1)* construi *(2)* instrui *L* 16 forte: *(1)* $y \sqcap x\sqrt{\frac{-a}{a}}$ *(2)* ya ⊓ xa | $\sqrt{-a}$ *ändert Hrsg.* | pro *L*

$\sqcap \frac{a^2y - xay}{y^2 + a^2}$ sive $\frac{a}{a+x} \sqcap \frac{a^2 - xa}{y^2 + a^2}$. Idem quod ante.

Caeterum haec observatio de dissolutione ipsius $a^2 + y^2$, in partes ex quibus componitur, $ay \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}$ ad multa esse potest, inprimis autem ad destruendum; item ad resolvendum locum in lineas rectas, quod utile ad quadraturas.

$\frac{yx}{a \,\mathfrak{D}} + \frac{y}{y+b} \sqcap \frac{a^2 + y^2}{\mathfrak{D}\, a}$, fiet $\frac{x\not{y}}{\mathfrak{D}\, a} + \frac{\not{y}}{y+b} \sqcap \frac{a\not{y}, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\mathfrak{D}\, a}$, sive $\frac{x}{\mathfrak{D}a} + \frac{1}{y+b} \sqcap \frac{y + \frac{a^2}{y}}{\mathfrak{D}\, a}$.

Unde fit $x \sqcap y + \frac{a^2}{y} - \frac{\mathfrak{D}\, a}{y+b}$.

Ordinata ergo curvae ad quam est locus propositus componitur ex ordinata ad Triangulum, et duabus ordinatis ad duas quasdam Hyperbolas. Quod ex aequatione

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{xa}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^5}{a^5} - \frac{x^7}{a^7} \sqcap \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8}$ etc. vel si $b \sqcap 1$. fiet: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10}$ sive $\frac{2}{8} + \frac{2}{80}$ etc.

2 $a^2 + x^2$ *L ändert Hrsg.* 3 $\frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}$ *(1)* mire utilis esse potest ad multa, *(a)* in *(b)* inprimis autem ad deprimendas dimensiones, ut si sit: $\frac{a^2 + y^2}{\mathfrak{D}\, a} \sqcap$ *(aa)* $\frac{y}{\sqrt{\langle - \rangle}}$ *(bb)* $\frac{y}{y+b}$ haec aeqvatio cuilibet Cubica videbitur, si reducatur *(aaa)* vid *(bbb)* fiet enim $a^2\, y + y^3 + by^2 + ba^2$, sed nostro tractandi $\mathfrak{D}\, a$ ... modo fiet: $\frac{ay, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\mathfrak{D}\, a} \sqcap \frac{y}{y+b}$, sive $\frac{y + \frac{a^2}{y}}{\mathfrak{D}\, a} \sqcap \frac{1}{y+b}$. Unde reducendo habebimus: e. g. $\frac{ay, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\mathfrak{D}} \sqcap$ *(2)* sive *(3)* ad *L* 9 $\frac{x}{a^2} - \frac{x^3}{a^4}$ *L ändert Hrsg.*

---

9 $\sqcap \frac{b^2}{2}$: Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der linken durch Quadratur. 10 $+\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$: Richtig wäre $+\frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ und anschließend $\frac{2}{8} + \frac{2}{48}$ etc.

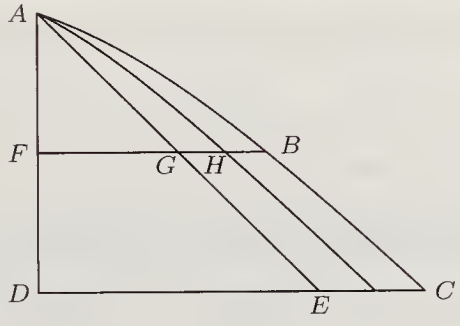
ipsa: $\frac{yx}{a \,\mathfrak{D}} + \frac{y}{y+b} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\mathfrak{D}\, a}$ nemo judicasset, reducatur analogia in aequationem, fiet: $\frac{y^2x + byx + a\,\mathfrak{D}y}{\mathfrak{D}\, ay + ba\,\mathfrak{D}} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\mathfrak{D}\, a}$, et multiplicando per crucem:

$$\mathfrak{D}\, ay^2x + b\,\mathfrak{D}\, ayx + a^2\,\mathfrak{D}^2\, y - \mathfrak{D}\, ay^3 - ba\,\mathfrak{D}\, y^2 - ba^3\,\mathfrak{D} \sqcap 0.$$
$$- \mathfrak{D}a^3 \ \ldots$$

vel ponendo $\frac{yx}{a\,\mathfrak{D}} + \frac{\frac{e}{a}y}{\frac{f}{a}y + b} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, fiet $x \sqcap \frac{y + \frac{c^2}{y}}{\frac{da}{\mathfrak{D}\, a}} - \frac{\mathfrak{D}\, e}{\frac{f}{a}y + b}$, locusque propositus erit:

$\frac{yx}{a\,\mathfrak{D}} + \frac{eya}{fay + ba^2} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, sive $\frac{y^2xfa + ba^2yx + a^2\,\mathfrak{D}\, ey}{a\,\mathfrak{D}\, fay + ba^3\,\mathfrak{D}} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, unde

$$\left.\begin{array}{r} fa^2dy^2x + ba^3dyx + a^3\,\mathfrak{D}\, ed\ y - a\,\mathfrak{D}\, fay^3 - ba^3\,\mathfrak{D}\, y^2 - ba^3\,\mathfrak{D}\, c^2 \\ - a\,\mathfrak{D}\, fac^2 \ldots \end{array}\right\} \sqcap 0.$$



[*Fig. 2*]

Curvae ad quam locus iste est, dimensio, utique patet ex quadratura Hyperbolae; cum componatur ejus ordinata FB ex FG ordinata Trianguli ADE et GH. HB. ordinatis duarum diversarum Hyperbolarum.

Utilis est conversio aequationum in analogias, qualem vides; ita enim modus etiam reperitur, quo quam plurimae rectae diversae, inseri possunt, ut hoc loco 6[:] *f. d. b. c. e.* ✠. ita ut habeatur aliqua jam supernumeraria, cum non possint in Constructionibus esse aequationes collatitiae nisi 5. Sed non sunt ad figuram datam, verum ad quamlibet. Non refert hic qualia sint signa.

Inquirendum est in formulas, quarum ope cujuslibet formulae datae divisores tam rationales quam irrationales haberi possint. Quod ad formandas analogias utile est. Item ad curvas ex aliis curvis componendas metiendasque.

6 $-a\,\mathfrak{D}fac^2y^3$ *L ändert Hrsg.* 16 f. nisi 5. *(1)* $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, unde $\frac{2a \mp \frac{a}{q}x}{y} \sqcap \frac{y}{x}$, | unde *streicht Hrsg.* | *(2)* Sed *L*

29. DE QUADRATURIS PER SUMMIS ORDINATARUM

[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 407. 1 Zettel ca 17,5 x 17,3 cm. Linke Kante geschwungen. 1 S. auf Bl. 407 r°. Bl. 407 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: s. N. 28.

De quadraturis per summas ordinatarum

Si per omnes possibiles combinationes Ordinatarum inferiorum curvarum procedatur, habebimus omnes curvas superiores quarum quadratura ex datarum combinatione pendet: e. g. $\frac{y^2}{a} + \frac{a^2 b}{y^2} \sqcap z$. Ergo $\frac{y^4 + a^3 b}{ay^2} \sqcap z$. Hujus ergo figurae datur dimensio: Fiet aequatio: $y^4 + a^3 b \sqcap zay^2$. Inde: $y^4 - azy^2 + \frac{a^2 z^2}{4} \sqcap a^3 b + \frac{a^2 z^2}{4}$. Ergo $\mp y^2 \pm \frac{az}{2} \sqcap a\sqrt{ab + \frac{z^2}{4}}$ et $y \sqcap \sqrt{\frac{az}{2} + a\sqrt{ab + \frac{z^2}{4}}}$. Datur ergo summa harum radicum, etsi summa harum $\sqrt{ab + \frac{z^2}{4}}$ non detur.

---

7 *Am oberen Rand, außerhalb des Textes:*
Gestrichen: $x^2 + bx \sqcap 60750\, a^2$. $x^2 \sqcap -bx + a^2$. $a^2 + 2b$ *Nicht gestrichen:* a

11–233,2 *Am Rande:* Ex numero cognitarum agnosci potest, in quot simplices resolubilis sit ordinata curvae, hoc loco, *a. b.*

7 de ... ordinatarum *in anderer Tinte erg. L*

---

12 $\sqcap a^3 b$: Richtig wäre $-a^3 b$. Leibniz rechnet konsequent weiter, der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Überlegung nicht.

$\sqrt{az} + \frac{ab}{y} \sqcap z$. Ergo $\sqrt{az} \sqcap \frac{yz - ab}{y}$ sive $az \sqcap \frac{y^2z^2 - 2abyz + a^2b^2}{y^2}$ et fiet $y^2z^2 - y^2za - 2abyz + a^2b^2 \sqcap 0$.

Inquirendum est etiam in divisores aequationum quae sunt duarum incognitarum pluriumve.

$\frac{+\dagger x +\ddagger b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. summa scilicet aut differentia x et b. Ergo $+\dagger x^2 +\ddagger bx \sqcap ac$. sive $x^2 \sqcap \mp\ddagger bx +\dagger ac$. Unde jam patet hoc modo semper cum bx est affectum signo $+$, alterum $\underline{ac}$ affectum signo $-$, nisi uno casu quo utrumque affectum signo $+$, ergo etiam x^2 aequatur summae aut differentiae ipsarum $bx. ac.$

Sic clarius: $\frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{c}{x}$. Ergo $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap ca.$ sive $x^2 \sqcap (\omega\alpha\alpha)bx$ $(\alpha\alpha\omega)ca.$

$\frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{(\beta\beta\psi)x(\beta\psi\beta)c}{x}$. Unde fiet $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap (\beta\beta\psi)ax(\beta\psi\beta)$ ca sive $x^2 \sqcap \left(\frac{\beta\beta\psi}{\alpha\alpha\omega}\right)ax\left(\frac{\beta\psi\beta}{\alpha\alpha\omega}\right)ca.$

$(\omega\alpha\alpha)\ b..$

Hac methodo omnes varietates signorum possibiles possumus indagare, et determinationes etiam, pro qualibet analogia necessarias. Ita agnoscemus quoque ex ipsis formis aequationum in quas analogias sint resolubiles. Et in primis an agnosci possint ex ipsis analogiis, an imaginariae futurae aequationes. Neque enim puto analogiam posse esse intelligibilem, et tamen radicem omnem imaginariam.

Aequationes duobus generantur modis ex radicibus et ex analogiis. Illis in se, his per crucem multiplicatis. Utraque analysis utilis, illa ad inveniendas radices Arithmetice, seu ad inveniendas valores vel exactos, vel propinquos; ut analogiae usum videntur habere ad loca investiganda et ad valores Geometrice inveniendos, quod saepe ope curvarum satis compositarum compendiosissime fit, ut nihil aliud restet, quam ratio eas commode describendi, imprimis filis ex focis.

13 omnes *(1)* formas *(2)* varietates *L*

30. CURVAE MENSURABILES HEURATIANAE
[Mitte 1674 – 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 149. 1 Ausschnitt ca 18,0 x 6,2 cm. 11 Z. auf Bl. 149 r°. Bl. 149 v° leer. Am unteren Rand Fragmente von Kurven in Blindtechnik. Cc 2, Nr. 901

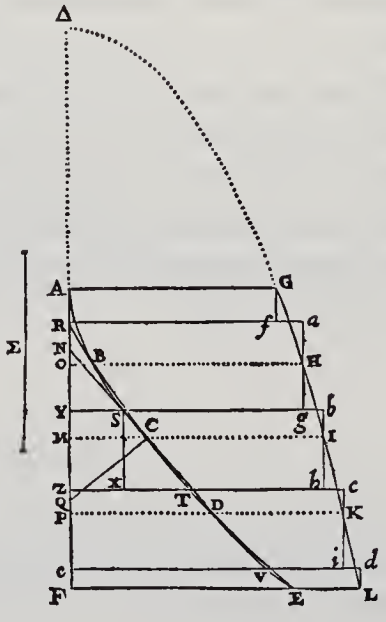
Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Die Verwendung des Gleichheitszeichens ⊓ und der Tangentenmethode von Hudde sowie das Fehlen von Differentialsymbolen deuten auf eine Entstehungszeit zwischen Mitte 1674 und Herbst 1675.

Curvae mensurabiles Heuratianae

Si sit aequatio: $ay^{z-1} \sqcap x^z$ semper inde Heuratii calculo, curva quadrabilis reperietur, nempe fiet (vide fig. Heurat. apud Schoten p. 518. 519) $MC. \sqcap \sqrt{\overset{z-1}{\bigcirc}} \frac{x^z}{a}$. et

10 Curvae ... Heuratianae *erg. L* 12 519) *(1)* MQ ⊓ *(a)* $\frac{z}{2a}x^z$ *(b)* $\frac{z}{2a^z}x^z$, eiusqve qvadratum $\frac{z^2}{4a^{2z}}x^{2z}$. Cui adde y^2. Nempe y ⊓ *(2)* MC. *L*

11 Heuratii: H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I, S. 517–520. 12 fig.: *a. a. O.*, S. 518:



$MC^2 \sqcap \sqrt{\overset{z-1}{\bigcirc}\frac{x^{2z}}{a^2}}$. Unde aequatio:

$s^2 \ -2sx \ +x^2 \ +\sqrt{\overset{z-1}{\bigcirc}\frac{x^{2z}}{a^2}} \sqcap v^2$. Videndum hic an liceat multiplicare hoc modo

0 1 2 $\frac{2z}{z-1}$ 0. et an idem proveniat, quod provenit ablata irrationalitate.

3f. *Darunter:* Formulae omnium dimensionum. Curvarum in rectum extensio.

5 *(1)* Haec ad formu *(2)* Aeqvatio *(3)* Formulae *L*

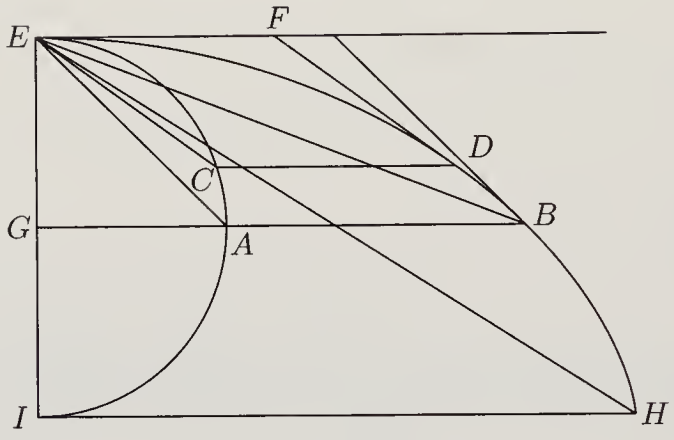
31. FIGURA SEGMENTORUM

[März – Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 357. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 357 r°. Bl. 357 v° leer. Cc 2, Nr. 1195

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für März und Dezember 1675 belegt. Aufgrund der inhaltlichen Berührungspunkte zu N. 22, 24 und 25 von Januar 1675 dürfte eine Entstehung im März 1675 wahrscheinlicher sein.

Figura segmentorum

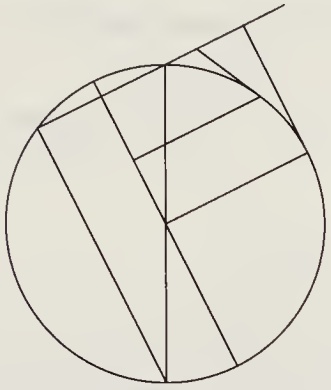


[*Fig. 1*]

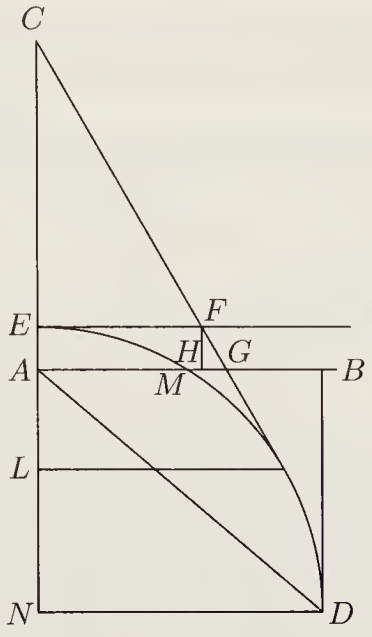
Principium meum quo ostendo summam occurrentium tangenti aequari duplo segmento, nullo negotio ostendit dimensionem Cycloeidis et omnium ejus partium, et dimensionem etiam segmenti cycloeidalis mei absolutam. Num semper $CD \sqcap EF$ jam figura $EDBCE$ quadrabilis et aequatur quadrato a radio. Ergo $EBDE$ aequatur dimidio ejus seu $\triangle^{lo}$ EGA. et $EHBDE$ aequabitur dimidio $ECAIHBDE$. Hinc facile demonstratur relatio cycloeidis ad circulum, sed et omnium partium ad circuli segmenta.

8 Figura segmentorum *erg. L*

10 Principium meum: Zum Transmutationssatz vgl. VII, 4 N. 39_1 S. 617–620 sowie in der Einleitung, VII, 4 S. XXII f. 12 mei: vgl. VII, 4 N. 17 S. 345 f.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

In circulo: Ducatur AB, cui tangentes occurrant. Producantur dum occurrant diametro AC productae. Ipsam EL ponemus x. Erit $EF \sqcap \frac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. $2ax - x^2 \sqcap y^2$ unde $2al - 2xl \sqcap 2y^2$ sive $l \sqcap \frac{y^2}{a-x}$, sive $l \sqcap \frac{2ax - x^2}{a-x}$ sive $l \sqcap \frac{ax}{a-x} + x$. Ergo $EC \sqcap \frac{ax}{a-x}$. Jam ut EC ad EF, seu ut $\frac{ax}{a-x}$ ad $\frac{ax}{\sqrt{2a - x^2}}$ seu ut $a - x$ ad $\sqrt{2ax - x^2}$, seu ut sinus complementi ad sinum rectum[,] ita $FH \sqcap b.$ ad HG, $\frac{\text{sin. comp.}}{\text{rect.}}$ [$\sqcap$] $\frac{b}{HG}$. Ergo, $HG \sqcap \frac{\text{sin. rect.} \frown b}{\text{sin. compl.}} \sqcap \frac{b\sqrt{2ax - x^2}}{a-x}$ sive ponendo $a - x \sqcap y$. fiet: $\frac{b\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \sqcap HG$. Jam $AG \sqcap \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{b\sqrt{2ax - x^2}}{a-x}$ sive $\frac{a^2 - ay}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{b\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ fiet: $\frac{a^2y - ay^2 + ba^2 - by^2}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$

3 ipsam | AL *ändert Hrsg.* | ponemus L

5 $a-x$ ad $\sqrt{2ax - x^2}$: Das richtige Verhältnis wäre $\sqrt{2ax - x^2}$ zu $a-x$. Leibniz rechnet konsequent weiter. Dies wirkt sich, zusammen mit weiteren kleineren Fehlern, auf die Ergebnisse für die Momente von HG bezüglich ND, EN und EF aus, beeinträchtigt jedoch nicht die allgemeinen Überlegungen.
7 ponendo $a - x \sqcap y$: Die Variable y wird neu definiert.

quorum summa pendet ex quad. Circ. quia summa omnium $AG \sqcap MADM$. Hinc ergo et $\underline{\underline{HG}}$ pendet ex q. circ. Ejus momentum ex basi ND est $b\sqrt{a^2 - y^2}$. Pendet ex Ellipsi. Momentum ex EN, sunt ejus $\square$, et fit $\frac{b^2a^2 - b^2y^2}{y^2}$, cujus datur dimensio absoluta. Ergo et momentum ex EF, seu $\frac{bx\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$, vel $\frac{ba\sqrt{a^2 - y^2} - yb\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ ex quad. circ. haberi potest quod et jam tum patet.

32. METIRI FRUSTUM CONI RECTI

10. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 51. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 51 r°. Rückseite leer. Cc 2, Nr. 1063

10 Octob. 1675.

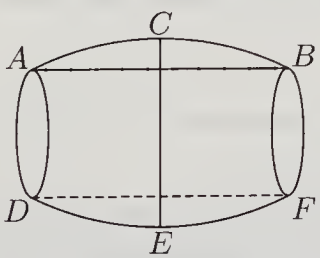
Problema

Metiri frustum Coni recti abscissum plano axi parallelo

Sit Conus ABC. cujus basis Circulus BC. centro N. sectiones basi parallelae Circuli DE. FG. planum axi AN parallelum $P'Q$, quo secatur Conus, in punctis superficiei RTP. etc. Circulo DE aequalis est et similiter positus in basi circulus HI, et circulo FG respondet Circulus LN. idemque de caeteris omnibus in quolibet puncto sumtis intelligi potest. Planum quod Conum secat, a Circulo BC rescindit portionem RBS, a Circulo DE portionem TDV. a circulo FG portionem PFq. quibus in basi respondent portiones RBS. $\alpha H\beta$. $\gamma L\delta$. Summa ergo portionum ejusmodi RBS. TDV. PFq. sive RBS. $\alpha H\beta$. $\gamma L\delta$. erit area frusti a plano abscissi. Re jam a solido ad planum traducta, portionum RBS. etc. seriem in basi in plano hujus paginae collocata examinabimus. Bisecentur eae portiones recta BNC. nam si dimidii aream habeamus, etiam dupli habebimus. Jungantur radii: $N\delta$. $N\beta$. NS.

---

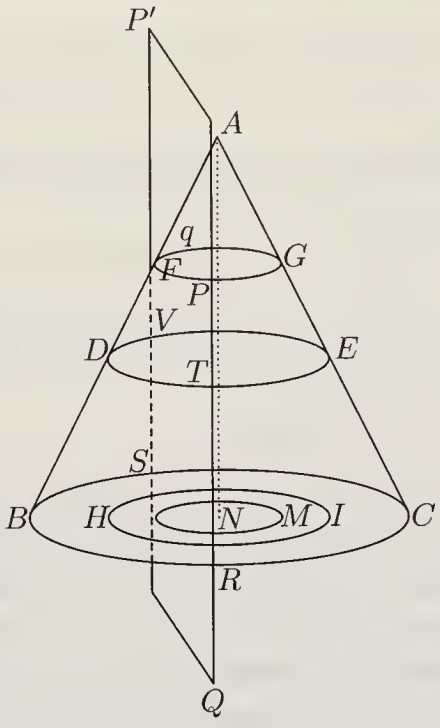
5 *Darunter:* Problema quod mihi hodie solvendum proposuit P. de Chales S. J.



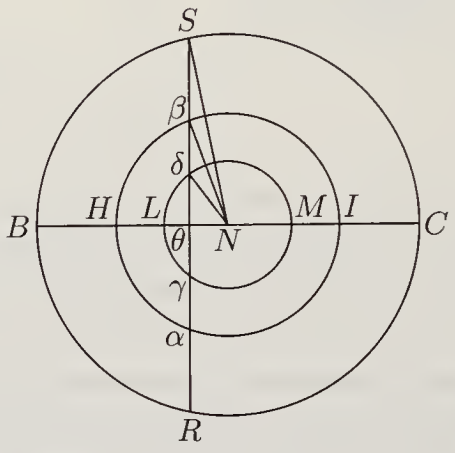
Nam ⟨d⟩oliis nec omnino repletis ut fiet vacuum ABC. portio talis superior et inferior habetur pro frusto Conico et AC, item CB pro recta.

Dazu am oberen Rand, durch Hinweisstrich mit solvendum *verbunden:* Solvi statim eodem vespere.

7 f. *Darunter:* Reduxi ad quadraturam Circuli et Hyperbolae simul.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

Ajo spatia NBS. $NH\beta$. $NL\delta$. esse in triplicata ratione diametrorum, sive si mavis radiorum NL. NH. NB. Hoc Lemma quod reliqui calculi fundamentum est, separatim demonstrabo. Nunc eo posito habebimus summam omnium spatiorum $NL\delta$. $NH\beta$. NBS. et intermediorum, quae sibi imposita in eo quo vides situ atque ordine, solidum quoddam cavum paulatim velut per gradus assurgens, et ut ita dicam cochleatum sive contortum (nam inter surgendum vergit semper in latus, ac se contorquet) efficiens, constituent, cujus contentum ita enuntiabimus. Solidum contortum BS, $H\beta$, $L\delta$, N. est frustum cylindricum cujus basis est eadem cum

7 cochleatum | sive contortum *erg.* | *(1)* efficiens, *(2)* (nam inter surgendum *(a)* convertitur) et *(b)* vergit L

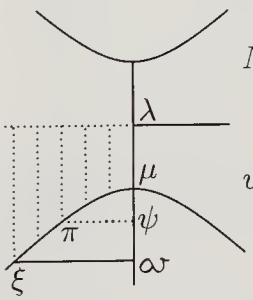
1 *Fig. 1a*: Leibniz hat in Figur und Text die Punktbezeichnung P doppelt verwendet. Zur Unterscheidung wird einer der Punkte mit P' gekennzeichnet. 2 Ajo: Die Behauptung zur Abhängigkeit der Sektorflächen NBS, $NH\beta$ etc. von den Radien NB, NH etc. ist nicht korrekt. Auch die anschließende Aussage, der Rauminhalt des solidum contortum entspreche dem Produkt aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe, trifft nicht zu. 4 demonstrabo: nicht gefunden.

basi solidi, nempe Sector NBS. altitudo triens radii NB. Sive solidi contorti contentum aequatur trienti ex ductu basis in altitudinem.

Porro si ab hoc solido contorto circulari auferamus aliud quoddam solidum contortum rectilineare, cujus basis ob sectiones Basi parallelae sunt Triangula Rectangula $N\theta\delta$. $N\theta\beta$. $N\theta S$. et similia intermedia; restabit nobis semifrustum Conicum. Nimirum si ab omnibus sectoribus NBS. $NH\beta$. $NL\delta$ quae constituunt solidum contortum circulare auferamus omnia Triangula $N\theta\delta$. $N\theta\beta$. $N\theta S$. quae constituunt solidum contortum rectilineare restabunt omnia semisegmenta $\theta L\delta$. $\theta H\beta$. θBS. quae constituunt semifrustum Conicum datum. Superest ergo ut solidum contortum rectilineare metiamur. Reperi autem dimensionem solidi hujus contorti rectilinearis haberi posse ex data Quadratura Hyperbolae. Nimirum aequabitur solidum hoc contortum rectilineare Cylindro, cujus altitudo sit dimidia $N\theta$ et basis portio quaedam simplicissima Hyperbolae aequilaterae cujus semilatus, sit $N\theta$. Differentia ergo inter portionem cylindri circularis, et semicylindri Hyperbolici duplicata dabit frustum conicum quaesitum. Quod quaerebatur. Facile enim in numeris vero quantumlibet propinquis Circuli vel Hyperbolae portio quaevis haberi potest. Non est ergo mirum communiter hactenus non habitam cum ex tam diversis pendeat.

Ut portionem Hyperbolicam enuntiem, centro λ, vertice μ semilatere $N\theta$. describatur Hyperbola aequilatera $\mu\pi\xi$. In ejus axe sumatur $\lambda\omega$ aequalis radio basis Coni, NB.

18–242,3 *Nebenbetrachtung:* $N\theta \sqcap a$. NL, NH, NB vel $N\delta$, $N\beta$, $NS \sqcap x$. $N\theta\delta$ vel $N\theta\beta$ vel $N\theta S \sqcap \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2}$.



$\lambda\omega \sqcap x$. $\psi\pi \sqcap \omega$. $\mu\psi \sqcap z$. $\lambda\mu \sqcap a$. $\lambda\psi \sqcap v$. $2av + v^2 \sqcap \omega^2$. Sit $v \sqcap x - a$. fiet: $\boxed{2ax} - \boxed{2}a^2\boxed{-2ax}\boxed{+a^2} + x^2 \sqcap \omega^2$.

11 Cylindro, *(1)* cuius basis est Portio | cava semi *erg.* | Hyperbolae | aeqvilaterae *erg.* | recta ad axem perpendiculari abscissa, *(a)* latus rectum *(b)* cuius *(aa)* latus *(bb)* semilatus rectum vero Nθ. *(2)* cuius L 15 enim *(1)* ex data circuli qvadratura per polygona vel sinus, *(2)* in L 15 qvantumlibet *erg.* L

---

22 $2av + v^2 \sqcap \omega^2$: Leibniz benutzt jetzt $\omega\xi = \omega$ und $\mu\omega = v$.

Erit portio Hyperbolica $\mu\pi\xi\omega\tau$ ea quam dixi quae in dimidiatam $N\theta$ ducta, si facto ex ductu Sectoris NBS in trientem radii NB auferatur, restabit dimidium frustum Conicum propositum.

1 qvae ... ducta: Um den Rauminhalt des solidum contortum rectilineare zu erhalten, muss die Hyperbelfläche $\mu\pi\xi\omega\tau$ zusätzlich zu $\frac{N\theta}{2}$ noch mit dem Quotienten aus der Höhe und dem Radius der Grundfläche des Kegels multipliziert werden.

33. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM

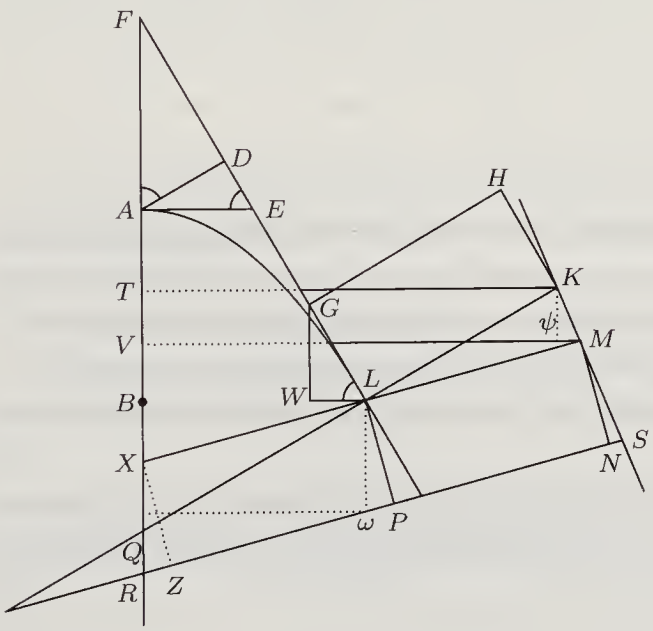
11. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 x 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 x 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 x 4 cm. 1. S. auf Bl. 409 v°. Am Ende von Teil 3 Textverlust durch Zerschneiden. — Auf dem Rest des Trägers Cc 2, Nr. 1069 u. 1070 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 1068

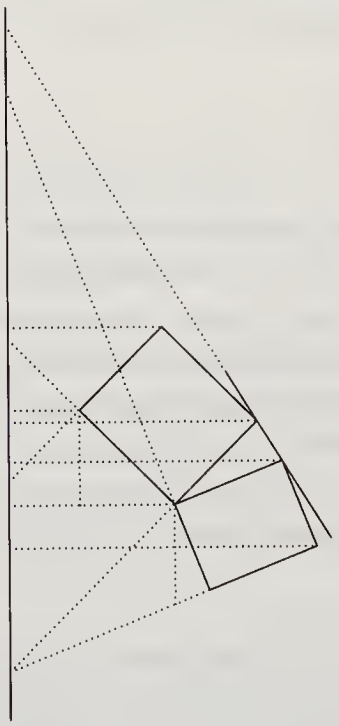
[*Teil 1*]

11. Octob. 1675

Triangulum Characteristicum

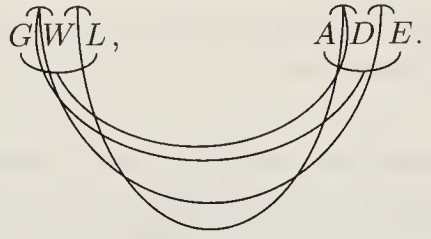


[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

10 *(1)* 21 *(2)* 11. *L* 11 Triangulum Characteristicum *erg. L*



Triangula similia NB. ita scribuntur, ut ab aequali angulo incipiens, inde ad rectum pergas. Quo facto poteris dicere GW ad WL ut AD ad DE; vel GL est ad AE, ut GW ad AD, etc. Sed reapse non nisi tres oriuntur aequationes, nempe $\frac{GW}{AD} \sqcap \frac{GL}{AE} \sqcap \frac{WL}{DE}$, sive si in rectangula reducas habebimus aequationes

$$GW, AE \sqcap GL, AD. \quad GW, DE \sqcap WL, AD. \quad GL, DE \sqcap WL, AE.$$

Id est rectangula sub duabus combinationibus subcontrariis punctorum duorum triangulorum similium, sibi aequantur; sive rectangula respondentia sub duabus combinationibus differentibus, duorum Triangulorum in se invicem, ductis, sibi invicem aequantur, sive combinatio unius trianguli ducta in combinationem differentem alterius Trianguli aequatur Combinationi respondenti alterius Trianguli, ductae in combinationem differenti respondentem Trianguli sui, ut $GW \frown DE$. Ecce jam characteristicae quoddam genus in $WL \frown AD$ lineis

$$GW, FA \sqcap GL, FD. \quad GW, DA \sqcap WL, FD. \quad GL, DA \sqcap WL, FA.$$

Ergo summa omnium FA ad basin aequatur etiam segmento duplicato. Jam summa omnium AB ad basin semper aequatur complemento figurae. Ergo summa omnium FB ad basin semper aequatur ipsi figurae. Quod aliunde constat. Nota lineae rectae ipsis GL dupliciter applicari possunt ad angulos rectos, vel extra planum, superimponendo scilicet, ut constituant superficiem cujusdam ungulae vel in eodem plano, sed tunc spatium non replebunt, ut $GHKL$, $LMNP$.

Ut tamen aliquid inde ducamus; ponatur curva nova fieri producendo QLK perpendicularem curvae, ita ut LK sit aequalis rectae applicandae, ita RPN erit perpendicularis

---

16 *Am Rande:* GWL, FDA

9 est *(1)* combinatio *(a)* ducta *(b)* unius trianguli ducta in differentem alterius Trianguli, aeqvatur *(2)* rectangula *(a)* combination *(b)* ex *(c)* sub *L* 10 aeqvantur; *(1)* sive combinatio unius Trianguli ducta in differentem combinationi *(2)* sive rectangula | respondentia *erg.* | sub *L* 19 aeqvatur *(1)* segmento *(2)* ipsi *L*

producta, et PN ⊓ alii rectae ordine applicandae, habebitur curva nova transiens per puncta KM. et recta KM juncta, erit curvae novae tangens; a qua curva, ut figurae curvilineae aream, (saltem ex data area, primae[)] investigemus, quaerenda est dimensio supplementorum, KLM, ad has non habemus opus nisi longitudine rectae KM. Quam ita inveniemus: Ex K et M. demittantur in rectam AB perpendiculares KT, MV. et KT quidem habetur, quia KL et LQ, et Triangulum KTQ, $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ LBQ simile est. Ut vero inveniamus VM. producatur ML. dum occurrat ipsi AB in X. Est autem MX parallela NR. Ex X in RN demittatur perpendicularis XZ, aequalis et parallela LP, vel MN datis, Eodem modo ex L in PR demittatur perpendicularis $L\omega$. Datur Triangulum $L\omega P$ positione et calculo, at triangulum XZR. $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ $L\omega P$ simile est, et datur Trianguli XZR unum latus. Ergo dabuntur et reliqua. Dabitur ergo et recta RZ, qua differt RP data ab LX. quaesita. Habebitur ergo LX, ergo MX. Ergo habebitur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LBX. Ergo et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ei simile MVX, cujus unum latus habetur nempe MX. Ergo habebuntur et caetera; et inter ipsa et MV. Habemus ergo MV. Inventa MV, et antea TK, scilicet calculo, habebitur differentia inter KT et VM. id est $M\psi$. si scilicet $K\psi$ sit normalis ad $V\psi M$. Datur autem TV, calculo, quod sic ostendo[:] Datur AQ, datur et TB. ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KTQ, et datum LBQ similia datumque latus KQ prioris habebuntur et caetera, ergo et TQ. Ergo et ejus differentia a BQ, nempe TB. Eodem modo ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MVX et LBX data habebitur et differentia laterum VX, BX[,] ergo VB, ergo differentia inter TB, VB, nempe TV. sive $K\psi$. Ex datis autem $K\psi$ et ψM, habetur KM ob angulum $K\psi M$ rectum. Habentur ergo tandem magnitudine omnia latera $\bigtriangledown^{\text{li}}$ KLM adeoque et area. Adeoque figura exhiberi poterit summae arearum homogenea.

Patet ex hoc specimine quam difficile saepe sit quae magnitudine jam data sunt, etiam calculo data habere, et contra, hinc aestimari potest quam saepe difficile sit ma-

---

17 *Am Rande:* a^2 ⊓ xy

2 tangens; *(1)* | cuius *streicht Hrsg.* | *(a)* curvae *(b)* figur *(2)* a qva L 6 et | LR *ändert Hrsg.* |, et L 8 parallela NR *(1)*, et LX ⊓ RP. datur autem RP calculo, ergo et RX. datur ergo et MX et ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MVX, LBX. habebitur et MV *(2)*. Ex L

---

9 perpendicularis $L\omega$: Gemeint ist das Lot von ω auf WL.

gnitudine sive calculo data, efficere etiam positione data. Cum de quadraturis quaeritur, necesse est quantitates magnitudine sive calculo datas haberi, ut inde inveniatur series progressionis de qua quaeritur.

[*Teil 2*]

Inveni alio schediasmate 19. Jun. 1675. curvae Ellipseos dimensionem reduci ad dimensionem spatii curvilinei cujus ordinata valet, $\sqrt{\begin{matrix}+1+\frac{a^2}{2ax-\frac{a}{b}x^2}\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}} \sqcap z$. Fiet: $\begin{matrix}+1+\frac{a^2}{2ax-\frac{a}{b}x^2}\\ -\frac{a}{b}\end{matrix} \sqcap z^2$. Poterit et pro $2ax-\frac{a}{b}x^2$, scribi: $a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$, porro faciamus $1 \sqcap \frac{a}{b}$. et pro $z \sqcap \omega \mp \sqrt{\begin{matrix}+1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}}$. fiet: $\left[\begin{matrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}\right] + \frac{a^2}{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2} \sqcap \omega^2 \mp 2\sqrt{\begin{matrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}}\,\omega \left[\begin{matrix}+1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}\right]$ et fiet: $\frac{\quad}{1}$

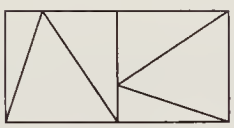
$\frac{a^2}{b^2}y^2 \sqcap a^2 - \frac{a^2}{\omega^2 \mp 2\sqrt{\left\{\begin{matrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}\right.}\,\omega}$. Unde patet sive y, sive ω pro abscissa ordinatave sumas eandem fere aequationis formam prodire. Nam si $\mp$ est $-$ et $\sqrt{1-\frac{a}{b}} \sqcap \omega$ erit utraque forma utrobique $a^2 \sqcap a^2\omega^2 \mp 2a^2\sqrt{\left\{\begin{matrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}\right.}\,\omega - \frac{a^2}{b^2}y^2\omega^2 \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left\{\begin{matrix}1\\ -\frac{a}{b}\end{matrix}\right.}\,\omega y^2$, ut habeatur tangens, scribe

5 alio schediasmate: nicht gefunden; Leibniz verwendet die allgemeine Formel für das Bogenelement der Kegelschnitte bereits am 3. Oktober 1674 in N. 6 S. 33 Z. 3.

$$2\frac{a^2}{b^2}\omega^2\, y\; l \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\;\omega l \sqcap \qquad 2a^2\;\omega^2 \quad \mp 2a^2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\Big\}\;\omega \boxed{-2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\Big\}\;\omega a^2}$$

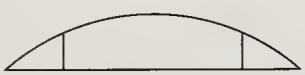
$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\omega^2 \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\omega}}$$

[*Teil 3*]



[*Fig. 3*]

Quadrato $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ aequilaterum inscribere, etc. problema, quod non nisi semel in $\square^{\text{to}}$ fieri potest; et tamen aequatio habebit duas radices, et altera est pro alio quadrato contrario modo sumta.



[*Fig. 4*]

Rectam datam segmento circuli ad angulos rectos inserere, ut simul et basin et curvam attingat, hoc duobus modis fieri potest, ut patet, ob circuli uniformitatem a duabus partibus. Idem in Ellipsi. Exemplum naturale duorum ⟨— — —⟩

---

1 *Nebenrechnung:* $-2\frac{a^2}{b^2}\omega^{\not 2} \mp 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\not\omega \frown \frac{-a^2}{\omega^{\not 2} \mp 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\not\omega}$

7 *Dahinter:* $\mathfrak{R}$

---

1 $2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 yl$: Die Tangentenrechnung ist mit Flüchtigkeitsfehlern behaftet und wird nicht vollständig durchgeführt.

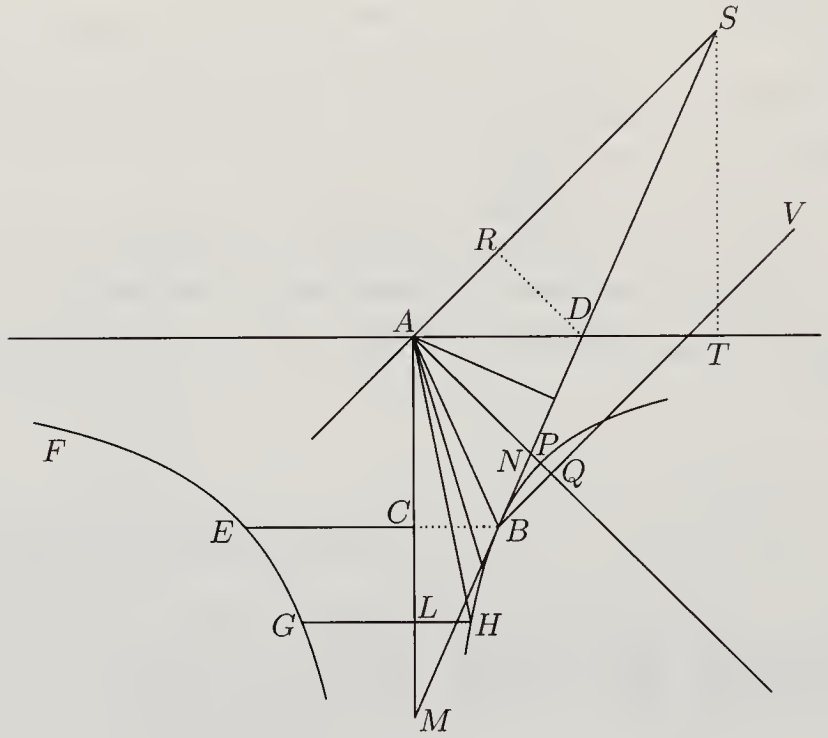
34. THEOREMATA TETRAGONISTICA GENERALIA EX TANGENTIBUS

19. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 123. Ca 2/5 Bl. 2°. 2 S. Auf Bl. 123 r° oben Cc 2, Nr. 1077 (gedr.: HOFMANN, *Über frühe mathematische Studien*, 1970, S. 104). Bl. 123 bildete ursprünglich zusammen mit LBr 943 Bl. 158 (VI, 3 N. 33_3) ein fast vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1076

19 Octob. 1675

Theoremata tetragonistica generalia,
ex tangentibus



[*Fig. 1*]

A Centrum Hyperbolae, *AC*. abscissa ex Asymptoto[,] *CB* ordinata, *BD* tangens occurrens alteri Asymptoto in *D*. Sit *BCE* recta, ita ut *CE* ⊓ *AD*. idque ubivis fac-

8 19 Octob. 1675 *erg. L* 9 f. *(1)* Quadraturae *(2)* p r o b l e m a t a *(3)* t h e o r e m a t a ... t a n g e n t i b u s *erg. L*

tum intelligatur. Curva FEG transire intelligatur per illa puncta (cui etiam DA et AC productae Asymptoti erunt). Erit exempli gratia spatium quadrilineum $ECLGE$, aequale trilineo $BAHB$. ut ex theoremate meo generali constat. Jam quaeramus calculo AD, vel CE. Ducta DBM, erit ACM dupla AC sive $AC \sqcap CM$. ex natura Hyperbolae aequilaterae. Ergo $AD \sqcap 2CB$. Sit $AC \sqcap x$. erit $CB \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $EC \sqcap \frac{2a^2}{x}$.

Hinc demonstratur illud sane pulcherrimum quod sector Hyperbolicus ABH, duplicatus aequetur ipsi $ECLGE$, id est duplo $BCLHB$, id est quod sector Hyperbolicus aequetur portioni respondenti ad Asymptoton. Ducatur Axis APQ. vertex P. axis transversus ARS. Sit DR. ad eum normalis, ob angulum RAD semirectum erit $AD^2 \sqcap \frac{2a^2}{x}\square, \sqcap \frac{4a^4}{x^2} \sqcap AR^2 + RD^2$, et $AR^2 \sqcap RD^2$, et $RD \sqcap AR$, et $AR \sqcap \frac{a^2\sqrt{2}}{x}$. Eodem modo ST, perpendicularis ad $ADT, \sqcap AT. \sqcap AD + DT$. Ergo $ST \sqcap \frac{2a^2}{x} + DT$. Jam $\frac{ST}{DT} \sqcap \frac{AM}{AD} \sqcap \frac{2x}{\frac{2a^2}{x}} \sqcap \frac{x^2}{a^2}$ seu in duplicata ratione x ad a. ergo $ST \sqcap \frac{x^2}{a^2}\ DT \sqcap \frac{2a^2}{x} + DT$. Ergo $x^3DT - a^2xDT \sqcap 2a^4$. et $DT \sqcap \frac{2a^4}{x^3 - a^2x}$ et $AT \sqcap ST \sqcap \frac{2a^4x}{x^2 - a^2}$. et $AS \sqcap \frac{2a^4x\sqrt{2}}{x^2 - a^2}$ quae etiam pendet ideo ex quadratura Hyperbolae, quod tamen et aliunde demonstrari potest,

---

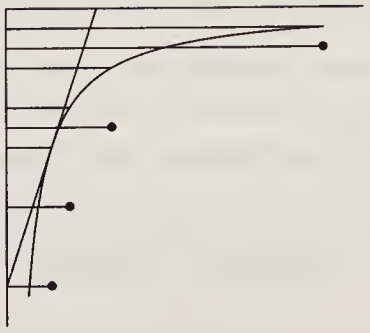
5 *Nebenbetrachtung:* $xy \sqcap a^2$. fiat $\not{x}l \sqcap -\not{x}y$.

1 Curva FGH *L ändert Hrsg.* 2 producta *L ändert Hrsg.* 2 erunt) *(1)* Spatium ei respondens *(2)* Erit ... spatium *(a)* mixtilineum *(b)* qvadrilineum *L* 3 ex *(1)* alibi *(2)* theoremate *L* 7 duplo BAHB *L ändert Hrsg.*

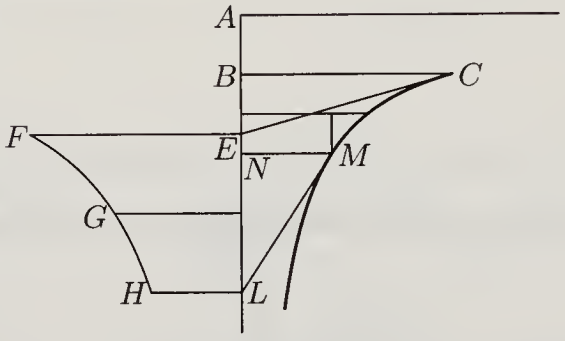
---

2 f. aequale ... *BAHB*: Die Aussage ist falsch. Die Fläche $ECLGE$ ist gleich dem Doppelten der Fläche $BAHB$. Leibniz wiederholt die Aussage unten Z. 6 f. in korrekter Form. 3 theoremate: Gemeint ist der Transmutationssatz. 13 $\frac{2a^4x}{x^2 - a^2}$: Richtig wäre $\frac{2a^2x}{x^2 - a^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler beeinträchtigt die allgemeine Überlegung nicht.

quia si addatur, Hyperbolae commensurabilis, quae est $2a^4\sqrt{2}a$, fiet $\frac{2a^4x\sqrt{2}+2a^5\sqrt{2}}{x^2-a^2}$, et dividendo per $x+a$, fiet: $\frac{2a^4\sqrt{2}}{x-a}$, ad Hyperbolam. Imo video errorem meum, non x seu AC. sed AQ. sumenda est.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

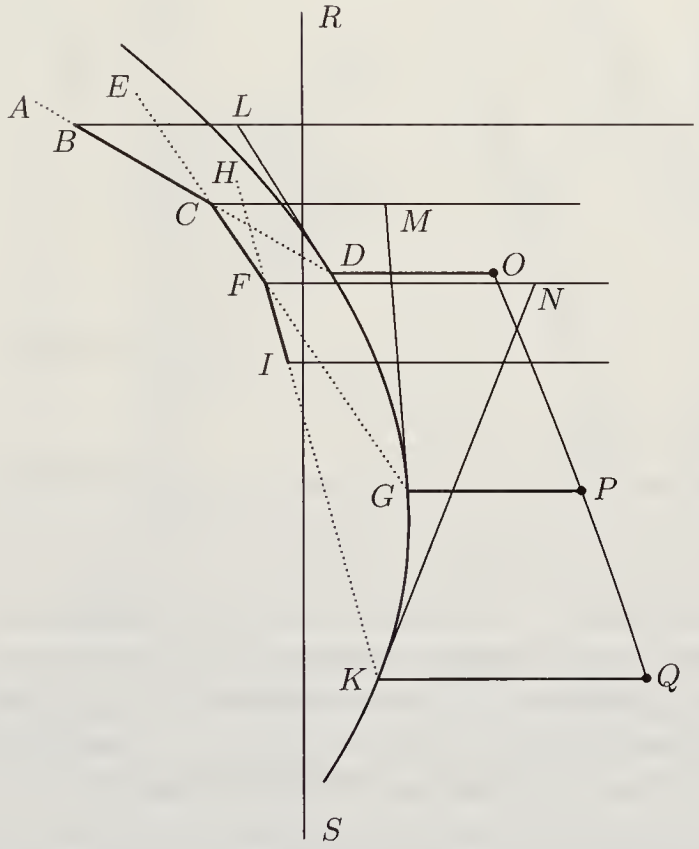
$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y \sqcap \frac{a^2}{x}$. $AE \sqcap 2AB$. $EF \sqcap BC$. erit $FGHLEF \sqcap$ bis $CELMC$. Est $AE \sqcap 2x \sqcap z$. Ergo $x \sqcap \frac{z}{2}$. et $EF \sqcap \frac{a^2}{x} \sqcap \frac{2a^2}{z}$. Unde illud rursus in Hyperbola memorabile[:] quadrilineum $CBNMC$. aequari quadrilineo $CELMC$ duplicato.

2 f. Imo ... est. *erg. L* 8 aeqvari *(1)* tril *(2)* qvadrilineo CELMC duplicato | unde ▽CBE+ *gestr.* | *L*

8 quadrilineum ... duplicato: Die Behauptung ist nicht richtig. Die beiden Flächen $CBNMC$ und $CELMC$ sind gleich.

Theorema illud meum memorabile, jam video non nisi Casum esse unicum ac simplicissimum generalioris, inspice figuram ⊙.

fig. ⊙



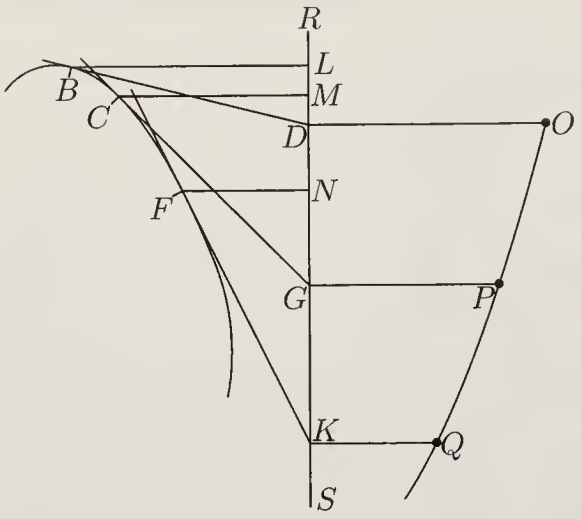
[*Fig. 4*]

Sit curva $BCFI$, cujus latera infinite parva BC, CF, FI. Sit alia curva DGK, cui in punctis $D.G.K.$ tangentes prioris nempe $ABCD, ECFG, HFIK$, occurrant. Jam per puncta $B.C.F.$ transeant rectae indefinitae, BL, CM, FN, et DL, GM, KN. sint tangentes curvae DGK, transferatur BL ad DO, CM ad GP. FN ad KQ. erit spatium

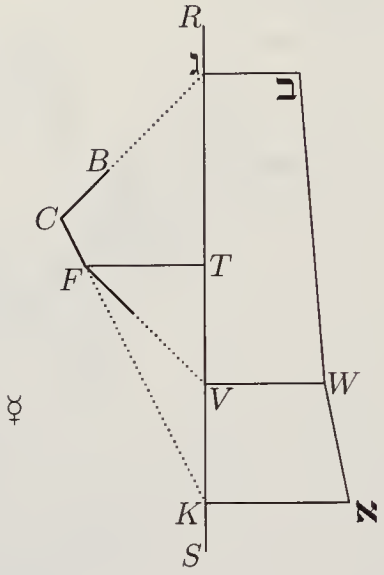
3 *Fig. 4*: Eine skizzenhafte Vorstufe der Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

$DGKQPO$ duplum spatii $BDGKIFCB$. Cujus theorematis casus, quo $BCFI$ est linea recta, dat theorema quod antea consideraveram.

fig. ☽



[*Fig. 5*]

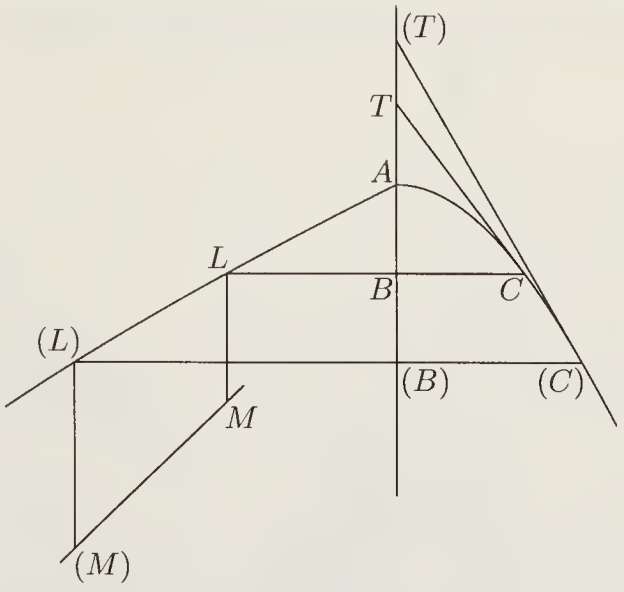


[*Fig. 6*]

Alter casus fingi potest, simplicissimus quo fingitur DGK linea recta, qualis RS. Sit in eam rem alia figura ☽, ubi curva BCF, cujus tangentes BD, CG, FK, occurrunt rectae RS, curvam DGK repraesentanti in punctis D, G, K. et translatis BL, in DO, CM in GP, parallelismo servato, erit spatium $ODKQPO$ spatii $BDKFCB$ duplum. Nec refert quem angulum ad eas faciat recta RS. Nec refert sitne curva BCF concava an convexa, vide fig. ☿. Ubi et illud annotatur, si ordinatae a curva BCF, ad rectam RS ut FT, quae sunt scilicet ad angulos, applicentur eidem ad angulos rectos, sed ibi ubi tangentes curvae BCF rectae RS. occurrunt, ut si transferatur FT. in VW. erit spatium בגKאWב ipsius $BגKFCB$ duplum.

7 BLKFCB *L ändert Hrsg.*

2 antea: S. 250 Z. 6–8. Tatsächlich ergibt sich das dortige Theorem jedoch für den im Folgenden betrachteten Spezialfall, in welchem DGK als gerade Linie angenommen wird. 3 *Fig. 6*: Die hier wiedergegebene Linie FT hat Leibniz in seiner Zeichnung irrtümlich gestrichen. 8–12 Nec refert sitne ... duplum: Leibniz entgeht, dass das Verfahren im Fall des Auftretens einer zu RS parallelen Tangente so nicht anwendbar ist. Der Verlauf der Kurve בWא in Fig. 6 und die Aussage über die Flächenstücke בגKאWב und $BגKFCB$ sind nicht korrekt.



[*Fig. 7*]

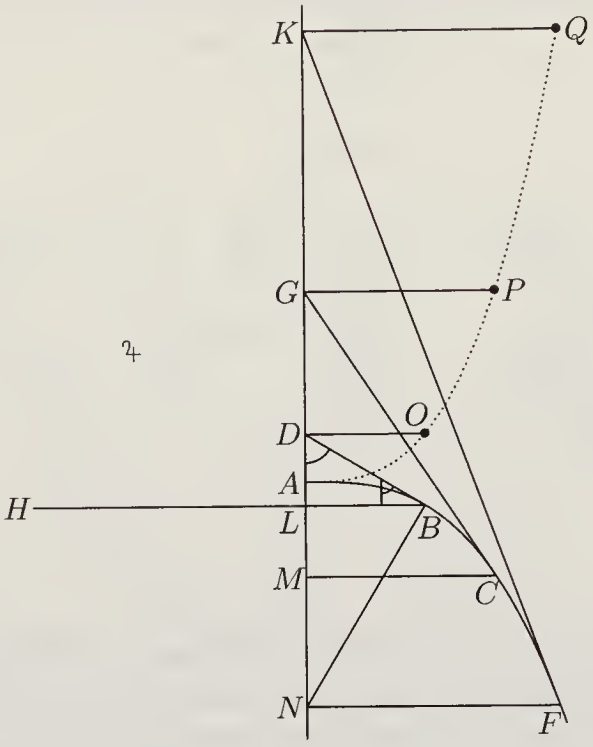
Hinc aliud notabile. Si $C(C)$ sit curva, intervalla tangentium ab ordinatis in axe BT, $(B)(T)$ applicentur axi in $BL, (B)(L)$. et in punctis $L, (L)$ ipsae BC, ipsis BL normaliter applicentur, in $LM, (L)(M)$. erit spatium $LM(M)(L)L$ spatii $CT(T)(C)C$ duplum.

Quae mira satis theoremata sunt et foecunda. Primum in fig. 7. Curva BCF. tangentes BD, CG, FK. et DO, GP, KQ, parallelae et aequales, LB, MC, FN. Erit spatium $ODKQPO$ duplum spatii $FKDBCF$. Sit v. g. $ABCF$ quadrans circuli cujus centrum N. ubi si $NL \sqcap x$. erit LD ad LB, ut LB ad x. sive $LD \sqcap \frac{a^2 - x^2}{x} \sqcap \frac{a^2}{x} - x \sqcap y$. et $ND \sqcap y + x \sqcap \frac{a^2}{x} \sqcap z$. Unde ut obiter dicam ND translatae ad LH sunt ad Hyperbolam simplicissimam et ex $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ characteristico tangentes insistentes arcubus, aequantur

9–254,2 *Daneben:* Vide plura 24 Octob. 1675.

1-4 *Fig. 7 sowie* Hinc ... duplum *erg. L* 11 plura *(1)* 23 *(2)* 24 *L*

4 erit ... duplum: Die Behauptung ist falsch. Die Fläche $LM(M)(L)L$ ist gleich der Summe der Fläche $BC(C)(B)B$ und des Doppelten der Fläche $CT(T)(C)C$. 11 plura 24 Octob. 1675: N. 35, 36 und 37.



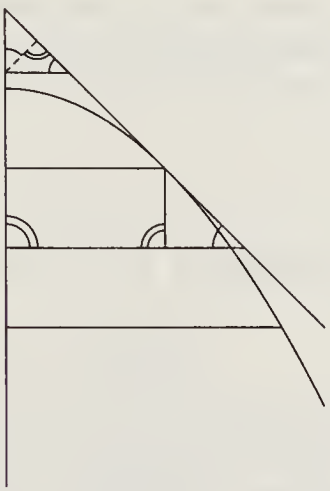
[*Fig. 8*]

portioni hyperbolicae seu secantibus ad axem. Sed hoc obiter. Jam ut pergam si LB, transferatur ad DO, cum sit $\sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$. et $z \sqcap ND \sqcap \frac{a^2}{x}$. erit $x \sqcap \frac{a^2}{z}$. et: $DO \sqcap \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{z^2}} \sqcap \frac{a\sqrt{z^2 - a^2}}{z}$, et curva cujus aequatio: $z^2\omega^2 \sqcap a^2z^2 - a^4$, erit Circulo commensurabilis sive: $\frac{a^4}{a^2 - \omega^2} \sqcap z^2$. sive $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} \sqcap z$. pendet ex circuli quadratura et est illa ipsa cujus spatia angulis homogenea sunt.

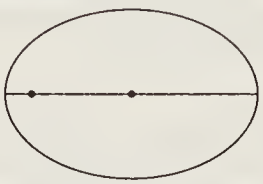
6 *Darunter:* Vide ellipsi 24. Octob.

1 *Fig. 8*: Leibniz hat als charakteristisches Dreieck offensichtlich irrtümlich GCM ausgezeichnet und den Winkel in G markiert. Dies wurde in der Zeichnung korrigiert. 7 ellipsi 24. Octob.: N. 36.

[Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext]



[Fig. 9]



[Fig. 10]

1 Fig. 9 diente möglicherweise als allgemeine Merkfigur für die Diskussion zu Fig. 1. Fig. 10 steht wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Anwendung der Methode auf die Ellipse in N. 36.

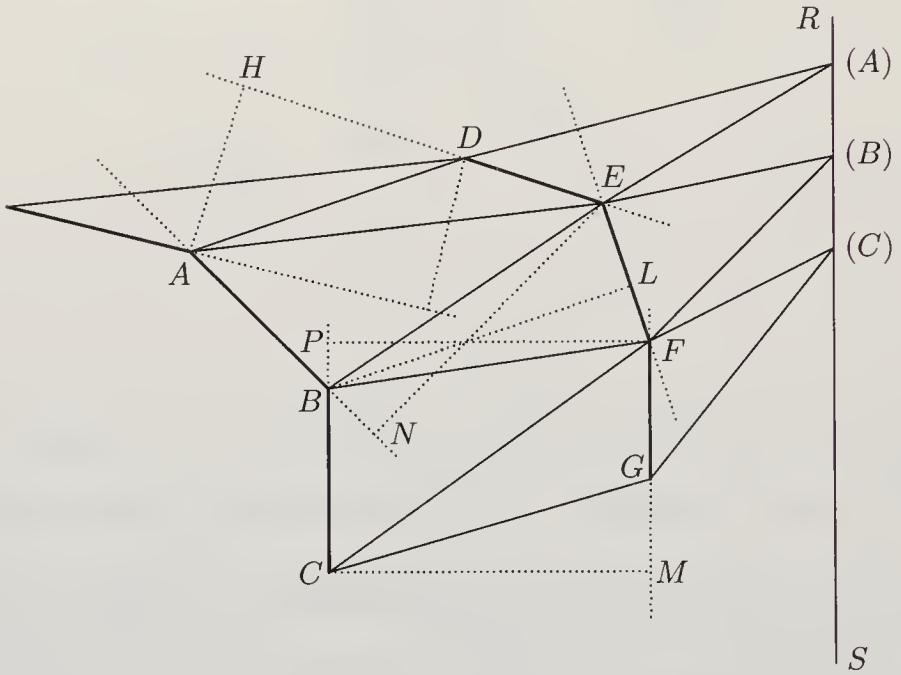
35. THEOREMA TETRAGONISTICUM EX SPATII SECTIONE

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 4. Ca 1/2 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 4 r°. Bl. 4 v° leer. Bl. 4 bildete ursprünglich den oberen Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 36) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 37).
Cc 2, Nr. 1086

24. Octob. 1675.

Theorema tetragonisticum ex spatii sectione



[*Fig. 1*]

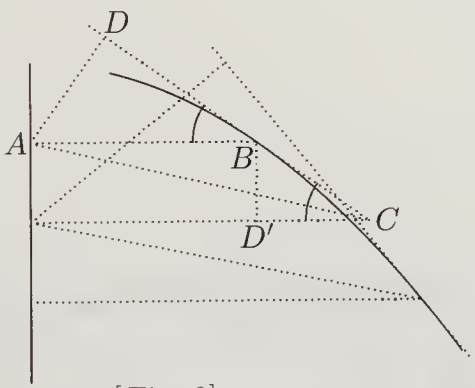
Sint duae lineae, rectae curvaeve una ABC, altera $DEFG$ quocunque inter se situ ac positione ista ut latera illius infinite parva sint AB, BC, hujus DE, EF, a puncto A ducantur rectae AD, AE. a puncto E, rectae EA, (quae jam ducta est) EB, a puncto B rectae BE, BF, a puncto F rectae FB, (quae jam ducta est,) FC. a puncto C rectae CF, CG etc. Et spatium inter ABC, et $DEFG$ interceptum, seu spatium comprehensum duabus lineis ABC, et $DEFG$, et rectis AD, CG aequabitur summae $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ ADE,

7 24. Octob 1675. *erg. L* 8 Theorema ... sectione *erg. L*

$EAB, BEF, [FBC], FCG$. In DE productam, seu tangentem curvae $DEFG$ ad punctum DE, demittatur perpendicularis AH. similiter ad tangentem in EF, perpendicularis BL, et ad tangentem in FG perpendicularis CM. Erit AH in DE, ⊓ [duplo] ADE, et ita in caeteris et ita AH in DE, $+BL$ in EF, $+CM$ in FG, ⊓ duplo $\overline{ADE, +BEF, +CFG}$.

Eodem modo, erit, EN in AB, $+FP$ in BC ⊓ duplo $\overline{EAB, +FBC}$. Et ita summa rectangulorum illorum pariter et horum, aequabitur duplo summae triangulorum illius pariter et hujus lateris, sive illis pariter quae basin in una[,] verticem in altera habent curva, quam quae contra. Itaque summa duarum superficierum curvarum, ex superpositione AH in DE etc. et EN in AB etc. aequabitur duplo Spatio inter duas curvas propositas intercepto, unde nova methodus superficies curvilineas dimetiendi in cylindro, variis curvis terminatas. Semper enim inveniri poterit alia, quae cum data faciat, spatium planum commensurabile.

Quod si in eodem plano AH ipsi DE applices, idemque de caeteris spatium hians relinquetur; quod methodo calculi satis subtilis a me initi, complendum erit. Idemque est si contra ad aliam curvam perpendiculares applicentur. Sed si alterutra linearum, ut ABC, degeneret in rectam RS. tunc recta RS, quomodocunque secta in partes, $(A)(B), (B)(C)$ etc. curvaque etiam quomodocunque secta; patet summam ordinatarum ex curva in rectam perpendicularium, in ipsas $(A)(B), (B)(C)$. junctam perpendicularibus ipsi curvae impositis aequari spatio $DEFG(C)(A)D$.



[*Fig. 2*]

Hinc novum Theorema: Perpendiculares ex punctis axis in tangentes productas, curvae impositae ut AD impositam in BC, aequatur ordinatae ad axem seu AB ad BD', tum, quia BDA et $CD'B$ similia, tum quia AD in BC, aequale duplo $\bigtriangledown^{lo}$ ABC quod a rectangulo ABD' non differt.

4–6 duplo *erg. L dreimal* 18 perpendicularium, *(1)* si modo recta *(a)* aeqv *(b)* in partes aeqvales *(2)* qvae determinata erit, si recta in partes aeqvales divisa *(3)* in *L* 18 junctam *(1)* Superficiei *(2)* momento curvae *(3)* perpendicularibus *L*

27 *Fig. 2*: Leibniz hat in der Vorlage die Bezeichnung D für zwei Punkte verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird in Figur und Text der zweite Punkt mit D' benannt.

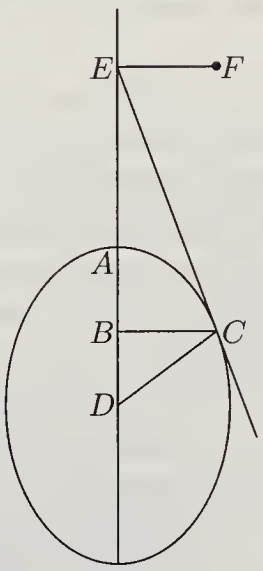
36. DIMENSIO CURVAE ELLIPSIS

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 147. 1 Streifen ca 19,2 x 5,3 cm. 8 Z. auf Bl. 147 r°. Bl. 147 v° leer. Bl. 147 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 35) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 37). Cc 2, Nr. 1085

24 Octob. 1675

Dimensio curvae Ellipsis



[*Fig. 1*]

Ellipsis AC, in qua ABD axis, $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. erit $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. adeoque $2y^2 \sqcap 2al - \frac{2a}{q}xl$. et EB sive $l \sqcap \frac{y^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{2ax - \frac{a}{q}x^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} + x$ eritque $AE \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap z$. eritque $ax \sqcap az - \frac{a}{q}xz$. sive $ax + \frac{a}{q}xz \sqcap az$, sive $x \sqcap \frac{az}{a + \frac{a}{q}z}$. Ergo in $y \sqcap \sqrt{2ax - \frac{a}{q}x^2}$ pro

7 24 Octob. 1675 *erg. L* 8 Dimensio ... Ellipsis *erg. L*

x substituendo ejus valorem, fiet: $EF \sqcap BC \sqcap \omega \sqcap \sqrt{\dfrac{2a^2z}{a+\frac{a}{q}z} - \dfrac{a}{q}\dfrac{a^2z^2}{a^2+2\frac{a^2}{q}z+\frac{a^2}{q^2}z^2}}$, vel:

$\dfrac{\sqrt{2a^3[z] + \textcircled{2}\frac{a^3}{q}z^2\boxed{-\frac{a^3}{q}z^2}}}{a+\frac{a}{q}z}$. Cujus proinde dimensio a quadratura Ellipseos sive Circuli pendet per theorema de quo sub finem 19. Octob.

3 pendet *(1)*. si sumeremus $\mathrm{a} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{z}$ pro una qvantitate $\sqcap$ v, fiet $\omega \sqcap$ *(2)* per L

3 sub ... Octob.: N. 34 S. 253 Z. 5 – S. 254 Z. 6.

37. LOGARITHMI IN HYPERBOLA DEMONSTRATI

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 99. 1 Zettel ca 19,2 x 11,0 cm. 1 S. auf Bl. 99 r°. Bl. 99 v° leer. Bl. 99 bildete ursprünglich den unteren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 35) und LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 36).
Cc 2, Nr. 1087

24 Octob. 1675

Logarithmi in Hyperbola demonstrati.

Logarithmi. Incognitae in exponente

In Hyperbola si abscissae AB, AC, AQ, sint progressionis Geometricae, etiam applicatae BD, CE, QF ejusdem erunt progressionis; ergo et differentiae earum. Caeterum applicatae et abscissae sunt in ratione reciproca, ergo et differentiae earum. Si sint x inter se progressionis geometricae, erunt curvae latera progressionis hujus, $\frac{\sqrt{1x^4 - a^2}}{1x}$.

---

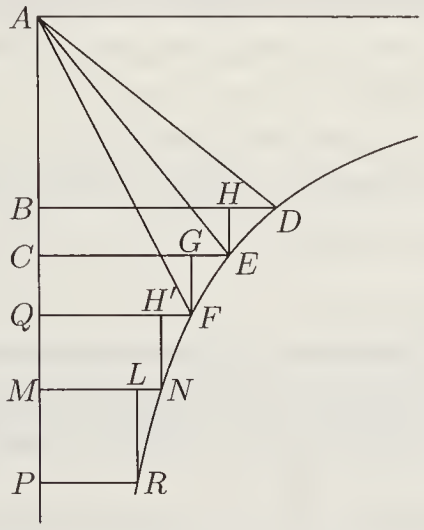
7 *Darüber Nebenbetrachtung:* $\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}} \sqcap \frac{x}{a}$ $\frac{a}{x} \sqcap \frac{a^2}{x^2}$ [*bricht ab*]

8 *Darüber:* Nova hic et quae hactenus frustra quaesiveram[:] Adhiberi potest haec methodus etiam ad obliquas applicatas.

7 24 Octob. 1675 *erg. L* 8 Logarithmi ... demonstrati *erg. L* 9 Logarithmi. ... exponente *erg. L* 10 In *(1)* Ellips *(2)* Hyperbola *L* 12 earum, *(1)* Curva repraesentatur per $\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \sqcap \frac{\sqrt{x^4 - a^2}}{x}$. Item si $x^4 - a^2$ *(2)* si *L*

---

13 curvae latera: Die Ausdrücke für die Größen AD, AE und AF müssten $\frac{\sqrt{x^4 + a^2}}{1x}$, $\frac{\sqrt{16x^4 + a^2}}{2x}$ und $\frac{\sqrt{256x^4 + a^2}}{4x}$ lauten, wenn man $y = \frac{a}{x}$ als Hyperbelgleichung ansetzt. Leibniz übernimmt den Vorzeichenfehler in den folgenden Ausdrücken, was jedoch die allgemeinen Aussagen nicht beeinträchtigt.



[*Fig. 1*]

$\frac{\sqrt{16x^4 - a^2}}{2x}$. $\frac{\sqrt{64x^4 - a^2}}{4x}$ etc. Unde jam transitus habetur ad hujusmodi progressiones quae a Geometricis pendent in quibus ambigua in exponente, ut progressio hoc loco: $\frac{\sqrt{\text{I}^{y\,4} - a^2}}{\text{I}^y}$ cujus summa invenietur per curvam hyperbolicam. Cumque detur superficies hyperbolica ex data Hyperbolae quadratura, hinc ducendo in I^y videtur et hujus seriei $\sqrt{\text{I}^{y\,4} - a^2}$ summa ex data Hyperbolae quadratura haberi.

Ecce transitum admirabilem ad calculos in quos exponentes ingrediuntur. Loco $\text{I}^{y\,4}$ scribi etiam poterit simpliciter: I^{4y}.

Interim[:] Nota in hyperbola rectangulum EHD aequari rectangulo FGE posita progressione continua geometrica rectarum AB, AC, AQ. Hinc jam videtur elegantissime de-

---

4 *Unter* $\frac{\sqrt{\text{I}^{y\,4} - a^2}}{\text{I}^y}$: Imo haec expressio inutilis.

7 *Darüber:* I m o i n u t i l e.

---

1 *Fig. 1*: Leibniz verwendet die Bezeichnung H für zwei verschiedene Punkte. Zur Verdeutlichung wird in Figur und Text einer der Punkte mit H' benannt.

monstrari posse aequalitas spatiorum $DBQFD$ et $QPRFQ$. positis AB, AQ, AP, sive positis BD, QF, PR progressionis continuae. Nam BQ, pariter et QP subdividatur in infinitum, alias medias proportionales continue interponendo, ut CE, MN. erunt DHE, EGF, etc. item FHN, NLR etc. aequales. Imo generaliter si $BC_{[,]}$ CQ. et similes sint infinite parvae, spatiola ipsa sive rectangula infinite parvae latitudinis, $HBCE, GCQF$ erunt inter se aequalia, fient enim ex ductu $\frac{a^2}{x}$ in $\frac{\beta}{a}x$. ponendo $BH \sqcap \frac{a^2}{x}$ et $BC \sqcap \frac{\beta}{a}x$ si β sit quantitas constans infinite parva. Continuando ergo interpositionem, manifestum est totidem spatiola interponi inter B et Q, quot inter Q et P. si AB, AQ, AP continue proportionales. Habemus ergo demonstrationem planam ac facilem pulcherrimi theorematis Gregorii a S. Vincentio, quaeque ad longe subtiliora aditum facit.

Si ordinatae sint x^2y. sive $y \sqcap \frac{a^3}{x^2}$, erunt y in reciproca duplicata: Hinc si x progressionis Geometricae, erunt et y progressionis Geometricae. Hinc si AB, AC, AQ. progressionis Geometricae, erunt spatiola $\frac{a^2\beta}{x}$. Hinc sequetur spatia ordinaria $DBQFD$. $FQPRF$ fore etiam progressionis Geometricae, adeoque abscissis reciproce proportionalia.

4 aeqvales. *(1)* Ergo Spatia *(2)* Differentiae *(3)* Imo L

9 theorematis: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CVIII, S. 585 f.

38. ANALYSIS TETRAGONISTICA EX CENTROBARYCIS

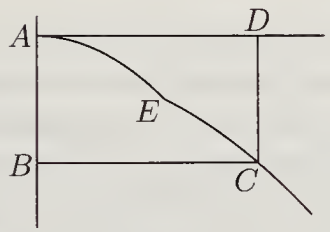
25. und 26. (?) Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Brief*, 1851, S. 344–348; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 117–121; 3. *LBG*, 1899, S. 147–151; 4. (engl. Übers. von 2.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 65–72.
Cc 2, Nr. 1089, 1090

Datierungsgründe: Vermutlich wurde der zweite Teil der Aufzeichnung (ab S. 267 Z. 7) am 26. Oktober 1675 geschrieben; die entsprechende, möglicherweise ergänzte, Datumsangabe in S. 267 Z. 5 f. kann sich sowohl darauf als auch auf das an gleicher Stelle erwähnte Stück N. 39 beziehen.

25. Octob. 1675

Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis



[*Fig. 1*]

Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit $AB \sqcap DC \sqcap x$. et ultima $x \sqcap b$ et $BC \sqcap AD \sqcap y$. et ultima $y \sqcap c$. Patet Omn. yx. ad x. $\overset{(1)}{\sqcap}$ $\frac{b^2c}{2}$„ – Omn. $\frac{x^2}{2}$, ad y. Nam momentum spatii $ABCEA$ ex AD, fit ex rectangulis ex $BC \sqcap y$, in $AB \sqcap x$. At vero momentum spatii $ADCEA$ ex AD, seu complementi prioris, fit ex summa quadratorum DC, sive $\frac{x^2}{2}$, dimidiata; quod momentum, si auferatur a momento totius rectanguli $ABCD$, ex AD, id est a c in Omn. x. sive a $\frac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii

11 *Darunter:* Vid. ejusdem part. 2. alia scheda.

10 *Darüber:* vide eiusdem part. 2. alia scheda *L streicht Hrsg.* 11 Analysis ... Centrobarycis *erg. L* 15 $\overset{(1)}{\sqcap}$ *(1)* omn x^2. ad y. *(2)* Mom *(3)* $\frac{b^2c}{2}$ *L*

20 part. 2.: N. 40.

ABCEA. Unde habetur aequatio quam dixi. Qua reformata sequitur Omn. $\overline{yx,\ \mathrm{ad}\, x} +$ Omn. $\overline{\frac{x^2}{2}\,\mathrm{ad}\, y} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{b^2c}{2}$. adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex.

Sit aequatio curvae naturam exprimens: $ay^2+bx^2+cxy+dx+ey+f \overset{(3)}{\sqcap} 0$. Ponatur $yx \overset{(4)}{\sqcap} z$. fiet $y \overset{(5)}{\sqcap} \frac{z}{x}$. quo valore in aequatione 3. inserto fiet: $a\frac{z^2}{x^2}+bx^2+cx\frac{z}{x}+dx+\frac{ez}{x}+f \overset{(6)}{\sqcap} 0$. sive sublatis fractionibus fiet $az^2+bx^4+cx^2z+dx^3+ezx+fx^2 \overset{(7)}{\sqcap} 0$. Sit rursus $x^2 \overset{(8)}{\sqcap} 2\omega$ eumque valorem inserendo in aeq. 3 fiet: $ay^2+2b\omega+cxy+dx+ey+f \overset{(9)}{\sqcap} 0$. adeoque erit $x \overset{(10)}{\sqcap} \frac{-ay^2-2b\omega-ey-f}{+cy+d} \overset{(11)}{\sqcap} \sqrt{2\omega}$ et quadrando utrobique, fiet:

$$a^2y^4+4aby^2\omega+2aey^3+2afy^2,+4b^2\omega^2+4be\omega y$$
$$+4bf\omega,+e^2y^2+2efy+f^2,-2c^2y^2\omega-4cdy\omega-2d^2\omega \overset{(12)}{\sqcap} 0.$$

Quod si jam curva describatur secundum aequationem 7. itemque alia secundum aequationem 12. ajo quadraturam figurae unius pendere ex quadratura figurae alterius, et contra. Quod si jam loco aequationis 3. aliam sumamus altiorem, seu tertii gradus, rursus duas alias habebimus loco 7. et 12. Et ita continuando dubium non est, quin certam quandam progressionem ipsarum 7, et ipsarum 12 habituri simus, ut sine calculo continuari possit in infinitum, non difficili opera. Ex data autem una alicujus curvae aequatione omnes aliae generali expressione exhiberi possunt; ex quibus compendiosissima eligi potest.

Datis figurae cujusdam momentis ex duabus quibusdam rectis, dataque figurae ejusdem area, habetur ejus centrum gravitatis. Dato autem figurae cujusdam (aut etiam lineae) centro gravitatis et magnitudine habetur ejus momentum ex aliis quibuscunque rectis. Itaque data figurae cujusdam magnitudine, et momento ex duabus quibusdam

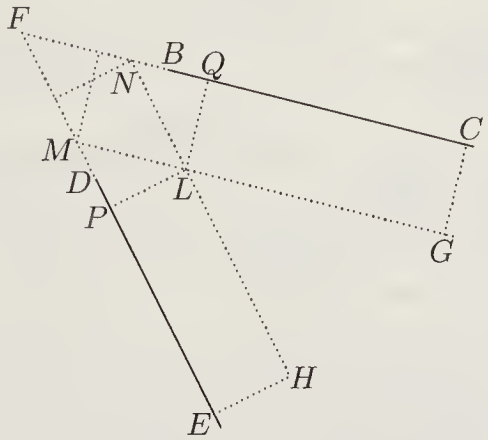
---

1 f. *Am Rande:* Hodie sic exprimo $\int \overline{yxdx} + \int \frac{1}{2}xxdy = \frac{x^2y}{2}$.

20 f. (aut etiam lineae) *erg. L* 23 = *(1)* b^2c *(2)* |x^2y *ändert Hrsg.*| *L*

23 Hodie: Die Anmerkung stammt aus hannoverscher Zeit.

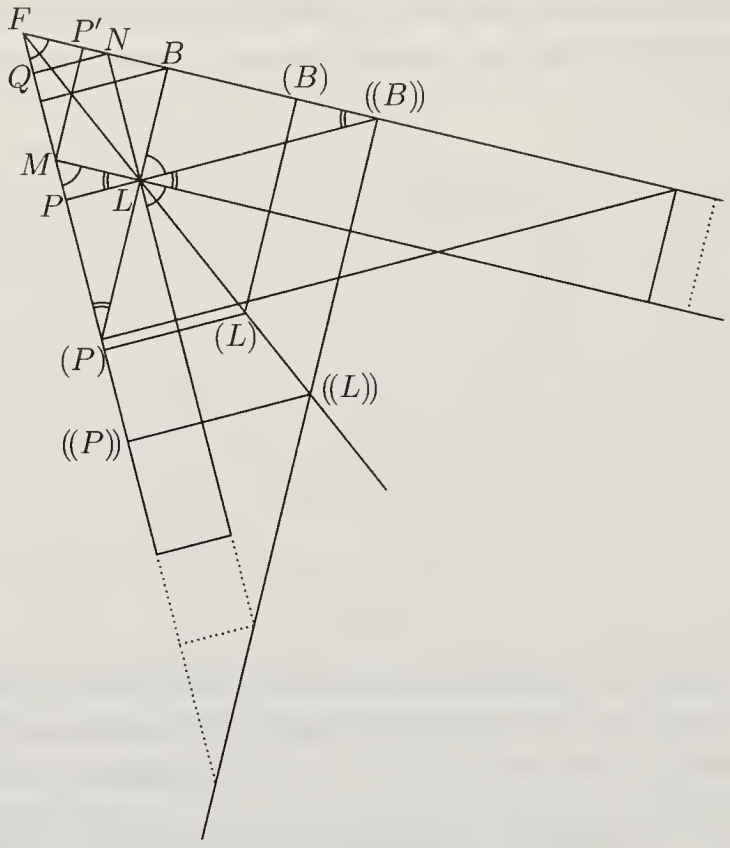
rectis, datur ejus momentum ex qualibet recta data. Hinc etiam multae quadraturae ex quibusdam datis. Momentum autem cujusdam figurae ex recta qualibet etiam generali calculo exprimi potest.



[*Fig. 2*]

Momentum divisum per magnitudinem dat distantiam centri gravitatis ab axe librationis. Sint in eodem plano rectae positione datae sive parallelae sint, sive productae concurrant in F. Momentum ex BC inventum sit ba^2. Momentum ex DE inventum sit ca^2. Area figurae sit v, erit distantia centri gravitatis a recta BC, nempe $CG \sqcap \frac{ba^2}{v}$. et distantia ejus a recta DE, nempe $EH \sqcap \frac{ca^2}{v}$. Ergo CG ad EH est ut b ad c. sive rationem habent datam. Ponatur jam rectam EH in eodem plano manentem percurrere normaliter ipsam DE, et rectam CG percurrere normaliter ipsam BC, et apicem G rectam GM, apicem vero H rectam HN, vestigium scilicet suum relinquere. Necesse est si BC et DE alicubi concurrunt etiam GM et HN alicubi concurrere, sive intra sive extra, F. concurrant in L. Erit angulus HLG aequalis angulo EFC. et angulus PLQ. (ponendo $PL \sqcap EH$ et $LQ \sqcap CG$) erit supplementum ipsius anguli EFC ad duos rectos; adeoque erit datus. Juncta PQ habebitur Triangulum PQL cujus dabitur angulus verticis L ad rationem laterum ad verticem QL, ad LP.

5 f. axe *(1)* aeqvilibrij *(2)* librationis. *(a)* qvod si ergo non sint datae *(b)* sit momen *(c)* Sint L 11 et | ex *streicht Hrsg.* | apicem L 16 f. ad ratio laterum L *ändert Hrsg.* 17–266,2 LP. | Datur angulus MFP. ergo datur MP $\sqcap \psi$. dabitur FP $\sqcap$ dψ. Eodem modo data NQ $\sqcap$ eψ. dabitur FQ $\sqcap$ deψ *gestr.* | Cum L



[*Fig. 3*]

Cum ergo sumta BL vel $(B)(L)$ quantacunqve, angulus BLP semper maneat idem; ac praeterea sit, ut BL ad LP, ita $(B)(L)$ ad $(L)(P)$[;] erit etiam ut BL ad $(B)(L)$, ita LP ad $(L)(P)$ quod contingere patet si etiam FL ipsis proportionalis, seu recta transit per $FL(L)$ etc. Unde cum non dentur plura hic loca, sequitur locum esse rectam. Datis ergo duobus momentis figurae ex duabus rectis non parallelis dabitur linea recta transiens per centrum gravitatis. Quare datis tribus figurae momentis ex tribus axibus librationis qui non sint omnes paralleli inter se, dabitur figurae area et centrum gravitatis. Ecce apicem Centrobarycae. Si dentur duo ejusdem figurae momenta ex duabus rectis inter se parallelis dabitur figurae area, sed non centrum gravitatis.

9 apicem | artis *gestr.* | Centrobarycae L

1 *Fig. 3*: Die Punktbezeichnung P wird von Leibniz in Figur und Text (Lesart zu S. 265 Z. 17 bis Z. 2) doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung erhält einer der beiden Punkte in der Figur die Bezeichnung P'.

Cum sit finis Centrobarycae ex datis momentis invenire dimensiones hinc habemus duo theoremata generalia[:] Si dentur ejusdem figurae momenta duo ex duabus rectis sive axibus librationis parallelis inter se, dabitur ejus magnitudo. Item si ex tribus licet non parallelis. Hinc jam videtur methodus patere ad inveniendas curvas Ellipticam et Hyperbolicam, ex datis Circuli et Hyperbolae quadraturis. De quo Schediasmate peculiari. 26. Octob. 1675.

Alia Analysis Tetragonistica haberi potest, ope Curvarum. Scilicet eadem curva in diversa resolvetur Elementa, prout ad diversas rectas ordinatae referuntur. Unde diversae quoque oriuntur figurae planae curvae propositae Elementis homogeneae, cumque ex data curvae dimensione, inveniantur omnes, sequitur ex data unius figurarum hujusmodi dimensione, etiam caeteras haberi.

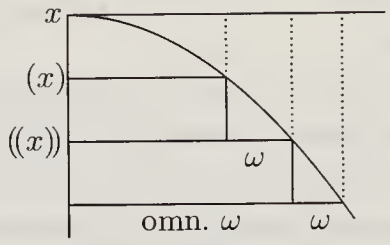
Aliis modis inveniri possunt figurae quae ex alia pendent, si ordinatae figurarum quarum quadratura habetur, aut quarum quadratura ex data habetur adduntur datae. Quemadmodum tractabiliora sunt spatia quam curvae, quoniam pluribus modis secari ac resolvi possunt. Ita tractabiliora sunt solida planis et generatim superficiebus. Itaque ubi methodum qua superficies examinamus ad solida transferemus, multa nova detegemus, et facile saepe demonstrabimus de superficiebus per solida; quae in ipsis superficiebus difficulter habentur. Eleganterque observavit Tschirnhausius pleraque ab Archimede demonstrata, ut quadraturam parabolae, et quae ab his pendent circa sphaeram, conum, Cylindrum, ex sola solidorum r e c t i l i n e o r u m sectione ac compositione manifesta ac palpabilia reddi posse.

Modi varii describendi nova solida. Si ex puncto in sublimi posito recta rigida descendens circa planum ducatur, cujuscunque illud sit figurae[,] Coniformium genera producentur. Nam si planum circuli Circumferentia terminatum sit, orietur Conus rectus vel scalenus. Ita si figura quae pro basi est, seu planum, aliquod centrum habeat, ut Ellipsis, orietur coniforme Ellipticum rectum, si punctum datum centro i m m i n e a t , sin minus, scalenum. Aliud Conoeides aliud coniforme Ellipticum. Si linea rigida ex puncto descendens sit circularis aliave curva; tunc aut puncto vel polo illi ita affixa est, ut non

1 invenire *(1)* qvadraturas *(2)* | dimensionis *ändert Hrsg.* | hinc *L* 5 datis *(1)* Ellipseo *(2)* Circuli *L* 28 aut *(1)* rigida est, et circulus e *(2)* centro *(3)* puncto *L*

5 Schediasmate: N. 39. 18 observavit: vgl. Tschirnhaus' Quadraturmethode in seinem Brief an Leibniz, 27. Januar 1678, III, 2 N. 134 S. 318–330.

nisi unius in eo motus libertatem habeat, scilicet circa quendam axem; et tunc necesse est ut basis seu planum sit circulus, et ut centro ejus immineat punctum vel polus. Sin aliter[,] necesse est ut linea rigida aliorum habeat motuum libertatem, nempe seorsum et deorsum, aliterve, secundum quandam rectam; et tunc semper ubi opus erit ascendet, descendetve, ut semper planum datum sua circumrotatione circa axem attingat. Et hoc est secundum Coniformium genus. Tertium genus est eorum, ubi praeter motum illum duplicem gyrationis cum axe, et exaltationis et descensionis curva sola vel axis solus, vel etiam figura cum axe; rursus alios interim motus exercent, vel ipsum etiam punctum interim movetur.



[*Fig. 4*]

Aliud: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem, aequantur complemento summae terminorum sive: Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum.

Sive omn. $\overline{x\omega}$ ⊓ ult. $x, \overline{\text{omn.}\,\omega},, -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\omega}$. Sit $x\omega \sqcap az$. fiet: $\omega \sqcap \frac{az}{x}$. fiet omn. $\overline{az}$ ⊓ ult. $x\,\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x}}$. Ergo, omn. $\frac{\overline{az}}{x}$ ⊓ ult. x. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}}$. Quo valore in aeq. praecedenti inserto fiet:

omn. $\overline{az} \sqcap$ ult. $x^2\,\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}} -$ ult. $x, \overline{\text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}}} -$ omn. $\overline{\text{ult.}\,x.\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}} - \overline{\text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}}}$.

Et ita iri potest in infinitum.

omn. $\frac{a}{x} \sqcap$ ult. x. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x^2}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x^2}}$. Et omn. $a \sqcap$ ult. x. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x}}$. Quod postremum theorema exhibet summam logarithmorum ex data Hyperbolae quadratura.

3 libertatem, *(1)* | v. g. *streicht Hrsg.* | seorsum et deorsum *(2)* nempe *L*

Numeros abscissas repraesentantes soleo appellare ordinales, quia ordinem terminorum sive ordinatarum exhibent.

Si quadrato ordinatae figurae quadrabilis addas quadratum rectae constantis, radices summae duorum quadratorum repraesentabunt curvam quadratricis. Quod si radices summae duorum quadratorum dent figuram quadrabilem, etiam curva erit rectificabilis.

Datae progressionis curvam describere. A Termino progressionis quadrato auferatur quadratum quantitatis constantis; Radicum ex duobus quadratis figura quadratrix descripta curvam habebit quaesitam. Curva rectificabilis non ideo est descriptibilis. Descriptae curvae elementa pluribus diversis modis enuntiari possunt. Comparentur diversi modi enuntiandi elementa curvae cum diversis modis enuntiandi figuram ei homogeneam, prout ad diversa refertur. Imo et solidum curvae homogeneum adhuc pluribus modis enuntiari potest; et superficies homogenea curvae vel figurae.

4 qvadratricis. *(1)* itaqve si descriptio curvae *(2)* qvod *L* 10 enuntiandi *(1)* curvam ei ho *(2)* figuram *L*

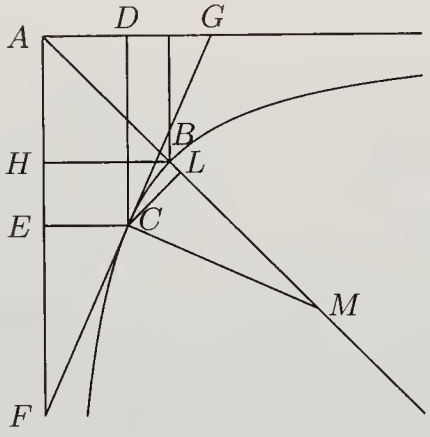
39. INQUISITIO DE DIMENSIONE CURVARUM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE

26. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 144 r° u. 145 v° unten spätere Zusätze, durch Striche abgetrennt (S. 273 Z. 4–12).
Cc 2, Nr. 1091

26 Octob. 1675.

Inquisitio de dimensione Curvarum
Ellipseos et Hyperbolae.



[*Fig. 1*]

Sit Hyperbolae aequilaterae rectangulae centrum A, vertex B. punctum in ea quodlibet C. Unde in duas asymptotos ADG, AEF, erunt ordinatae $DC. EC.$ abscissae AD, AE, tangens curvae est $FCG.$ et $DG \sqcap AD \sqcap EC.$ et $EF \sqcap AE \sqcap DC.$

Sit $AE \sqcap y$, erit $EC \sqcap \frac{b^2}{y}$. ponendo $AH \sqcap b \sqcap HB.$

Differentia inter duas ordinatas proximas, erit $\frac{b^2}{y} - \frac{b^2}{y+\beta}$ sive $\frac{\boxed{b^2y - b^2y} + b^2\beta}{y^2 + y\beta}$. et Elementum

---

18 *Nebenbetrachtungen:* $\frac{b^2}{y} \sqcap \int \frac{b^2}{y^2}$. $\frac{ab^2}{y^2} - \frac{ab^2}{y^2 + 2y\beta + \beta^2} \sqcap \frac{2y\beta ab^2}{y^4} \sqcap \frac{2}{y^3}$.

12 asymptotos *(1)* AD, AE *(2)* | ADF, AEG *ändert Hrsg.* |, erunt *L*

curvae ad asymptoton relatae erit $\sqrt{\frac{b^2}{y^2}+1} \sqcap \omega$. sive $\frac{\sqrt{b^2+y^2}}{y} \sqcap \omega$. Cujus rectangulum in distantiam ab asymptoto seu momentum erit $\sqrt{b^2+y^2}$ quae est ad Hyperbolam, habetur ergo momentum Curvae Hyperbolicae rectangulae aequilaterae, ex asymptoto una, ac proinde et ex altera cum par sit ratio, ex data Quadratura Hyperbolae. Cum ergo habeamus momentum Curvae Hyperbolicae ex duabus rectis, habebimus rectam unam per ejus centrum gravitatis transeuntem; (ex data scilicet Hyperbolae quadratura.) Quare ad curvae ipsius dimensionem inveniendam, tantum opus est, ut ad huc unum ejus momentum ex alia quadam recta inveniamus. Itaque in axem ABL ducatur ordinata CL. Sit $AB \sqcap a$. et $BL \sqcap x$. erit $CL \sqcap \sqrt{2ax+x^2}$. et $LM \sqcap a+x$. Ergo $CM^2 \sqcap a^2+2ax+x^2+2ax+x^2$ et $\frac{CM}{\sqrt{2}} \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{2}+2ax+x^2}$. et pro $a^2+2ax+x^2$ ponendo v^2, fiet $\frac{CM}{\sqrt{2}} \sqcap \sqrt{v^2-\frac{a^2}{2}}$ quae aequatio est etiam ad Hyperbolam. Earum autem summa exhibet momentum Curvae Hyperbolae ex axe. Habemus ergo momentum portionis Curvae Hyperbolicae datae ut BC, ex tribus rectis, nempe AG, AF, AL, duabus scilicet asymptotis, et axe. Omnia ex quadratura Hyperbolae data. Ergo ex data quadratura Hyperbolae datur dimensio Curvae Hyperbolae aequilaterae rectangulae et ejus centrum gravitatis per schediasma *Analyseos tetragonisticae* 25 Octob. 1675. Hinc omnia

---

1 *Dazu am Rande:* Err⟨o⟩r. Potius Elementum Hyp. Curvae est $\frac{\sqrt{b^4+y^4}}{y^2}$.

1 f. Cuius | rectangulum in *erg.* | distantiam | a vertice *ändert Hrsg.* seu momentum *erg.* | erit *L* 15 f. et ... 1675 *erg. L*

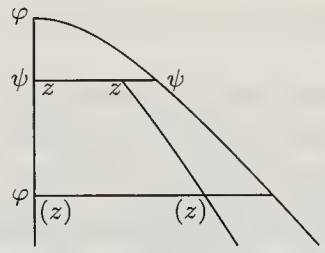
---

1 $\sqrt{\frac{b^2}{y^2}+1}$: Richtig wäre $\sqrt{\frac{b^4}{y^4}+1}$. Leibniz erkennt den Fehler nachträglich, notiert am Rand den richtigen Wert und zieht die Folgerung in S. 272 Z. 2 f. in Zweifel. Er korrigiert jedoch nicht die Rechnung und die daraus abgeleitete Folgerung in Z. 14–16, die Rektifikation und die Berechnung des Schwerpunkts des Bogens der Hyperbel ließen sich auf die Quadratur zurückführen. 16 schediasma: vgl. N. 38 S. 267 Z. 1–6.

alia curvae Hyperbolicae aequilaterae momenta ex sola Hyperbolae quadratura dantur.

Hinc sequitur[:] Cujuslibet alterius Curvae Hyperbolicae dimensionem haberi posse. Quod sic ostendo[:] Elementum curvae Hyperbolicae ad axem relatae est $\sqrt{\left.\begin{matrix}1\\+\frac{a}{q}\end{matrix}\right\}+\frac{a^2}{2ax+\frac{a}{q}x^2}}$. Posito Portionem ab axe inde a vertice abscissam esse x et ordinatam ad axem esse $\sqrt{2ax+\frac{a}{q}x^2}$.

Quod si ergo latus rectum et transversum sint aequalia fiet: $\sqrt{2+\frac{a^2}{2ax+x^2}}$ ⊓ ψ valor Elementorum curvae. Quorum datur summa ex data Hyperbolae Quadratura, ut jam ostendi.



[*Fig. 2*]

Multiplicetur Elementum curvae Hyperbolae aequilaterae per $\sqrt{\frac{q}{a}}$, fiet $\sqrt{\frac{2q}{a}+\frac{a^2}{\frac{2a^2x}{q}+\frac{ax^2}{q}}}$ ⊓ z. Videndum an inde fiat Elementum alterius curvae Hyperbolicae iniqui-laterae. Neque vero necesse est, ut ordinata ejusmodi, z, sit ad eandem abscissam x, sed pro x sumi potest φ ⊓ $\frac{d}{a}x$ seu datae constantis rationis ad x. Nec ideo minus habebitur ratio figurae seu omnium z, vel (z) ad omnes ψ. Nam et differentiae abscissarum erunt in eadem ratione, ergo et rectangula omnia infinite parvae latitudinis sub ipsis et ordinatis facta, erunt inter se in composita ratione ex 1.

---

2 *Zu* Hinc sequitur: Error forte.

1f. dantur. | At vero inventum est ab Hugenio, | qvin etiam a *(1)* Gregorio et *(2)* Wallisio et Gregorio *erg.* | momentum curvae Hyperbolicae ex *(a)* basi *(b)* axe transverso pendere a qvadratura Ellipseos sive Circuli; qvo posito seqvitur: ex data qvadratura Hyperbolae, etiam Circuli qvadraturam haberi; ac proinde, ex data *(aa)* ⟨---⟩ *(bb)* sectione rationis, etiam anguli sectionem inveniri posse *gestr.* | Hinc *L*

---

8 ostendi: s. o. Erl. zu S. 271 Z. 1. 18 inventum: Die von Leibniz als falsch erkannte und daher gestrichene Aussage bezieht sich vermutlich auf Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 75–77 (*HO* XVIII S. 214–219), J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, S. 92–96, J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 104 (*WO* I S. 559).

ad $\sqrt{\frac{q}{a}}$. et ex d. ad a. Itaque scribemus: $\sqrt{\frac{2q}{a} + \frac{a^2}{\frac{2a^3}{qd}\varphi + \frac{a^3}{qd^2}\varphi^2}}$ ⊓ (z) quam conferendo Elementis curvae Hyperbolicae datae nempe $\sqrt{\frac{1}{+\frac{r}{s}} + \frac{r^2}{2r\varphi + \frac{r}{s}\varphi^2}}$ conferendo inveniemus

---

1 *Zusatz auf Bl. 144 r°, durch Strich abgetrennt:*

$2b + \frac{a^2 b}{2ax + x^2}$ conferatur cum

$\begin{matrix}+d \\ +\frac{dc}{q}\end{matrix} + \frac{d^3}{2dx + \frac{d}{q}x^2}$ vel cum

$\begin{matrix}+d \\ +\frac{dc}{q}\end{matrix} + \frac{d^2 q}{2qx + x^2}$. Conferendo erit et q aequ. a. Ergo $d^2 q$ seu $d^2 a$ erit aequ. $q^2 b$ seu d^2 aequ. qb seu b aequ. $\frac{d^2}{q}$. Denique $2b$ aequ. $d + \frac{dc}{q}$. Ergo $\frac{d}{q}$ aequ. $1 + \frac{c}{q}$ seu d aequ. $q + c$. Quo casu habetur dimensio curvae.

Zusatz auf Bl. 145 v°, durch Strich abgetrennt:

Aequatio ad curvae conicae Elementum z aequ. $\sqrt{\frac{q^2 \boxed{-aq + aq} \mp 1\, y^2}{\mp q^2 \mp y^2}}$. $\begin{matrix}\\ +\frac{a}{q}..\end{matrix}$ ∓ in Hyp. + in Circ. et Ell. −. Sit in Hyp. aequilatera multiplicato elemento per b^2: v aequ. $\sqrt{\frac{br^2 + 2by^2}{-r^2 + y^2}}$. Conferendum priori, fiet: Imo res non procedit.

2 Ellipticae *L ändert Hrsg.*

---

7 Ergo $\frac{d}{q}$: Richtig wären $\frac{2d}{q} = 1 + \frac{c}{q}$ und damit $2d = q + c$. 10 z aequ.: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste im Zähler des Bruches unter der Wurzel $\mp q^2$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter und bricht dann ab. 11 per b^2: Tatsächlich multipliziert Leibniz mit $\sqrt{b}$.

arbitrarias $q.\,a.\,d.$ Fiet enim $\frac{q}{a} \sqcap 2 + \frac{2r}{s} \cdot \frac{1}{\frac{2a^5}{qd}\varphi + \frac{a^5}{qd^2}\varphi^2} \sqcap \frac{1}{2r^3\varphi + \frac{r^3}{s}\varphi^2}$ et conferendo $r^3 \sqcap \frac{a^5}{qd}$, sive $a^5 \sqcap r^3 qd.$ et rursus $r^3 \sqcap \frac{a^5 s}{qd^2} \sqcap \frac{a^5}{qd}$. Ergo $\frac{s}{d} \sqcap 1$. Ergo habetur $d.$ Ergo habetur $r^3 \sqcap \frac{a^5}{qd}$. Ergo habebitur valor ipsius a^4 absolutus. Adeoque inventis arbitrariis habebitur dimensio curvae Hyperbolicae cujusque. Et si pro $\langle r \rangle$ ponatur $\langle R \rangle a$, habebitur valor absolutus ipsius a.

Nunc ad Ellipsin transeamus. Generaliter Elementum curvae tam Hyperbolae quam Ellipseos est $\sqrt{\frac{1}{\mp\frac{a}{q}} + \frac{a^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}} \sqcap z$. Pro x ponatur $\gamma y + \delta q$ sumendo $\gamma.$ et $\delta.$ pro signis. Fiet $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap + 2a\gamma\ y + 2a\delta q \mp \frac{a}{q}y^2 \mp \frac{2a}{q}\gamma\delta q\, y \mp \frac{a}{q}q^2$. Debet autem esse $\not{2}\not{\phi}\not{\gamma}\not{y} \mp \frac{\not{2}\not{\phi}}{\not{q}}\not{\gamma}\not{\delta}\not{q}\not{y} \sqcap 0.$

2 ergo *(1)* $\frac{as}{qd}$ *(2)* $\frac{as}{d} \sqcap 1$ ergo $\frac{a}{d} \sqcap \frac{1}{s}$ et $r^3 \sqcap \frac{1}{s} \frown \boxed{\frac{a^4}{q} \sqcap \frac{a}{q} \frown a^3}\ \frac{1}{2 + \frac{2r}{s}} \frown a^3 \sqcap \frac{1}{2s + 2r} a^3$. et $\frac{r^3}{a^3} \sqcap \frac{1}{2s + 2r}$. Habetur ergo a. qvia s. et r. datae. *(a)* Ergo et *(b)* (per inventionem duarum mediarum proportionalium), ergo et q et d. *(3)* $\frac{s}{d} \sqcap 1$ *L* 2 habetur | s. *ändert Hrsg.* | Ergo *L* 6 tam | Circuli *ändert Hrsg.* | qvam *L* 7 $\sqcap$ z *(1)* sive pro x ponendo *(a)* ∓y ∓ q fiet: *(b)* ∓y *(c)* pro *(d)* ∓y ∓ q *(e)* pro x ponendo ∓y ∓ q tunc pro 2ax *(aa)* fiet *(bb)* $\mp\frac{a}{q}x^2$, fiet: *(aaa)* $y^2 \mp$ *(bbb)* $\mp$ 2a y ∓ 2aq ,, *(aaaa)* $\mp\frac{a}{q} \mp \frac{2aq}{q}y \mp \frac{a}{q}q^2$ *(bbbb)* $\mp\frac{a}{q}y^2$ sive fiet $\mp\frac{a}{q}$ *(aaaaa)* $\mp\frac{a}{q}$ *(bbbbb)* $\mp\frac{a}{q}y^2$ sive Elementum Ellipseos erit: $\mp\frac{1}{\frac{a}{q}}$ *(2)* pro *L*

---

1 $2 + \frac{2r}{s}$: Richtig wäre $\frac{1}{2} + \frac{r}{2s}$. In der folgenden Gleichung multipliziert Leibniz in den Nennern der Brüche mit a^2 bzw. r^2 statt zu dividieren.

Erit ergo $\delta \sqcap \mp 1$. adeoque $x \sqcap (\mp)y \mp q$, fietque $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap \mp aq \mp \frac{a}{q}y^2$. Adeoque erit $z \sqcap \sqrt{\frac{1}{\mp\frac{a}{q}} + \frac{aq}{\mp q^2 \mp y^2}}$. Quod si jam $q \sqcap a$ et $\mp 1 \sqcap -1$ ut in Circulo, erit $z \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{a^2-y^2}} \sqcap \sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}$. Eodem modo $\frac{aq}{+q^2-y^2} \sqcap \frac{a}{q} + \frac{\frac{a}{q}y^2}{q^2-y^2}$. Multiplicetur $\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}$ elementum curvae circuli per $\sqrt{\frac{d}{e}}$ fiet $\sqrt{\frac{d}{e} + \frac{\frac{d}{e}y^2}{b^2-y^2}}$. Ordinata quae fiet erit ad aliam figuram proportionalem Elementis curvae Circuli.

Rursus pro y ponatur $\frac{f}{a}\varphi$. fiet: $\sqrt{\frac{d}{e} + \frac{\frac{df}{ae}y^2}{b^2 - \frac{f^2}{a^2}\varphi^2}}$ sive $\sqrt{\frac{d}{e} + \frac{\frac{da}{fe}y^2}{\frac{b^2a^2}{f^2} - y^2}}$. Quarum ordinatarum habentur summae.

Sed haec ut demonstrentur sit theorema:

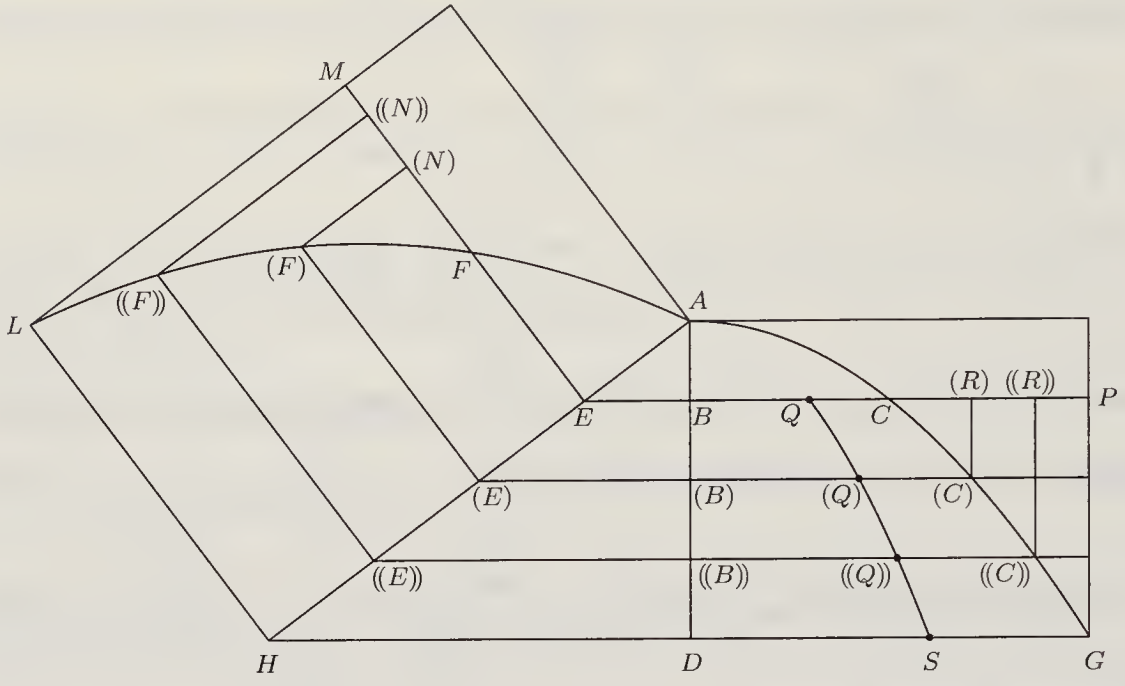
Theorema.

Si spatium comprehensum sit axe BD duabus ordinatis BC, DG et curva qualibet $C(C)G$ et axem si opus est productum alicubi secet in A alia recta AH, producanturque si opus ordinatae $CB, (C)(B)$, etc. GD dum ipsi AH occurrant in punctis $E, (E)$ etc. H et ex punctis $E, (E), H$ applicatae $EF, (E)(F)$ etc. HL ipsis $BC, (B)(C)$, DG aequales, ad rectam AH. velut axem ordinentur, et curva $F(F)L$ per earum extrema ducatur, erit spatium ipsa EH velut axe, duabus ordinatis extremis EF, HL, et curva $F(F)L$ comprehensum; ad spatium prius $CBDG(C)C$ ut est recta AE ad rectam AB.

4 $\sqrt{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}} + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2-\mathrm{y}^2}}$. *(1)* Prodibit a *(2)* qvod fiet ad aliam curvam Ellip *(3)* fiet *(4)* ordinata L

10 comprehensum *(1)* rectis B((B)) | BC, ((B))((C)) *erg.* | Curva C(C)((C)) *(2)* sit L 15 f. curva | EF(F)L *ändert Hrsg.* | comprehensum L 16–276,2 AB. *(1)* qvod ita demonstro *(2)* Sive L

6 fiet: Leibniz führt die Ersetzung von y durch $\frac{f}{a}\varphi$ nur teilweise und fehlerhaft durch.



[*Fig. 3*]

Sive quod idem est, si iisdem positis duarum figurarum ordinatis, abscissae sint proportionales, erunt figurae in ratione abscissarum.

Compleantur rectangula $EHLM$ et $BDGP$. quae erunt etiam in ratione abscissarum EH, BD, sive $E(E), B(B)$. Quod si jam ostendam duorum spatiorum complementa ad sua rectangula circumscripta, esse his duobus rectangulis, sive quod idem est abscissis inter se respondentibus proportionalia, sive esse $FMLF$ ad $CPGC$, ut rectang. EL ad rectang. BG, sive ut recta EH ad BD. sequitur ipsa spatia eodem modo se habere. Quod dixi de complementis sic ostendo: Ex punctis (C). $((C))$ etc. demittantur in CP. ordinatae $(C)(R)$ $((C)((R))$ etc. et ex punctis $(F)((F))$ etc. in FM, ordinatae $(F)(N)$ $((F)((N))$ etc.

3 f. abscissarum. *(1)* Compleatur rectangulum *(2)* Compleantur rectangula *(a)* AHLN et ADGP *(b)* EHLM et BDGP. *(aa)* Et complementa duorum spatiorum Qvadrilineorum erunt *(aaa)* qvinqve-lineis qvinqve *(bbb)* qvinqve-linea qvinqve rectis et una curva comprehensa, FEANLE, CBHPGC, ipsorum spatiorum complementa ad rectangula. *(bb)* qvae *L* 5 ostendam *(1)* spatiorum ipsorum complementa ad rectangula circumscripta, esse rectangulis sive *(2)* duorum *L*

1 *Fig. 3*: Leibniz hatte ursprünglich die unbezeichneten Eckpunkte der durch AH und HL bzw. durch AD und DG aufgespannten Rechtecke mit N bzw. P bezeichnet; vgl. die Stufe *(2)* der Variante zu Z. 3 f.

Patet abscissis $B(R)$ et $E(N)$ (: id est $(B)(C)$ et $(E)(F)$:) semper existentibus aequalibus ordinatas $(C)(R)$ ad $(F)(N)$ esse in ratione abscissarum (quippe illis aequalium) $B(B)$ ad $E(E)$ id est ut BD ad EH. sive ut rectangulum BG ad EL. At spatia quorum abscissae eaedem, ordinatae autem proportionales, sunt in ratione ordinatarum ut constat. Ergo complementa $CPGC, FMLF$, adeoque et spatia ipsa $CBDGC$, $FEHLF$ rectangulis BG, EL, id est suis abscissis $B(B), E(E)$ proportionalia sunt.

Hinc sequitur Corollarium: Si figurarum duarum pariter et abscissae abscissis, et ordinatae ordinatis sint proportionales erunt figurae in ratione composita ordinatarum et abscissarum. Ut si in ipsis $BC, (B)(C)$ etc. usque ad DG sumantur puncta Q. (Q) etc. usque ad S. ita ut sint BQ ad BC, ut $(B)(Q)$ ad $(B)(C)$ usque ad DS ad DG perpetuo, erit spatium $QBDSQ$ ad spatium $FEHLF$, in composita ratione DS ad HL et BD ad EH. id est erunt duo spatia, ut rectangula circumscripta BDS, EHL.

Hinc si jam ponamus BQ. $(B)(Q)$ etc. $\sqcap$ z repraesentare elementa curvae Circuli, et esse $z \sqcap \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2 - y^2}}$ multiplicetur z per $\sqrt{\frac{c}{a}}$: id est fiat alia ψ. quae sit ad z, ut $\sqrt{c}$ est ad $\sqrt{a}$, quae ponatur esse ratio DG ad $DS_{[,]}$ erit BC, vel $(B)(C)$ etc. sive $\psi \sqcap \sqrt{\frac{\frac{c}{a}y^2}{b^2 - y^2} + \frac{c}{a}}$. ponendo scilicet $B(B), B(((B)))$, etc. esse y.

Jam si eaedem rectae ψ sive $BC, (B)(C), (((B)))(((C)))$ etc. transferantur in EF, $(E)(F), (((E)))(((F)))$ etc. et applicentur ad abscissas $E(E), E(((E)))$ etc. ipsis $B(B), B(((B)))$ etc. sive ipsis y proportionales, et rationem earum sive EH ad BD, esse ut d ad a; tunc appellando $E(E), \omega$, erit $\omega \sqcap \frac{d}{a}y$. et vicissim $y \sqcap \frac{a\omega}{d}$. Ut ergo ipsarum EF sive $(E)(F)$ etc., sive ψ. relationem habeamus ad ipsas $E(E), E(((E)))$ sive ω, hinc pro y in valore ipsius ψ, substituendo ejus valorem inventum, $\frac{a\omega}{d}$. fiet:

$$\psi \sqcap \sqrt{\frac{\frac{ca}{d^2}\omega^2}{b^2 - \frac{a^2}{d^2}\omega^2} + \frac{c}{a}}. \text{ sive } \psi \sqcap \sqrt{\frac{\frac{c}{a}\omega^2}{\frac{b^2 d^2}{a^2} - \omega^2} + \frac{c}{a}}.$$

1 Patet *(1)* ordinatis E(N), E(((N))) ita et *(2)* abscissis L 2 ratione *(1)* rectangulorum *(2)* abscissarum L 17 f. transferantur *(1)* ad abscissas *(2)* in EF, | (E)(F), (((E)))(((F))) *erg.* | etc. *(a)* ad *(b)* et L

Sed ex Ellipticae curvae Elementis fiet: $\sqrt{1+\frac{\frac{a}{-}\omega^2}{q}}{q^2-\omega^2}$. Quae duo video comparari non posse nisi sit $a \sqcap q$. Nondum ergo quicquam pro dimensione Curvae Ellipseos actum est.

Datur ergo summa harum $z \sqcap \sqrt{1+\frac{\omega^2}{e^2-\omega^2}}$ (ponendo $\frac{bd}{a} \sqcap e$). At nondum habemus summam harum: $\varphi \sqcap \sqrt{1+\frac{\frac{a}{-}\omega^2}{q}}{q^2-\omega^2}$. Habemus talium ordinatarum φ. momentum seu quadrata ex data Hyperbolae quadratura, seu summam omnium: $1+\frac{\frac{a}{-}\omega^2}{q}}{q^2-\omega^2} \sqcap \varphi^2$. Hoc amplius si reducamus valorem ad aequationem $q^2 - \underset{+\frac{a}{q}\ ..}{\omega^2} \sqcap q^2\varphi^2 - \omega^2\varphi^2$. fiet $\omega^2 \sqcap \frac{+q^2\varphi^2 - q^2}{+\frac{a}{q} - 1 + \varphi^2}$ quorum summa, adeoque aliud figurae curvae Ellipticae homogeneae momentum datur ex Circuli quadratura si $\frac{a}{q} \sqcap 1$. ex Hyperbolae quadratura si $\frac{a}{q} \sqcap 1$. et $\omega \sqcap q\sqrt{\frac{\varphi^2-1}{\varphi^2-1,+\frac{a}{q}}}$ sive $\omega \sqcap q\sqrt{1-\frac{1}{\varphi^2-1,+\frac{a}{q}}}$, sive $\omega \sqcap q\sqrt{+1+\frac{1}{\underbrace{1-\frac{a}{q}}, -\varphi^2}}$.

3 ergo *(1)* dimensio spatii: *(2)* summa *L* 4 summam | horum *ändert Hrsg.* |: *(1)* z *(2)* φ *L*

5 data *(1)* Circuli *(2)* Hyperbolae *L* 9–279,1 $\omega \sqcap q\sqrt{+1+\frac{1}{\underbrace{1-\frac{a}{q}}, -\varphi^2}}$ *(1)* Qvi forma | ipsarum ω *gestr.* |, cum forma ipsarum *(2)* qvae alia est form *(3)* Si faciamus $\varphi \sqcap w + \sqrt{\frac{+1}{-\frac{a}{q}}}$ fiet aeqvatio: $\boxed{q^2}\boxed{\underset{+\frac{a}{q}\ ..}{-\omega^2}} \sqcap q^2w^2 + \underset{\sqrt{-\frac{a}{q}}}{2q\ w\ \boxed{+q^2}}, -\omega^2w^2 - 2\omega^2w\boxed{\underset{+\frac{a}{q}\ ..}{-\omega^2}}$ *(4)* Operae *L*

9 sive ω: Leibniz vergisst bei der folgenden Umformung den Faktor $\frac{a}{q}$ im Zähler des Bruches unter der Wurzel. Dieser und weitere Fehler beeinträchtigen die Überlegung bis S. 279 Z. 7.

Operae pretium est figurae Curvae Ellipticae homogeneae invenire tangentem.

$\frac{2a}{q}\omega l + 2\varphi^2\omega l \sqcap 2q^2\varphi^2 - 2\omega^2\varphi^2$. Pro ω^2 ponatur ejus valor $\frac{q^2\varphi^2 - q^2}{+\frac{a}{q} - 1 + \varphi^2}$.

-2

$$l \sqcap \frac{2q^2\varphi^2}{\frac{a}{q} - 1 + \varphi^2} + \varphi^2 \sqrt{1 + \frac{1}{1 - \frac{a}{q} - \varphi^2}}, \text{ sive } l \sqcap \frac{2\varphi^2 q^2 + q\varphi^2 \sqrt{\varphi^4 - 2\varphi^2 + 1 \atop + \frac{a}{q} .. - \frac{a}{q}}}{\varphi^2 - 1 + \frac{a}{q}}.$$

Nam et ω ita enuntiari potest optime: $\omega \sqcap q \sqrt{\varphi^4 - 2\varphi^2 + 1 \atop + \frac{a}{q} .. - \frac{a}{q}} \smile \varphi^2 - 1 + \frac{a}{q}$. Quod si jam sit $1 \sqcap \frac{a}{q}$ erit $\varphi^2 - 1 \sqcap \varphi + \sqrt{1 - \frac{a}{q}}, \frown \varphi - \sqrt{1 - \frac{a}{q}}$. Adeoque si harum $\sqrt{\varphi^4 - 2\varphi^2 + 1 \atop + \frac{a}{q} .. - \frac{a}{q}}$ $\varphi + \sqrt{1 - \frac{a}{q}}$ ut et ipsarum $\sqrt{\varphi^4 - 2\varphi^2 + 1 \atop + \frac{a}{q} .. - \frac{a}{q}}$ $\varphi - \sqrt{1 - \frac{a}{q}}$ summa haberi posset, haberetur et summa ipsarum ω. Item ex data summa ipsarum ω dabitur et summa ipsarum l. et contra.

Si Progressionis cujusdam termini multiplicentur in numeros ordinales (NB. abscissas possemus generaliter vocare ordinales, scilicet numerum repraesentant, quotus scilicet sit terminus seriei) fiet progressio sygnotos progressioni summatrici.

$a\omega x \sqcap \text{omn.}\overline{a\,\text{omn.}\,\omega} + ba^2 \sqcap za^2$. Ergo $\frac{za^2}{x} \sqcap \omega a$ et pro ω. [*bricht ab*]

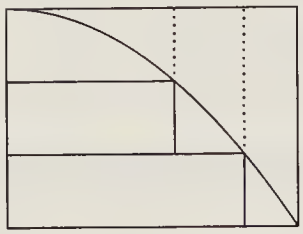
---

12 *Dazu:* Vide alibi in *Analysi tetragonistica.*

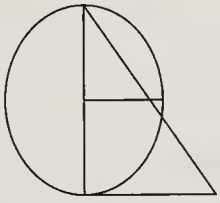
9 qvibusdam *L ändert Hrsg.* 11 fiet *(1)* summa commensurabilis figurae summatricis *(2)* figura *(3)* progressio *L* 12 $\sqcap \omega a$ *(1)* et *(a)* $\overline{\text{omn a}}$ *(b)* $za^2 \sqcap \text{omn}\,\overline{\text{omn}\frac{za}{x}} + ba^2$: *(2)* et *L*

---

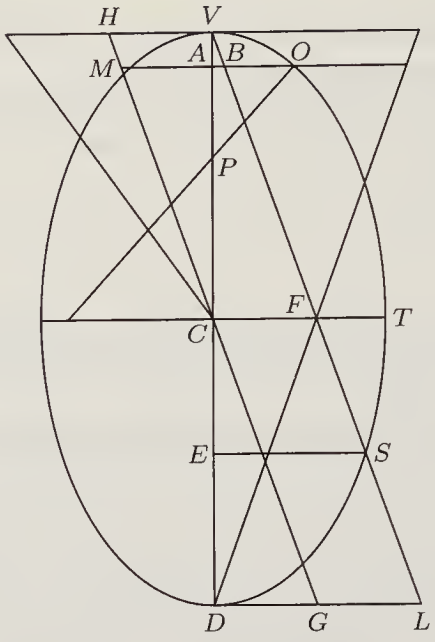
13 alibi: s. N. 38 S. 268 Z. 14–17.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

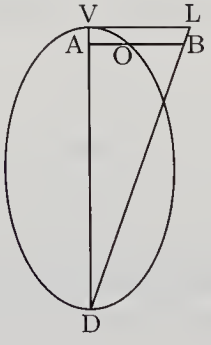


[*Fig. 6*]

In Ellipsi, sit axis, sive Directrix VD. vertex V. Abscissa VA. ordinata ad punctum in curva O, sit AO. Applicetur vertici opposito D. recta $DL \sqcap 2a$ sive aequalis parametro, seu rectae cuidam certae, et jungatur VL. quae ipsi AO productae si opus est occurrat in B. Constat esse rectangulum DAB, aequale quadrato AO. Sit $VA \sqcap x$. et $VD \sqcap 2q$. erit $\frac{VA \sqcap x}{VD \sqcap 2q} \sqcap \frac{AB}{2a}$. et $AB \sqcap \frac{ax}{q}$ et $\square\, DAB \sqcap 2q - x$, $\frown\, \frac{ax}{q} \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. posito $AO \sqcap y$. Sin DA vocetur $\sqcap z$. erit $x \sqcap 2q - z$. et substituendo pro x. ejus valorem, fiet:

$$\boxed{4aq}\ \boxed{-2az}\ \boxed{-4aq} + 2\boxed{4}az - \frac{a}{q}z^2 \sqcap y^2$$

eadem aequatio quae ante. Ergo duos habet valores x, nempe VA, et DA. Sed hoc

4 AO. *(1)* Applicetur vertici normaliter ad axem, latus rectum VL. et jungatur | VL *gestr.* | qvae ipsi AO, productae si opus est occurrat in puncto B 

(2) Applicetur *L*

obiter, (+ Unde in exacta characteristica Geometrica deberent etiam designari punctis communibus. +) Sin pro x, substituas $q - \omega$ ponendo $CA \sqcap \omega$ fiet:

$$y^2 \sqcap \textcircled{2}\, aq \boxed{-2a\omega}, \boxed{-\frac{a}{q}q^2} \boxed{+\frac{2a}{q}q\omega} - \frac{a}{q}\omega^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}\omega^2.$$

Caeterum ut obiter dicam ipsa ES. qua VL secat curvam, cum sit determinata, certam quandam naturam habere debet, quam cum exhibeat determinatum in curva punctum S, in axe E, investigare operae erit S. Est autem $\frac{VE}{2q} \sqcap \frac{ES}{2a}$. Ergo $\frac{VE}{ES} \sqcap \frac{q}{a}$. Porro $DE \frown ES \sqcap ES^2$. ex natura Ellipseos. Ergo $DE \sqcap ES$. Et haec est abscissa aequalis ordinatae sive $2ax - \frac{a}{q}x^2 \sqcap x^2$. Erit $2a - \frac{a}{q}x \sqcap x$, sive $x \sqcap \frac{2a}{1 + \frac{a}{q}} \sqcap y$. Quae usui sine dubio in Conicis futura est.

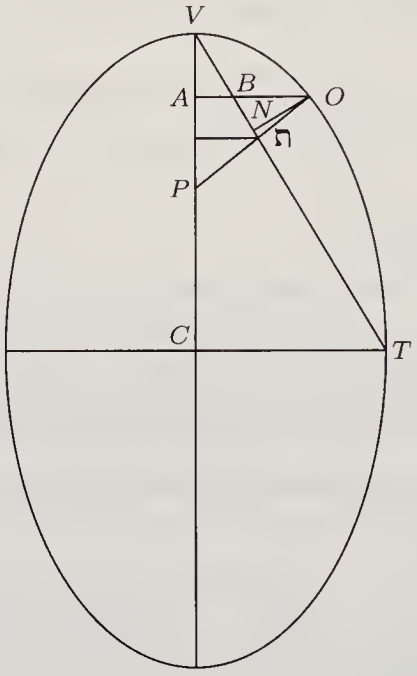
Nunc ipsam CT, velut transversum axem investigemus quem VL secat in F. Erit $CF \sqcap a$. et $CDF \sqcap CT^2$, sive $aq \sqcap CT^2$. Ergo $CT \sqcap \sqrt{aq}$. Sit jam PO. perpendicularis ad curvam, cui occurrit in O. et axi in P. Ducatur GCH. ipsi VL parallela ipsi AO. productae si opus, occurrens in M, erit (vid. Schoten. pag. 245. *Com.*) $AM \sqcap AP$. Est autem $\frac{AM}{DG \sqcap a} \sqcap \frac{q - x}{q}$. fiet: $AM \sqcap a - \frac{a}{q}x$. et $PO^2 \sqcap a^2 - \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2 + 2ax - \frac{a}{q}x^2$. Et faciendo: $x \sqcap v + e$. fiet

$$\begin{array}{llll} + & a^2 & - \frac{2a^2}{q} & v + \frac{a^2}{q^2}\, v^2 \sqcap PO^2. \\ - & \frac{2a^2}{q}\, e & + 2a & v - \frac{a}{q} \quad .. \\ + & 2a\, e & + \frac{a^2}{q^2} & \Big\} 2\, e\, v \\ + & \frac{a^2}{q^2} & - \frac{a}{q} & \Big\} \\ - & \frac{a}{q} & & \Big\} e^2 \end{array}$$

12 GHC. *L ändert Hrsg.*

13 vid.: Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659 [Marg.], *DGS* I S. 245.

Pone $e \sqcap \frac{\frac{a}{q}+1}{\frac{1}{q}-\frac{a}{q^2}}$, sive $\frac{aq+q^2}{q-a} \sqcap \frac{q+a}{q-a}\, q$. Apparebit aequatio ipsarum PO naturam explicans et apparebit si q sit major quam a, aequationem ipsarum PO, axi ordinatim applicatarum fore ad Ellipsin; sin minus ad Hyperbolam, adeoque superficies sphaeroeidis oblongi pendet a quadratura Ellipsis, superficies sphaeroeidis lati a quadratura Hyperbolae. Quae jam et ab Hugenio inventa sunt.



[*Fig. 7*]

Videamus jam an adhuc aliud curvae Ellipticae momentum ex alia quadam recta determinata habere liceat. Jungatur VT. et ex puncto in curva O. ducatur in VT. ordinata NO.

1 $\sqcap \frac{q+a}{q-a}$ a *L ändert Hrsg.* 3 f. sphaeroeidis *(1)* lati *(2)* oblongi *L* 4 qvadratura *(1)* Hyperbolae superficies sphaeroeidis lati a qvadratura Elli *(2)* Ellipsis *L*

5 inventa: s. Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 74 f. (*HO* XVIII S. 212–215). In seinem Handexemplar hat Leibniz zur Figur auf S. 74 eine Strecke in Blindtechnik hinzugefügt; vgl. VII, 4 N. 2 S. 43.

Sit $VA \sqcap x$. $AO \sqcap \sqrt{2ax - \frac{a}{q}x^2} \sqcap y$. ut ante. $VN \sqcap z$. $NO \sqcap \omega$. Ante omnia $\frac{VA \sqcap x}{AB} \sqcap \frac{q \sqcap VC}{\sqrt{aq} \sqcap CT}$. Ergo $AB \sqcap \frac{x\sqrt{aq}}{q}$. et $BO \sqcap y - \frac{x\sqrt{aq}}{q}$ et $VB \sqcap \sqrt{x^2 + \frac{x^2 aq}{q^2}} \sqcap x\sqrt{1+\frac{a}{q}}$. et $BN \sqcap z - x\sqrt{1+\frac{a}{q}}$ et $NO^2 \sqcap \omega^2 \sqcap y^2 - 2yx\frac{\sqrt{aq}}{q}\boxed{+x^2\frac{a}{q}} - z^2 - x^2\boxed{-x^2\frac{a}{q}} - 2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$.

Rursus $\frac{VB}{VA \sqcap x} \sqcap \frac{\sqrt{1+\frac{a}{q}}}{1} \sqcap \frac{y - \frac{x\sqrt{aq}}{q}}{z - x\sqrt{+1+\frac{a}{q}}}$ et erit $y - \frac{x\sqrt{aq}}{q} \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - x\overline{1+\frac{a}{q}}$ 5

sive $yq \sqcap qz\sqrt{1+\frac{a}{q}} - qx$ et $x \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - y$ et $y \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - x$. Unde in aeq. superiore, explicando y. fiet

$$2ax - \frac{a}{q}x^2, \llcorner - 2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}, \frac{\sqrt{aq}}{q}\lrcorner + \frac{2x^2\sqrt{aq}}{q}, -z^2 - x^2 - 2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \sqcap \omega^2.$$

Rursus quia $y^2 \sqcap z^2 + z^2\frac{a}{q}, +x^2, -2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$ fiet

$$z^2 + x^2 - 2ax + \frac{a}{q}x^2 \sqcap -z^2\frac{a}{q} + 4\textcircled{2}\, zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \quad \sqcap \qquad 10$$

$$-\frac{2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \frown \sqrt{aq}}{q} - \omega^2\boxed{-2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}} + \frac{2x^2\sqrt{aq}}{q}$$

1 $\sqcap$ x | $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | AO *L* 2 $\frac{\text{q} \sqcap \text{AC}}{\sqrt{\text{aq}} \sqcap \text{CT}}$ *L ändert Hrsg.* 6 −x *(1)* sive x ad q, ut *(2)* Qvem valorem inserendo in aeqvatione ω^2, fiet: $\text{y}^2 - 2\text{yz}\frac{\sqrt{\text{aq}}}{\text{q}} \frown \sqrt{1+\frac{\text{a}}{\text{q}}} + 2\text{y}^2 - \text{z}^2\llcorner - \text{z}^2\overline{1+\frac{\text{a}}{\text{q}}}\lrcorner + 2\text{zy}\sqrt{1+\frac{\text{a}}{\text{q}}}$ $- \text{y}^2$ *(3)* Unde *L*

---

4 $-2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$: Richtig wäre $+2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$. Dieser und weitere Fehler führen zu einem falschen Ergebnis für z in S. 284 Z. 1, beeinträchtigen aber nicht die Überlegung.

sed his non est opus. Sufficit habere nos $\frac{y+x}{\sqrt{1+\frac{a}{q}}} \sqcap z$. Unde ut obiter dicam, sequitur omnes z. semper haberi posse. Caeterum rectius videmur factare si generaliter calculemus:

Aequatio est $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. sive $y^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}v^2$, (et s^2 seu quad. a perpendiculari $\sqcap a^2 + \frac{1}{-\frac{a}{q}}\, y^2 \sqcap \boxed{a^2} + aq - \frac{a}{q}v^2, \boxed{-a^2} + \frac{a^2}{q^2}v^2$. sive $s^2 \sqcap aq + \frac{1}{-\frac{a}{q}} \frown \frac{a}{q}v^2$). In aeq. $y^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}v^2$. pro y ponatur $\frac{e^2+ez-b\omega}{\sqrt{e^2+b^2} \sqcap d}$. et pro v fiat $\frac{\begin{cases}+eb\\ -c\sqrt{e^2+b^2}\end{cases} + bz + a\omega}{\sqrt{e^2+b^2}}$. Per compendium $\sqrt{e^2+b^2}$ vocetur d. et $eb-cd$ vocetur f. et valoribus pro y et v substitutis, fiet:

$$e^4 + 2e^3z - 2e^2b\omega, +e^2z^2 - 2ebz\omega + b^2\omega^2 \quad \sqcap$$
$$d^2aq, -\frac{a^3f^2}{q} - \frac{2a^2fbz}{q} - \frac{2a^3f\omega}{q} - \frac{b^2az^2}{q} - \frac{2ba^2\omega z}{q} - a^3\omega^2,$$

sive

$$\left.\begin{array}{llllll} +e^2 & z^2 + b^2 & \omega^2 - 2eb & z\omega + 2e^3 & z - 2e^2b & \omega + e^4 \\ +\frac{b^2a}{q} .. & +\frac{a^3}{q} .. & +\frac{2a^2b}{q} .. & +\frac{2a^2fb}{q} . & +\frac{2a^3f}{q} . & -d^2aq \\ & & & & & +\frac{a^3f^2}{q} \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quae est aequatio ad Ellipsin aut si q. quantitas negativa sit, Hyperbolam, quam maxime variata. Compendii causa scribamus

$$gz^2 + h\omega^2 + lz\omega + mz + n\omega + p \sqcap 0.$$

quam ad tangentes ordinando, scribemus

$$2gzt + l\omega t + mt \sqcap -2h\omega^2 - lz\omega - n\omega.$$

2 factari *L ändert Hrsg.* 3 est *(1)* $y^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}v^2$. pone y ⊓ *(2)* $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. *(a)* Et perpendicularis $s^2 \sqcap a^2$ *(b)* sive *L*

4 sive s^2 ⊓: Richtig wäre $s^2 = aq - (1-\frac{a}{q})\frac{a}{q}v^2$. 5 ponatur: Leibniz unterlaufen bei der folgenden Koordinatentransformation, bei der er schematisch die Formeln aus Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 177 f. [Marg.], anzuwenden versucht, mehrere Fehler. Die weitere Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Porro $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \pi$. et $\frac{\omega^4}{t^2} + \omega^2 \sqcap s^2$. fiet $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1} \sqcap s$. Jam ergo literas arbitrarias nempe *e. b. c.* ita explicare tentemus, ut omnium s. per z. explicatarum haberi possit summa. Sic enim novum curvae vel Ellipticae vel Hyperbolicae momentum habebitur. Est autem $t \sqcap \frac{-2h\omega^2 - lz\omega - n\omega}{2gz + l\omega + m}$. Ergo erit $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \frac{2gz\omega + l\omega^2 + m\omega}{-2h\omega - lz - n}$. Porro

$$\omega^2 \sqcap \frac{-gz^2 - lz\omega - mz - n\omega - p}{g} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{2gz\omega + l\omega^2 + m\omega}{-2h\omega - lz - n}+1}}.$$

Ponamus $-gz - l\omega - m \sqcap \psi$. per brachylogiam, et fiet:

$$\frac{-\psi z - n\omega - p}{g} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{gz\omega + \psi\omega}{-2h\omega - lz - n}+1}}.$$

$$\begin{array}{llllll}
\omega^2 + \frac{lz}{g}\,\omega + \frac{l^2z^2}{4g^2} & \sqcap & + \frac{l^2}{4g^2}\,z^2 & + \frac{1}{2}\,\frac{ln}{g^2}\,z & + \frac{n^2}{4g^2} \\
+ \frac{n}{g} \quad + \frac{2lzn}{4g^2} & & - \;1 \;\;..\; - & \frac{m}{g}\;.\; - & \frac{p}{g} \\
+ \frac{n^2}{4g^2} & & & &
\end{array}$$

et $\omega \sqcap \dfrac{\begin{matrix}-lz\\-n\end{matrix} + \sqrt{\begin{matrix}l^2 & z^2 + 2ln & z + n^2\\ -4g^2 & -4mg & -4pg\end{matrix}}}{2g}$ sed calculus paulo prolixior.

---

1 *Daneben, durch Strich mit S. 287 Z. 7f. verbunden:* ++

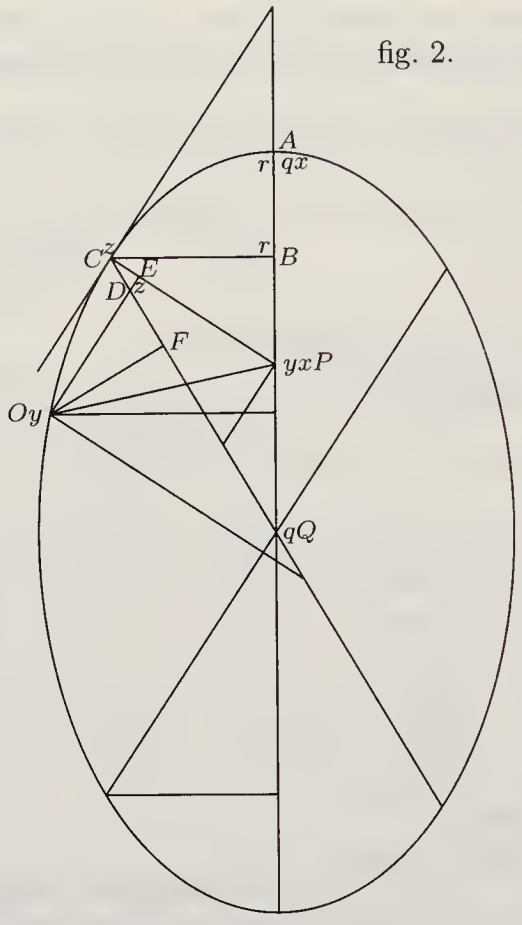
---

1 $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \pi$: In der Vorlage steht der Buchstabe p sowohl für den konstanten Term des Polynoms wie für die Subnormale. Zur besseren Unterscheidung wird die Bezeichnung der letzteren zu π geändert.

1 $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}$: Richtig wäre $\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}$. Leibniz rechnet anfangs mit $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t}+1}$; in S. 287 Z. 7 f. erkennt er den Fehler nur teilweise und verbessert punktuell $\frac{\omega^2}{t}$ in $\frac{\omega^2}{t^2}$. Das Versehen, zu dem weitere hinzukommen, beeinträchtigt die folgenden Rechnungen.

Vide sec. fig. hic.

fig. 2.



[*Fig. 8*]

Sit punctum in curva $C_{[,]}$ inde ordinata CB, vertex Ellipseos A, abscissa Axis $AB \sqcap r$. Erit $BP \sqcap a - \frac{a}{q}r$. $CB \sqcap \sqrt{2ar - \frac{a}{q}r^2}$. Ipsa CQ. semidiameter sit

$$c \sqcap \sqrt{q^2 - 2qr + r^2 + 2ar - \frac{a}{q}r^2}.$$

4 CQ. *(1)* diameter *(2)* semidiameter L

2 *Fig. 8*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

Ex sumto in curva puncto O. ducatur ad diametrum CQ. ordinata (tangenti parallela) OD et posita $CD \sqcap z$ et $2b$. latere recto respondente diametro $2q$. fiet $OD \sqcap \sqrt{2bz - \frac{b}{q}z^2}$. Producatur usque in E, ubi perpendiculari CP. occurrat, patet triangula etc. Sed haec quoque puto inutilia.

Si in calculo superiore essent l. et $n \sqcap 0$: foret $\frac{\omega^2}{t} \sqcap 2gz + m$. et $\omega^2 \sqcap -z^2\frac{-mz-p}{g}$ et $s \sqcap \sqrt{2gz+m+1}, \frac{-z^2-mz-p}{g}$.

Error in praecedentibus inde a signo quod scripseram $\frac{\omega^2}{t} + 1$, cum debeat scribi $\frac{\omega^2}{t^2}+1$. Est autem $t^2 \sqcap \omega^2 \boxed{2}\frac{\overline{-2h-lz-n}}{2gz+l\omega+m}$. Ergo $\llcorner\llcorner\frac{\omega^2}{t^2} \sqcap \llcorner\llcorner\llcorner\boxed{2}\frac{2gz+l\omega+m}{-2h-lz-n}\lrcorner\lrcorner+1\lrcorner\lrcorner\lrcorner\sqrt{\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \sqcap s$. Unde ponendo $l \sqcap 0$ fieret $\frac{2gz+m}{-2h-n} \sqcap \sqrt{s^2-1}$. Quae est aequatio ad Hyperbolam, quod si ergo fieri potest $l \sqcap 0$ et nullus est error in calculo, haberemus momentum quoddam curvae Conicae ex quad. hyperbolae. Ut autem sit $l \sqcap 0$. fiet $e \sqcap \frac{a^2}{q}$.

8 $t^2 \sqcap$: Der erste Term im Zähler des Bruches der rechten Seite müsste $-2h\omega$ lauten; weitere Fehler in den folgenden Rechnungen beeinträchtigen das Ergebnis.

40. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS SECUNDA

29. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 3/4 S. Anstreichungen unbekannter Hand mit Rotstift in Höhe von S. 290 Z. 11 und S. 294 Z. 1. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Brief*, 1851, S. 348–354; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 121–127; 3. *LBG*, 1899, S. 151 bis 156; 4. (engl. Übers. von 2.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 76–83. Cc 2, Nr. 1092

29. Octob. 1675

Analyseos Tetragonisticae pars 2da.

Credo nos tandem dare posse methodum, qua cujuslibet figurae Analyticae figura analytica quadratrix inveniri potest, quando id possibile, aut quando id fieri non potest, poterit tamen semper figura describi analytica, fungens vice quadratricis, quam proxime. Hoc ita concipio. Proposita sit aequatio figurae cujus incognitae $x.$ et $v_{[,]}$ cujus quaeritur quadratrix. Sumatur aequatio ad curvam indeterminatam: $0 \overset{(1)}{\sqcap} b + cx + dy + ex^2 + fy^2 + gyx + hy^3 + lx^3 + myxy + yxx$ etc. Ordinetur ad tangentes, hoc modo: $-dy - 2fy^2 - gyx - 3hy^3 - 2mxy^2 - x^2y$ etc. $\overset{(2)}{\sqcap} ct + 2ext + gyt + 3lx^2t + my^2t + 2yxt$ etc. Jam $\frac{t}{y} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{a}{v}$. Ergo ex aequatione $\frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{v}$. tollendo ipsas t et $y.$ ope aequationum 1. et 2. debet prodire aequatio illa ipsa, quae est figurae curvilineae ad quadrandum propositae. Et conferendo terminos productae terminis datae, si nulla est in conferendo impossibilitas, habemus quadraturam. Sin oritur impossibilitas, certum est figuram analyticam propositam non habere analyticam quadratricem. Facile autem apparebit, si quae ei addantur, quae eam insensibiliter immutent[,] posse inde figuram fieri quadrabilem, ob

---

9 *Daneben:* Refertur ad praecedentem 25. Octob. 1675.

8 29. Octob. 1675 *erg. L* 10 methodum, *(1)* qva qvaelibet figura Analytica qvadrari potest analytice, qvando id possibile est *(2)* qva *L* 18 est *(1)* curvae cuius *(2)* figurae *L* 20 f. figuram *(1)* unam per aliam qvadrari non posse. *(2)* analyticam *L*

---

23 praecedentem: N. 38.

aliam plane aequationem prodeuntem. Caeterum ut impossibilitas appareat, considerandae sunt difficultates.

Nimirum, obstat quod aequatio producta est prolixitatis infinitae; data autem definita. Respondeo eo ipso dum comparantur, videbitur quousque maximae potestates incognitarum indefinitae excurrere possint. Regeri potest, fieri posse; ut producta aequatio indefinita plures habet terminos quam finita data et tamen ad eam reduci possit, quod scilicet per aliam vel finitam vel indefinitam dividi possit. Haec difficultas me diu jam anno abhinc tenuit. Sed nunc video non debere nos ea deterreri. Nam nunc fieri potest, ut methodo tangentium ex figura quadam determinata (cujus aequatio sit indivisibilis per rationalem) oriatur figura ambigua, quia non potest ad unum punctum figura quaelibet nisi unam habere tangentem. Ergo aequatio producta neque per finitam dividi potest neque etiam per indefinitam[,] nam etiam figurae indefinitae revera, seu quarum ordinatae exprimuntur aequatione infinita habent ordinatas, easque aliquando finitas quae deberent satisfacere. Tametsi difficultatem adhuc exiguam praevideam, quod scilicet videatur fieri aliquando ut radices aequationum omnes non servant ad problematis solutionem. Ego tamen ut verum fatear, credo.

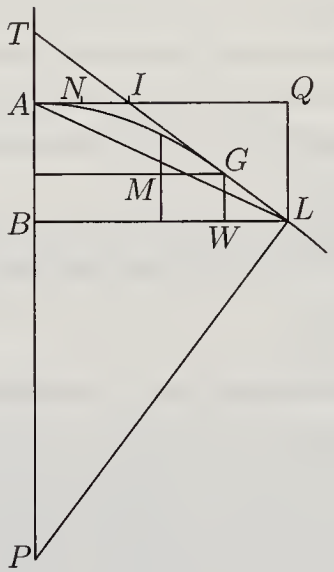
Alia est difficultas satis magna, quod scilicet fieri possit, ut aequatio finita exprimatur etiam per indefinitam, adeo ut aequatio producta coincidere possit cum data, etsi id non appareat, v. g. $y^2 \sqcap \frac{x}{1+x} \sqcap x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6$ etc. et ita infinitae aliae possunt formari variis compositionibus et divisionibus. Hic fateor difficilis nodus. Sed responderi sic potest: Si quam habet figura quadratricem analyticam, utique ipsa sub indefinita intelligi potest. Et tunc non dabit utique indefinitam sed finitam datae aequivalentem. Eodem modo certum est etiam quadratricem datae ordinarie tractatam si qua est, datam solam non ambiguam daturam. Adeoque et illa quae ab ea non nisi nomine differt.

Una superest difficultas[:] non videri judicari posse quis sit ultimus vel primus terminus productae indefinitae; quia potest fieri ut termini inferiores destruantur; et tunc ipsa sit divisibilis vel per y. vel per x. vel per yx. aut horum potestates. Et hoc non video quod prohibeat. Eademque manet difficultas sive a minimo sive maximo gradu incipias assumtam initio aequationem indefinitam. Pone ergo in aequatione producta

13 aeqvatione *(1)* indefinita *(2)* infinita *L* 20 f. nodus. *(1)* Crediderim tamen non posse evenire qvandocunqve *(2)* sed *L* 21 analyticam *(1)* debet utiqve prodire ordinario mo *(2)*, utiqve *L* 29 prohibeat. *(1)* Hoc tamen videtur regeri posse *(2)* Eademqve *L*

dividi posse[,] necesse est absit quantitas cognita, item absint omnes termini, ubi sola x. vel si mavis, omnes termini ubi sola abest y. quod si id examinando continue inciditur in impossibilitatem. In calculo hoc generali, tunc pro certo habere poterimus solutam esse hanc difficultatem nec unquam posse evenire talem divisionem post calculum. Sin fieri potest tunc alii post alios destruentur, ut deprimi possit aequatio producta, et instituenda comparatio. Et tunc videndum an non generaliter evinci possit, procedere non posse, comparationem, utcunque procedamus destruendo.

Forte si figurae quadrandae redigantur antea ad simplicissimas aequationes facilius detegentur impossibilitates. Nam et quadratrix praesumitur fore simplicior. Succurrit adhuc aliud auxilium, quod scilicet varii ad idem ducentes plane diversi inter se calculi institui possunt, quorum producti comparabiles.



[*Fig. 1*]

$BL \sqcap y$. $WL \sqcap l$. $BP \sqcap p$. $TB \sqcap t$. $AB \sqcap x$. $GW \sqcap a$. $y \sqcap$ omn. l.

Ut obiter dicam sunt numeri compositi qui sibi addi non possunt vel demi per partes nempe denominati a potestatibus seu sub potestatibus sive surdi. Sunt alii numeri denominati qui nec in se multiplicari possunt per partes: Et tales sunt numeri summarii v. g. omn. l. non possunt multiplicari in omn. p. nec enim fieret $y^3 \sqcap 2\,\overline{\text{omn. omn. } pl}$. Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur; sic agendum: Volumus spatium quod reprae-

3 generari *L ändert Hrsg.* 8 figurae *(1)* qvadratri *(2)* qvadrandae *L* 13 f. omn. l. | $y^2 \sqcap 2\,\overline{\text{omn p}}$ *gestr.* | | (+ *streicht Hrsg.* | Ut *L* 14 compositi *erg. L* 15 f. denominati *erg. L*

sentet omnes p. in omnes l. Non poterunt servire ductus Gregorii a S. Vincentio qui figurae in figuras dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes; sed una ordinata in unam. At inquies si una ordinata ducenda in alias omnes, prodibit spatium sursolidum. Summa nimirum infinitorum solidorum. Huic malo remedium reperi sane admirabile. Repraesententur omnes l, per lineam infinite parvam WL. id est opus est linea quadratrix omn. l. Erit linea $BL \sqcap$ omn. l. quae ducatur in omnes p. figura plana repraesentatas fiet solidum. Si omn. l. sint recta et omnes p, curva fiet superficies curvilinea ductui homogenea; sed haec vetera. Ecce jam novum. Si ipsis WL, MG seu omnibus l. imponatur singulis eadem curva repraesentans omnes p. debet autem certa curva p. esse ejusdem plani, et sibi semper parallelo ejus plano existente per curvam AGL ferri, et habebitur quod desideramus. Loco curvae et planum variis modis terminatum ita ferri potest per curvam, et fiet solidum; priore modo superficies curvilinea; et superficiei sive solidi sectio semper eadem. Possumus tamen fingere quod decrescant interim inter ferendum; videndum an certus sit numerus superficierum analyticarum ut linearum analyticarum. Sed haec obiter.

Nota superficies curvilinea facta motu curvae sibi parallelae per curvam; aequabitur cylindro curvae sub BL, summa omnium l. Sed haec obiter.

Porro $\frac{l}{a} \sqcap \frac{p}{\text{omn. } l \sqcap y}$. Ergo $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn. } l}}{a}$ l. Itaque omn. $\frac{yl}{a}$. non vult dicere omn. y

---

21–26 *Zur gestrichenen Lesart:* Errores

Neben omn $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn. } l}\,\boxed{2}}{a}$: male

4 nimirum *(1)* plurium *(2)* infinitorum L 18 p $\sqcap \frac{\overline{\text{Omn l}}}{\text{a}}$ l. | Ergo *(1)* $\text{y}^2 \sqcap 2\,\text{omn l}\frac{\overline{\text{omn l}}}{\text{a}}$, sive $\overline{\text{omn l}}\,\boxed{2} \sqcap 2\,\text{omn l}\frac{\overline{\text{omn l}}}{\text{a}}$ *(2)* Ergo omn p $\sqcap \frac{\overline{\text{omn. l}}\,\boxed{2}}{\text{a}}$. Ergo Omn. p. $\sqcap \frac{\text{y}^2}{\text{a}}$. Brevius. $\frac{\text{l}}{\text{a}} \sqcap \frac{\text{p}}{\text{y}}$. Ergo p $\sqcap \frac{\text{l}}{\text{a}}\text{y} \sqcap \frac{\text{y}}{\text{a}}\text{l}$. Ergo erit omn. p $\sqcap$ Omn $\frac{\overline{\text{yl}}}{\text{a}}$ (Nota Omn. non debet esse sub sua linea). At si dicam omnes, 2, 3. *(a)* non dico omnes *(b)* seu omnes senarios non dico Omnes binarios in Omnes ternarios; sed diconi omnes ternarios bis; at qvidni ergo etiam omnes *(aa)* ternari *(bb)* binarios ter, qvae duo non coincidunt, itaqve e r r a v i m u s. *gestr.* | itaqve L

---

1 Gregorii a S. Vincentio: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VII.

in omn. l. nec $y \frown$ omn. l. quare cum sit $p \sqcap \frac{y}{a} l$ sive $p \sqcap \frac{\text{omn. } l}{a} l$. hoc vult dicere. omn. l. ductas in unum illud quod uni illi p respondet. Ergo omn. $p \sqcap$ omn. $\frac{\overline{\text{omn. } l}}{a}. l$. Atqui aliunde demonstravi omn. $p \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive $\sqcap \frac{\overline{\text{omn. } l}^{\boxed{2}}}{2}$. Ergo habemus theorema quod mihi videtur admirabile, et novo hujus calculo magni adjumenti loco futurum, nempe quod sit, $\frac{\overline{\text{omn. } l}^{\boxed{2}}}{2} \sqcap$ omn. $\overline{\text{omn. } l \frac{l}{a}}$, qualiscunque sit l. Id est si omnes l. ducantur in ultimam, et aliae omnes l, rursus in suam ultimam; et ita quoties id fieri potest[,] summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum quorum latera sunt summae ipsorum l, seu omnes l. pulcherrimum ac minime obvium theorema.

Tale est etiam Theorema: omn. $\overline{xl} \sqcap x \overline{\text{omn. } l} - \text{omn.} \overline{\text{omn. } l}$. ponendo l. esse terminum progressionis, et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l. ei respondentis, seu x. esse numerum ordinalem, l. rem ordinatam.

Nota in his calculis observari potest lex homogeneorum. Nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea, si lineae fit superficies, si superficiei fit corpus, et ita in infinitum etiam ad dimensiones.

Utile erit scribi $\int$. pro omn. ut $\int l$ pro omn. l. id est summa ipsorum l. Itaque fiet $\frac{\overline{\int l}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int \overline{l} \frac{l}{a}}$ et $\int \overline{xl} \sqcap x \int \overline{l} - \int \int \overline{l}$. Et ita apparebit semper observari legem homogeneorum, quod utile est, ut calculi errores vitentur.

Nota si analytice detur $\int l$. dabitur etiam l. Ergo si detur $\int\int l$ dabitur etiam l. sed non si datur l. dabitur et $\int l$.

Semper $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$.

15 $\frac{\overline{\int l}^2}{2a}$ *L ändert Hrsg.*

3 aliunde demonstravi: s. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. sowie im vorliegenden Band N. 22 S. 184 Z. 15 f. 7 f. aequabitur ... ipsarum l: Richtig müsste es heißen: aequabitur dimidio quadrato cujus latera sunt summae ipsarum l. 9 Theorema: s. N. 38 S. 268 Z. 14.

Nota omnia haec theoremata vera de seriebus in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili.

$\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$.

Nota jam si termini summandi affecti sint, quomodo hinc afficiatur summa regulam generalem, talem: v. g. $\int \overline{\frac{a}{b} l} \sqcap \frac{a}{b} \int \bar{l}$. scilicet si $\frac{a}{b}$ sit terminus constans, ducendus est in maximum ordinalem. Quod si sit terminus inconstans tunc tractari non potest, nisi ad ipsum l. reduci possit, vel utcunque ad quantitatem communem nempe ordinalem.

Nota quotiescunque in aequatione Tetragonistica non nisi una est litera varians ut l. tunc potest poni esse terminus constans, et $\int l$ erit $\sqcap x$. Et huic fundamento innititur theorema: $\frac{\overline{\int l}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int \bar{l} l}$ id est $\frac{x^2}{2} \sqcap \int x$. Eodem ergo modo statim innumera similia possunt solvi, ut $\int \overline{c \overline{\int l}^2 + ba^2} + [\int] \overline{\int l}^3 + \int l^3 \sqcap ea^3$ quaeritur qualis sit e. Fiet $a^3 e$

1 2 3 4

$\sqcap \frac{cx^3}{3} + ba^2 x + \frac{x^4}{4} + xa^3$. Nimirum $\int l^3 \sqcap x$. quia $l \sqcap a$ supponitur calculi causa.

1 2 3 4

$\frac{\int l}{a} \sqcap x$. $\int \overline{c \overline{\int l}^2} \sqcap \frac{cx^3}{3}$. id est $\sqcap \frac{c \overline{\int l}^3}{3a^3}$. $\int ba^2 \sqcap \int l\ ba$. Intelligitur autem a. esse unitatem. Satis haec nova et notabilia. Cum novum genus calculi inducant.

Pono ut ad priora redeamus. Datur l. relatio ad x. quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo scilicet si sit $\int l \sqcap ya$. ponemus $l \sqcap \frac{ya}{d}$. Nempe ut $\int$. augebit ita d. minuet dimensiones. $\int$. autem significat summam, d. differentiam: Ex dato y. semper

5 $\sqcap \frac{a}{b}$ *(1)* x. *streicht Hrsg. (2)* $\int \bar{1}$ *L* 6 inconstans *(1)* vel *(a)* ref *(b)* exprimatur relatione ad ordinalem, vel non *(2)* tunc *L* 11 $\frac{c}{a} \overline{\int 1}^2$ *L ändert Hrsg.*

11 Fiet: Leibniz benutzt im Folgenden bis Z. 13 inkonsistent $l = 1, \int l = x$ und $l = a, \int l = ax$ nebeneinander; die grundsätzliche Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

invenitur $\frac{ya}{d}$, sive l. sive differentia ipsarum y. Hinc aequatio una mutari potest in aliam, sublatio ut ex aequatione: $\int \overline{c\int l}^2 \sqcap \frac{c\overline{\int l}^3}{3a^3}$, facere possumus: $c\overline{\int l}^2 \sqcap \frac{c\int l^3}{3a^3 d}$.

Nota $\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2 a}{e} \sqcap \int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}$. Eodem modo $\frac{x^3}{db} + \frac{x^2 a}{de} \sqcap \frac{\overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}}{d}$.

Sed ut ad superiora redeamus. Investigare possumus $\int l$ bis. Primum sumendo y. et quaerendo $\frac{ya}{d}$. $\sqcap$ l. datae. Deinde aliter sumendo $\frac{z^2}{2a} \sqcap y$. sive sumendo $\sqrt{2ay} \sqcap z$ et inde $\frac{z^2}{t} \sqcap p \sqcap l \sqcap \frac{ya}{d}$. Quare si in aequatione indefinita ⟨ex⟩ yx; y. et x tollamus y, substituendo in ejus locum, $\frac{z^2}{2a}$: et investigemus ipsam t. Hujus novae aequationis indefinitae ut ante prioris denique ope valoris $\frac{z^2}{t} \sqcap l$. et novi valoris t. ex indefinita z continente ipsas z. et t. tollamus[,] restabit sola ex istis quatuor $y.z.t.l.$ litera l. et debet rursus aequatio prodire quae eadem esse debet tum cum data, tum cum paulo ante producta. Unde cum habeamus duas aequationes indefinitas earundem non tantum capitalium sed et arbitrariarum nonnihil tamen dissimiles quae coincidere debent, facere apparebit an aliqui termini possint tolli; an possibilis sit ista comparatio; aliaque id genus, et quod caput est qui termini vere maximi et minimi seu numerus terminorum aequationis. Sed quoniam in Triangula similia TBL, GWL, LBP. nondum intravit abscissa x. seu punctum fixum A. Nimirum ex puncto quodam fixo, A. ducatur AIQ indefinita ipsi LB. parallela; occurrens tangenti LT in I. et sit $AQ \sqcap BL$. Bisecetur AI in N. Ajo summam omnium QN. aequari semper Triangulo ABL. ut facile demonstrari potest, ex alibi a me dictis. Quae rursus novum dant calculi fundamentum. Nimirum $\frac{xv}{2} \sqcap y$. ponendo $BL \sqcap v$. et $QN \sqcap l$. et y. $\sqcap \int l$. $\frac{AI}{v} \sqcap \frac{t-x}{t}$ (signa ambigua). Ergo $AI \sqcap \frac{t-x}{t} v$. et $QI \sqcap v - AI \sqcap$

6 si *(1)* pro aeqvatione superiore, in qva *(a)* yx *(b)* y. et *(2)* in *L* 9 istis | tribus *ändert Hrsg.* | y. z. t. | l. *erg.* | litera *L*

18 alibi: s. VII, 4 N. 39_1 S. 617–620.

$v - \frac{t}{t}v + \frac{x}{t}v$. $QI \sqcap \frac{xv}{t}$, et $QN \sqcap QI + \frac{AI}{2} \sqcap \frac{xv}{t} + \frac{v}{2} - \frac{xv}{2t} \sqcap \frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. Et ope hujus aequationis $\frac{xv+tv}{2t}, \sqcap l$. et hujus $y \sqcap \frac{xv}{2}$. et illa ipsa prima aequatione indefinita seu generali, jam tertium resumta, tollendo primo y, deinde t ope inventi valoris ipsius t ad x. in aeq. ex x. v. indefinita; ac denique v ope aeq. $\frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. habebitur rursus aequatio in qua solae capitalium restabunt x. et l. ut ante, quae coincidere debet iterum datae. Habemus ergo tres aequationes productas, diversis viis inventas, quae inter se et cum data coincidere debent; et hae quidem tres non tantum sunt coincidentes, sed et iisdem constare debent literis et vocabulis. Quod an fieri possit analytice profecto, mox apparebit.

De figuris secundariis multa credo determinari posse inventis primariarum areis et centris gravitatis. Hinc enim et momenta habebuntur ex rectis quibusdam minus principalibus, quae momenta plerumque in figuras secundarias cadere solere arbitror. Operae pretium erit pro eo instituere calculum generalem.

7 tantum *(1)* similes *(2)* sunt 8 et *(1)* terminis *(2)* vocabilis *L*

41. HISTORIA TETRAGONISTICAE CONICAE

[31. Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 11 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 6 Z. auf Bl. 4 r° unten u. 4 Z. auf Bl. 4 v° unten. Auf dem Rest des Blattes VII, 1 N. 17 sowie eine Aufzeichnung zur Kombinatorik (Cc 2, Nr. 1097 tlw.; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1097 tlw.

Datierungsgründe: Das auf demselben Blatt geschriebene VII, 1 N. 17 ist auf den 31. Oktober 1675 datiert.

Historia Tetragonisticae Conicae.

Conicae figurae sunt Triangulum, Parabola, Circulus, Ellipsis, Hyperbola. Spatium Trianguli et partium exhibet Euclides, Parabolae Archimedes. Relationem partium Circuli ad totum Archimedes, unde descriptio quadratricis. Relationem partium Hyperbolae, Greg. a S. Vinc. unde descriptio logarithmicae, illic sectio anguli, hic rationis. Appropinquationem Circuli Arithmeticam Wallisius, Geometricas Elegantes, Snellius, Hugenius, Gregorius. Gregorius et pro Hyperbola. Quadraturam Hyperbolae et omnium ejus partium Arithmeticam, Mercator; circuli, ego. Nunc ad solida gyratione facta seu Conoeides. Conoeides omnes excepta Hyperbola primus Archimedes. Hyperbolae Cavalerius. Un-

10 Parabola *erg. L* 13 Vinc. *(1)* illic perfectione *(2)* unde *L* 16 Arithmeticam, *(1)* Gregorius *(2)* Mercator *L* 17 primus | credo *gestr.* | Archimedes *L*

---

11 Trianguli: EUKLID, *Elemente* I, insbesondere prop. XLI. 11 Parabolae: ARCHIMEDES, *Quadratura parabolae*, prop. XXIV. 11 f. Circuli: Gemeint ist wohl ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I. 12 Hyperbolae: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. 125–130, S. 594–597. 14 Arithmeticam: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178–182 (*WO* I S. 467–469). 14 Geometricas: W. SNELL, *Cyclometricus*, 1621; Chr. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, S. 1–44 (*HO* XII S. 113–181); J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 11–19; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. I, S. 1–3; ders., *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 6–8 [Marg.]. 16 Arithmeticam: N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XVII, S. 31–33; vgl. VII, 4 N. 3_1 S. 50 f. 16 ego: VII, 4 N. 42_1. 17 Conoeides omnes: ARCHIMEDES, *De conoidibus et sphaeroidibus*. 17 Hyperbolae: B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635, S. 63–80. 17–297,1 Ungulas: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. IX , Tl 1 bis 5, S. 955–1037; Torricellis Bestimmung des parabolischen Zylinderhufs ist gedruckt in B. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae sex*, 1647, S. 365–367.

gulas Gregorius a S. Vinc., Torricellius. Superficies Sphaerae et Coni Archimedes, alias circuli Guldinus et Tacquet. Conoeidum et Sphaeroeidum Hugenius et problemate ab Hugenio proposit⟨o⟩ etiam suo marte Wallisius. Quasdam alias superficies aliis rotationibus factas Wallisius et Gregorius. Jam ad Curvas. Curvam Circuli seu Ellipseos primariae primus dimensus est Archimedes, Curvam parabolae, sive Wallisius sive Hugenius, sive Heuratius. Curvam Hyperbolae primariae Ego 26 Octob. 1675. cum paulo ante literam ab Oldenburgio accepissem qua fatetur id nondum posse Anglos. Ellipseos et Hyperbolae; secundariarum curvae adhuc desiderantur. Aditum tamen ad illas quoque arbitror mihi apertum. Superficiem Coni scaleni dedit Albius.

4 seu Ellipseos primariae *erg. L*

1 Superficies: ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro I*, prop. XIV u. XXXIII. 1 alias: P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. III, cap. I–II u. V, S. 211–231 u. 246–262; A. TACQUET, *Cylindricorum et annularium liber IV*, 1651, in der uns zugänglichen Ausgabe von 1669, S. 83–106. 2 Conoeidum et Sphaeroeidum: Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 (*HO* XVIII S. 211–221). 3 proposit⟨o⟩: vgl. *a. a. O.*, S. 73 (*HO* XVIII S. 213), sowie J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 97–99, 102–104, 109 f. (*WO* I S. 554-556, 558 f., 562 f.). 4 factas: *a. a. O.*, S. 111–115 (*WO* I S. 563–565); J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, S. 51–100. 4 Circuli: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. III. 5 parabolae: Die Rektifikation der Parabel wurde erstmals publiziert in H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520. Chr. Huygens und J. Wallis reklamierten jeweils für sich Anteile an den von ihnen vertretenen Prioritätsansprüchen von H. v. Heuraet bzw. W. Neile. Leibniz bezieht sich vermutlich auf folgende gedruckte Quellen: J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 90–98, 108–110 (*WO* I S. 550–555 u. 561 f.); ders., *Mechanica*, pars 2, 1670, S. 555 (*WO* I S. 923); Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209–211); sowie die in den *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 98 vom 17./27. November 1673, S. 6146–6150, abgedruckten Briefe von J. Wallis, W. Brouncker u. Chr. Wren. 6 Ego: vgl. die Erl. zu N. 39 S. 271 Z. 1. 7 fatetur: Leibniz bezieht sich auf eine Aussage von J. Collins, die H. Oldenburg im Brief vom 10. Oktober 1675, III, 1 N. 65 S. 289 Z. 11–13, mitteilt. 9 Albius: R. WHITE, *Hemisphaerium dissectum*, 1648, S. 271 bis 289; vgl. Leibniz' Studie *De superficiebus coniformium rectilineorum inprimis cono scaleno*, dat. 30. Oktober 1675, VII, 1 N. 16, insbesondere die Erl. zu S. 154 Z. 3.

42. VARIA AD TANGENTES ET QUADRATURAS

[Oktober (?) 1675]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XIV 1 Bl. 47 bis 48. 1 Bog. 2°. 2 S. gegenläufig auf Bl. 47 v° und Bl. 48 r°. Textfolge Bl. 48 r°, 47 v°. — Auf dem übrigen Bogen VII, 2 N. 53 und VII, 2 N. 54. Die einzelnen Textstücke sind teilweise ineinandergeschrieben.
Cc 2, Nr. 00

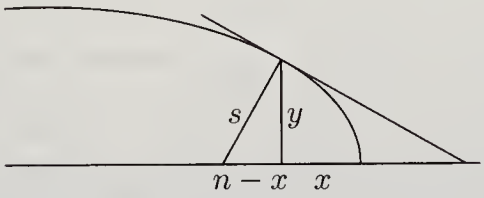
Datierungsgründe: N. 42 dürfte im Zusammenhang mit der Gesprächsaufzeichnung VII, 2 N. 54 entstanden sein.

[*Teil 1*]

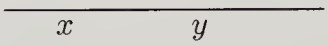
[*Leibniz*]

$x^2 + cy^2 + dy + ex + f + hyx \sqcap 0$
$x^2 + y^2 + gy + hx + m \sqcap 0$

[*Tschirnhaus*]

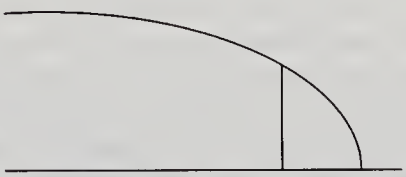


[*Fig. 1*]

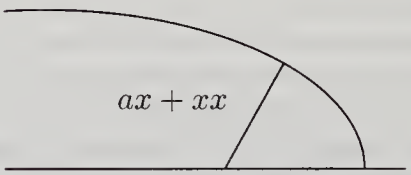


[*Fig. 2*]

$xxy \sim$ —— [*bricht ab*]



[*Fig. 3*]

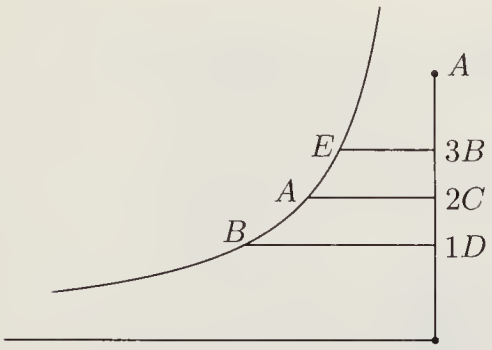


[*Fig. 4*]

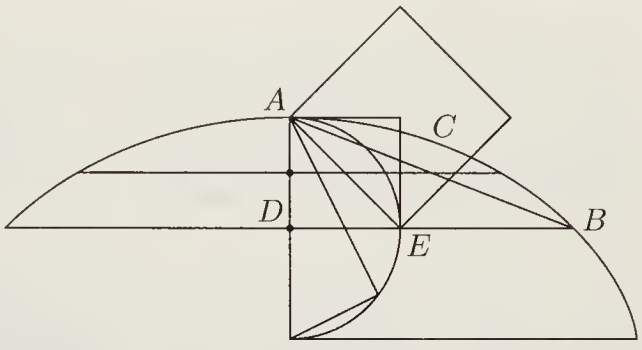
12 +f *(1)* ⊓ 0 *(2)* +hyx *L* 16 f. *Text und Figuren verwischt T*

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 5*]



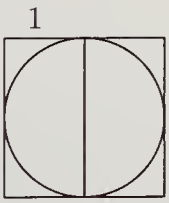
[*Fig. 6*]

$\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7}$ etc.

[*Tschirnhaus*]

$\frac{1}{\quad}$

[*Leibniz*]



$\frac{1}{1000\,000\,0}$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc.

[*Fig. 7*]

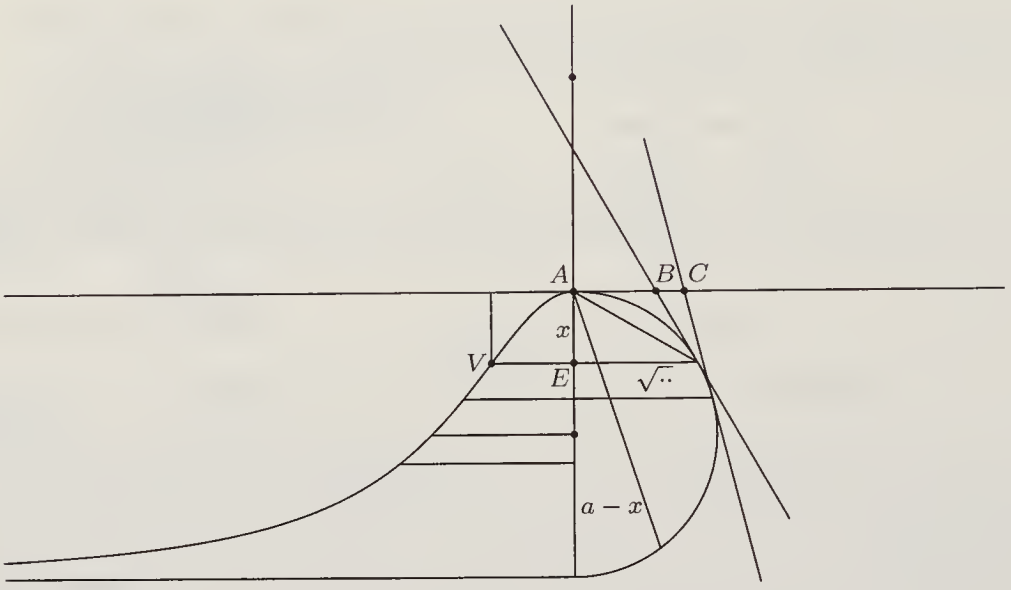
$\frac{a}{1+a}$ ⊓ $\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} -$

11 *(1)* $\frac{1}{1+\mathrm{a}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{1+\mathrm{a}}$ *L*

11 $\frac{a}{1+a}$ ⊓: Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der linken durch Quadratur.

$yx \sqcap a^2.$ $\frac{a^2}{y} \sqcap x.$ $\frac{a^2}{a+z} \sqcap x$

$x^2 \sqcap a^2 - y^2$



[*Fig. 8 (Bezeichnungen* $\sqrt{..}$ *und* $a - x$ *von Tschirnhaus)*]

$\frac{a^2}{a^2-x^2} \sqcap z$

$+$

[*Tschirnhaus*]

$ax - xx \propto yy$

[*Leibniz*]

$\frac{1}{2;3,4}$

4 *(1)* ax *(2)* $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ *L* 4 + *erg. T*

2–6 Leibniz bezeichnet mit a den Kreisradius, Tschirnhaus hingegen den Kreisdurchmesser.

43. MARGINALIEN IN BARROWS LECTIONES GEOMETRICAE
[Ende Januar 1673 – 1716 (?)]

Überlieferung: *LiH* Marginalien, An- und Unterstreichungen in Bleistift oder Tinte in I. BARROW, *Lectiones geometricae*, London, 1670, Titelauflage in: *Lectiones XVIII ... opticorum phaenomenωn ... Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*, London, 1672: HANNOVER *Leibniz-Bibl.* Leibn. Marg. 0. — Teildruck der Marginalien zu S. 85 und zu den Figuren 119, 122 und 125 sowie zu den Addenda: MAHNKE, *Neue Einblicke*, 1926, S. 23 f.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat Barrows *Lectiones geometricae* (1670) während seines ersten Londonaufenthalts von Ende Januar bis Ende Februar 1673 zusammengebunden mit den *Lectiones opticae* (1669) in der Titelauflage von 1672 erworben (vgl. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673, III, 1 N. 17 S. 87). Erste Hinweise auf die Lektüre der *Lectiones geometricae* finden sich in den *Observata Philosophica in Itinere Anglicano sub initium anni 1673* (Cc 2, Nr. 344, tlw. gedr. in GERHARDT, *Leibniz in London*, S. 165 f.). Leibniz studierte zunächst den optischen Teil (Druck der Marginalien in Reihe VIII), brach die Lektüre der geometrischen Vorlesungen jedoch recht bald ab (Unterstreichungen auf S. 13, 17, 21 und 27). Die eigentliche Beschäftigung mit den *Lectiones geometricae* wurde vermutlich erst durch Tschirnhaus' Eintreffen in Paris Ende September 1675 angestoßen. Tschirnhaus hatte seinerseits ein Exemplar der *Lectiones* in der Titelauflage von 1674 einschließlich der in der früheren Titelauflage fehlenden Addenda auf S. 149–151 aus London mitgebracht (s. Collins an Gregory, 19. (29.) Oktober 1675, *GT* S. 342). Die Marginalien auf S. 85 und zu den Addenda sowie diejenigen zu den Figuren 122 und 125 in Leibniz' Handexemplar dürften in diesem Kontext entstanden sein; letztere sind aufgrund der Verwendung des Integralsymbols nicht vor Ende Oktober 1675 anzusetzen. Die Randbemerkungen zu Fig. 119 überschneiden sich teilweise mit den in anderer Tinte geschriebenen Ergänzungen zur Figur und dürften vorher entstanden sein. Während letztere eindeutig in Zusammenhang mit der Untersuchung *De Quadratura quadratricis* (LH 35 XIII 1 Bl. 236–239), dat. 6. Juli 1677, stehen, könnten erstere auch der auf Juni 1676 datierten N. 86 zuzuordnen sein. Die Marginalien auf S. 131–133 sowie 136 schließlich sind aufgrund der Notation entweder bis Sommer 1674 entstanden oder der hannoverschen Zeit zuzurechnen. Vgl. insgesamt MAHNKE, *Neue Einblicke*, S. 20–25.

Barrows Text ist die Seitenzählung aus der Titelauflage 1672 in eckigen Klammern vorangestellt. Marginalien erscheinen als Fußnoten zum Text bzw. zu den Figuren, Unterstreichungen werden durch Sperrung der entsprechenden Passagen hervorgehoben. Zur Wiedergabe von Leibniz' Ergänzungen von Linien und Punktbezeichnungen innerhalb Fig. 119 wird der ursprünglichen Abbildung von Barrow eine entsprechend erweiterte Figur gegenübergestellt. Die Korrektur eines Druckfehlers auf S. 111, der Nachtrag der Seitenzahl auf der unpaginierten Seite 148 sowie kurze Hinweise auf S. 96 und S. 102 bzgl. der fehlerhaften Heftung des Exemplars (S. 103 f. zwischen S. 95 f. und S. 97 f. eingebunden) werden nicht wiedergegeben.

[S. 13]

... Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem a concursu distinguo, quae tamen a nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primo videamus. ...

[S. 17]

... Quin, ut paucis complectar multa, quae *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis stricte dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam,* quod ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quaedam enim δυσδιήγητα consulto videntur reticenda. Porro simplicis motus alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio, seu motus conversivus*; ...

[S. 21]

... Vel; quod omnes in mobili sitae rectae lineae axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integre peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v.g. linea quaevis circa axem VK rotetur, eo procreabitur motu curva quaedam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet et verisimilitudinis causa non illibenter usurpo) ...

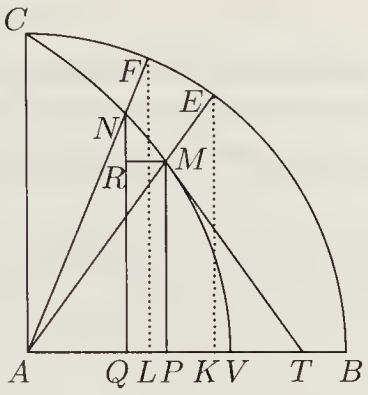
[S. 27]

... Nec ulla sane magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non e rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest e motu parallelo rectae lineae, et puncti in ea; omnis superficies e motu parallelo plani, et lineae in eo (lineae scilicet alicujus e rectis modo jam insinuato motibus progenitae) consequenter et linea quaevis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. ...

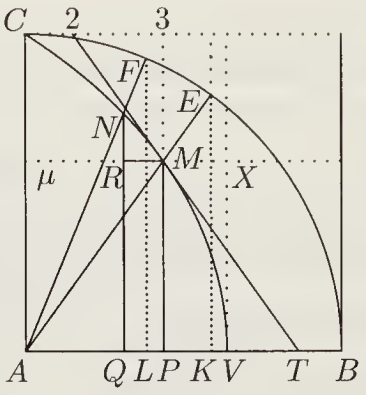
---

18 f. *Am Rand durch senkrechten Strich hervorgehoben.*

[Fig. 119 zu S. 83]



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b einschl. Leibniz' Ergänzungen*]

[S. 83]

...

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix CMV* (ad circulum *CEB* pertinens cui centrum *A*,) cujus axis *VA*; ordinatae *CA*. *MP* ad *VA* perpendiculares.

Protractis rectis *AME*, *ANF*, ductisque rectis *EK*, *FL* ad *AB* perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Estque jam CA . arc. $CB :: NR$. arc. FE. hoc est, $r.p :: a.\frac{pa}{r} =$ arc. FE. et $AM.MP :: AE.EK$; hoc est, $k.m :: r.\frac{rm}{k} = EK$; item $AE \,.\, EK ::$ arc. $FE \,.\, LK$. hoc est $r.\frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r}.\frac{pma}{rk} = LK$. Verum $AM.AE :: AP.AK$; hoc est $k.r :: f.\frac{rf}{k} = AK$. ergo $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} = AL$. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $= ALq$; adeoque $LFq = \frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} =$

---

2 *Oben rechts, teils innerhalb der Figur:* $\frac{CA}{CEB} \sqcap \frac{NR}{FE}$.

Unter der Figur: AT: $\sqcap \frac{\overline{AM}^2}{AV}$.

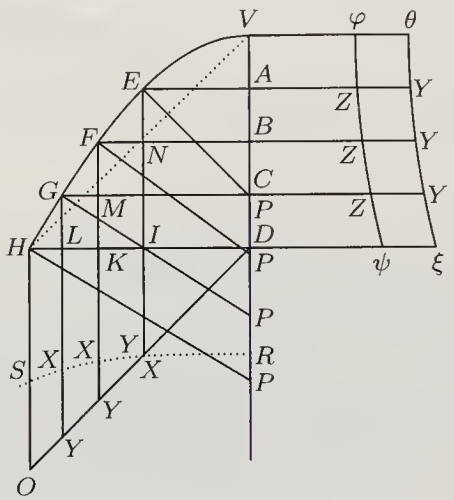
---

2 *Fig. 1a, 1b*: vgl. N. 86 Fig. 1, Gln. 1 (S. 563 Z. 17) und 17 (S. 565 Z. 2) sowie *De Quadratura quadratricis*, dat. 6. Juli 1677.

$\frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$.

Est autem $AQq.QNq :: ALq.LFq$; hoc est $Q : f - e.Q : m + a :: ALq.LFq$. hoc est $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *aequatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *praescriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam $AT = \frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, $AV = \frac{rr}{p}$) erit $AT = \frac{AMq}{AV}$; seu, $AV.AM :: AM.AT$.

[Fig. 122 zu S. 85–88]



[*Fig. 2*]

9 *Oberhalb und links neben der Figur:*

$AZ \sqcap AP$. $VD\psi\varphi \sqcap \frac{DH^2}{2} \sqcap \int \overline{AZ}$.

$\int \overline{ZAE} \sqcap \frac{DH^3}{3}$. $\int \overline{ZAEEA} \sqcap \frac{DH^4}{4}$.

$\int \overline{VAZ\varphi}, \widehat{\ } AZ \sqcap \frac{\overline{VAZ\varphi}^2}{2}$.

$VP \sqcap AY$. $\int \overline{AY} \sqcap \frac{VH^2}{2}$.

$IX \sqcap AP$. $\int \overline{DIX}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AZ^2}$ ad VD.

9 *Fig. 2*: Der Verlauf der Kurve $\theta Y \xi$ ist in Barrows Figur nicht korrekt wiedergegeben.

[S. 85]

Lect. XI.

Reliquis utcunque patratis, apponemus jam *quae ad magnitudinum e tangentibus* (seu e perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata*; de compluribus utique selectiora quaedam.

I. Sit curva quaepiam VH (cujus axis VD, applicata HD ad VD normalis) item linea $\varphi Z\psi$ talis, ut si a curvae puncto libere sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, et recta EAZ ad axem perpendicularis, sit recta AZ interceptae AP aequalis; erit *spatium* $AD\psi\varphi$ *aequalis semissi quadrati* ex recta DH.

...

[S. 86]

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, etc. aequatur *trienti cubi* ex base DH.

...

III. Simili ratione constabit summam $AZ \times AEq + BZ \times BFq + CZ \times CGq$, etc. aequari $\tau\tilde{\omega}\ \frac{DHqq}{4}$; et esse summam $AZ \times AE$ cub. $+ BZ \times BE$ cub. $+ CZ \times CG$ cub. etc. $= \frac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit $VD\psi\varphi$ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, aequisectus; si concipiantur singula spatia $VAZ\varphi$, $VBZ\varphi$, $VCZ\varphi$, etc. in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, etc. respective singulas duci, quae proveniet summa adaequabitur ipsius spatii $VD\psi\varphi$ semiquadrato.

...

[S. 87 f.]

...

VII. E dictis porro sequitur, si omnes (vertici, et perpendicularibus interjectae) VP

---

9 *Daneben:* Novi dudum.

---

26 Novi: vgl. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. sowie im vorliegenden Band N. 22 S. 184 Z. 15 f. vom Januar 1675.

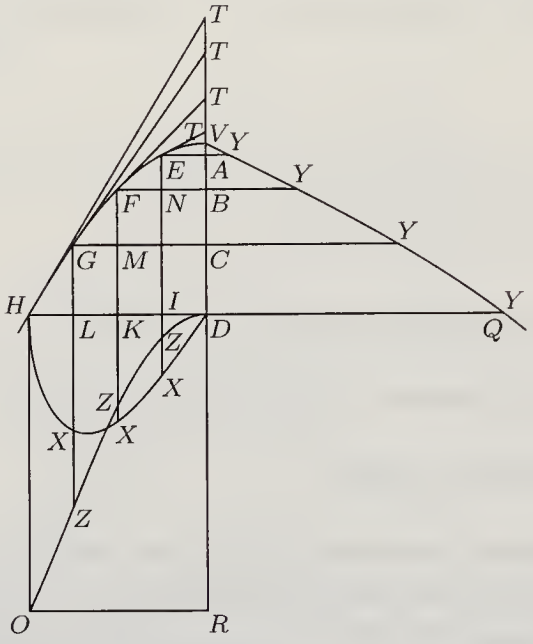
per respectiva puncta A, B, C, etc. Concipiantur applicatae, puta ut AY, BY, CY, etc. respectivis VP aequentur; erit e sic applicatis *constituum spatium* $AD\xi\theta$ *aequal. semisse quadrati ex subtensa* VH.

...

VIII. Porro, si (positis iisdem) sit curva $RXXS$ talis, ut sit $IX = AP$, et $KX = BP$; et $LN = CP$, etc. erit *solidum factum ex spatio* $VD\psi\varphi$ *circa axem* VD *rotato subduplum solidi ex spatio* $DRSH$, *itidem circa axem* VD *rotato, confecti.*

...

[Fig. 125 zu S. 88 f.]



[*Fig. 3*]

[S. 88 f.]

...

X. Sit rursus curva quaepiam VH (cujus axis VD, basis DH) et linea $DZZO$ talis, ut a curvae puncto quopiam, ceu E, ducta recta ET, quae curvam tangat, et recta EIZ

---

10 *Links neben und rechts unterhalb der Figur:*

$IZ \sqcap AT$. $\int \overline{IZ}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE}$ ad VD.

$\int \overline{DIZ}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE^2}$ ad VD.

$\int \overline{ZIDDI}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE^3}$ ad VD.

ad basin parallela, sit perpetuo IZ aequalis ipsi AT; dico *spatium* DHO *spatio* VDH *aequari.*

...

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

...

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, etc. aequatur summae quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, etc.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, etc. triplam esse summae $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, etc. hoc est aequalem summae cuborum ab omnibus AE, BF, CG, etc. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

...

[S. 131]

Lect. XIII.

Aequationum naturam e terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidius explicuit *Cartesius*. Eam ego jam e linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sane modus rem praesertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi aequationes, quae *coefficientes* habent easdem.

Aequationum Series prima.

$$\begin{aligned} a + b &= n. \\ aa + ba &= nn. \\ a^3 + baa &= n^3. \\ a^4 + ba^3 &= n^4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

...

23–26 *Am Rande:*

$$1 + b = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array} \right\} \text{Hyp.}$$

[S. 132]

...

Series secunda.

$$\begin{aligned} a - b &= n. \\ aa - ba &= nn. \\ a^3 - baa &= n^3. \\ a^4 - ba^3 &= n^4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

...

[S. 133]

...

Series tertia.

$$\begin{aligned} b - a &= n. \\ ba - aa &= nn. \\ baa - a^3 &= n^3. \\ ba^3 - a^4 &= n^4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

...

4–7 *Am Rande:*

$$1 - b = \left\{ \begin{array}{l} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array} \right\} \text{Hyp.}$$

12–15 *Am Rande:*

$$b - a = \left\{ \begin{array}{l} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array} \right\} \text{Circ.}$$

[S. 136]

...

Series quarta.

$$\begin{aligned} a + \frac{cc}{a} &= n. \\ aa + cc &= nn. \\ a^3 + cca &= n^3. \\ a^4 + ccaa &= n^4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

...

[S. 151 (nicht paginiert, leer)]

4–7 *Am Rande:*

$$1 + b^2 = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array} \right\} \text{Hyp.}$$

9 *Am oberen Rande:* Vidi addenda. pag. 149. 150. 151. *Animadverti* inquit *potuisse secundo Appendiculae tertiae lectionis XII problemati pag. 122.*

---

12 inquit: s. I. BARROW, *Lectiones XVIII ... opticorum phaenomenωn ... Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*, London, 1674, S. 149.

44. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS TERTIA

1. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 3. 1 Bl. 2°. Ca 1 2/5 S. Das zweite Blatt des ursprünglichen Bogens hat Leibniz in hannoverscher Zeit mit Aufzeichnungen zur Infinitesimalrechnung beschrieben und abgetrennt (Cc 2, Nr. 847; Druck in einem späteren Band der Reihe). Nach Tinte und Duktus ist dabei wohl auch die Anmerkung Z. 19 f. verfasst worden. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Brief*, 1851, S. 354–358; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 127–131; 3. *LBG*, 1899, S. 157–160; 4. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 84–90.
Cc 2, Nr. 1106_1

1. Novemb. 1675

Analyseos Tetragonisticae pars III.
Usus Centrobarycae

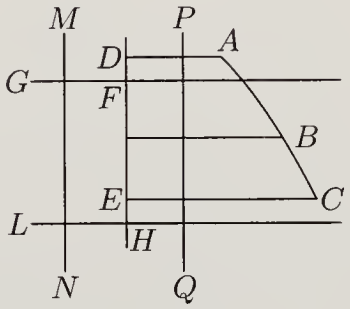


fig. 1.

Diu est quod observavi dato curvae ABC vel figurae curvilineae $DABCE$ momento ex duabus rectis inter se parallelis ut GF, LH; (vel $MN. PQ.$) haberi aream figurae, quoniam duo momenta different inter se cylindro figurae cujus altitudo distantia

---

12 f. *Rechts daneben:* Prima erat 25. Octob. 2da 29. Octob.
Unter Fig. 2, in anderer Tinte u. anderem Duktus: Scheda 2da notanda de differentiali calculo tunc mihi rudius cognito, et satis tantum quantum ad scopum.

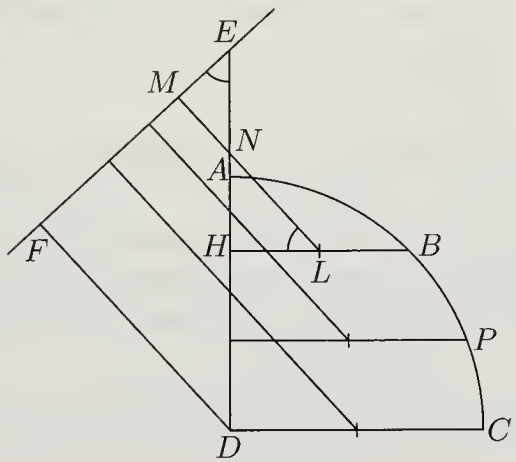
13 Usus Centrobarycae *erg. L*

---

15 observavi: vgl. z. B. VII, 4 N. 45 S. 767. 18 Prima: N. 38; 2da: N. 40.

parallelarum. Hoc verum est in omnibus progressionibus, sive Numericis sive linearibus. Id est etiamsi non adhibeantur figurae curvilineae sed polygona ordinata. Id est tametsi differentiae inter terminos non sint infinite parvae. Sit quaelibet quantitas ordinata, ut z. sit numerus ordinalis x. erit $b\overline{\text{omn } z} \sqcap - \text{omn } \overline{zx} + \text{omn}\overline{z \frown x} + b$. idque per se patet ex solo calculo. Ope hujus regulae inveniuntur summae terminorum progressionis Arithmeticae replicatae reciprocae. Et haec multiplicatio locum habet, cum quaeritur momentum ordinatarum ex recta ad axem perpendiculari.

Sed si quaeratur momentum ex alia recta, regula generalis haec est: ex quantitatum quarum summae momentum quaeritur, singularum centris gravitatis ducatur perpendicularis ad rectam librationis. Summa rectangulorum sub distantiis sive perpendicularibus et quantitatibus aequabitur momento ex recta data. Unde si sit recta aequilibrii axi eadem, statim sequitur momentum figurae ex axe, aequari summae quadratorum dimidiatorum. Et cum axi parallela est, ab eo differre data quantitate: sed sumamus aliam rectam in circulo exempli causa fig. 2.



[*Fig. 2*]

Sit quadrans $ABCD$. vertex A. centrum D. Detur alia recta EF. ita scilicet, ut data sit DF perpendicularis et FE quo diameter ei occurrit, adeoque et DE. Sit ordinata

1 parallelarum. *(1)* | Hinc si qva *streicht Hrsg.* | sit series *(2)* Hoc *L* 4 † omn $\overline{\text{zx}}$ † omn $\overline{\text{z} \frown \text{x} + \text{b}}$ *L ändert Hrsg.* 6 reciprocae. *(1)* Sed si *(a)* numerus non sit *(b)* momentum qvaeratur *(aa)* in plano *(bb)* ex rectae in in eodem plano sitae non axi perp *(2)* Et *L* 10 rectam *(1)* (planum in solido *(2)* aeqvil *(3)* librationis. *(a)* Harum *(aa)* summa *(bb)* in ipsas datas ductarum summa *(b)* summa *L* 16 vertex | B. *ändert Hrsg.* | centrum *L*

5 inveniuntur: s. VII, 3 N. 38_2 S. 384.

circuli HB. cujus dimidium punctum L. Ducatur LM perpendicularis ad FE. patet $\bigtriangledown^{la}$ EFD. et EMN (N punctum intersectionis ML. AD) et LHN esse similia. Sit $HD \sqcap x$. erit $HL \sqcap \frac{y}{2} \sqcap \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}$. Jam ob triangula similia $\frac{NH}{HL} \sqcap \frac{DF \sqcap d}{FE \sqcap f}$. Ergo $NH \sqcap \frac{d}{2f}\sqrt{a^2-x^2} \sqcap \frac{y}{2}\frac{d}{f}$. Ergo $EN \sqcap DE\,(\sqcap e) - HD\,(\sqcap x) - NH\,(\sqcap \frac{d}{2f}y)$. Ergo $EN \sqcap e - x - \frac{dy}{2f}$. Jam $NL \sqcap \sqrt{NH^2+HL^2} \sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4f^2}y^2+\frac{y^2}{4}} \sqcap \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}$. et $\frac{MN}{EN} \sqcap \frac{NH}{NL}$. sive $MN \sqcap \frac{NH, EN}{NL}$. adeoque $MN \sqcap \frac{\frac{yd}{2f}, \frown e-x-\frac{dy}{2f}}{\frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}} \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}}\ \overline{e-x-\frac{dy}{2f}}$. et $ML \sqcap MN + NL \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}}\ \overline{e-x-\frac{dy}{2f}} + \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2}+1}$. ($e \sqcap \sqrt{f^2-d^2}$[])] sive $ML \sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}-x-\frac{d}{2f}y}+\frac{d^2+f^2}{2f}y}{\sqrt{d^2+f^2}} \sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}-x}+\frac{f}{2}y}{\sqrt{d^2+f^2}}$. Qui calculus cuilibet curvae communis est sumta semper x. pro abscissa, et y pro ordinata.

Rectangulum ergo sub ML et $HB(\sqcap y)$ sive momentum cujusque ordinatae ex recta EF ponderatae sive ωa erit $\sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}y-xy}+\frac{f}{2}y^2}{\sqrt{d^2+f^2}}$.

2 ML. *(1)* ND *(2)* AD) *(a)* esse *(aa)* communia *(bb)* similia. Ergo *(b)* et *L* 11–313,1 erit $\sqcap$ $\left|\frac{d\,\overline{\sqrt{f^2-d^2}y-xy+\frac{f}{2}y^2}}{\sqrt{d^2+f^2}}\right|$ *ändert Hrsg.* |. *(1)* Unde patet ad habendum curvae momen *(2)* Ergo *(a)* | ex *streicht Hrsg.* | dat *(b)* omn. *L*

7 $e \sqcap \sqrt{f^2-d^2}$: Richtig wäre $e \sqcap \sqrt{f^2+d^2}$. Leibniz rechnet konsequent mit dem falschen Wert bis S. 313 Z. 17; dies beeinträchtigt jedoch nicht die allgemeinen Überlegungen.

Ergo omn. ω. habebuntur ex datis omn. y. omn. xy. et omn. y^2. vel etiam si ex his quatuor dentur tres dabitur quartum. Jam omn. xy. aequantur momento figurae ex vertice. omn. y^2. aequantur [duplo] momento figurae ex axe. Ergo datis tribus figurae momentis, ex duabus scilicet rectis inter se perpendicularibus, et tertia qualibet datur ejus area. Sed hoc tamen theorema minus generale est, quam prius in prima hujus Schediasmatis pagina, ubi nihil refert quis sit angulus rectarum, modo dentur tria momenta. Intelligitur autem semper, in eodem plano. (Hoc interim theorema sufficit ad curvam Hyperbolae primariae.[)] Si f sit infinita seu si FE et ED. parallelae, fiet $dy + \frac{y^2}{2} \sqcap \omega a$. quod dudum constat.

Notandum diversis calculis hac schediasmatis plagula, et prima[,] aream quantitatis cujus centrum gravitatis (etsi NB. non ipsa tota) in plano dato positum est, ex datis tribus momentis ex tribus ejusdem plani rectis inveniri. Unde videndum an non comparati inter se eventus quiddam novum praebeant. Si non figurae sed curvae ut omnium BP, PC etc. momenta quaerantur ex punctis $B. P. C.$ tantum ad rectam dimittendae perpendiculares sive ordinatae. Nihil enim refert ex extremo an medio ipsius BP. v. g. ducantur, differentiae enim infinite parvae inter duas ejusmodi perpendiculares. Ergo curvae elementum appellando z. momentum curvae ex recta EF, fiet: $\frac{d\sqrt{f^2 - d^2}z - dxz + fyz}{\sqrt{d^2 + f^2}}$.

Pleraque theoremata Geometriae indivisibilium quae apud Cavalerium, Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant statim ex calculo patent, ut v. g. perpendi-

---

7 f. *Am Rande:* NB. ista ad curvam si applicentur, [*bricht ab*]

5 Sed *(1)* hic calculus tamen minus *(2)* hoc *L* 13 praebeant. *(1)* Vel ideo qvoniam duorum v. g. in curva *(2)* si *L* 19–314,1 v. g. *(1)* superficiem ex axe aeqvari summae superfici *(2)* perpendiculares *L*

---

5 f. prima ... pagina: N. 38 S. 267 Z. 2–4. 18 Cavalerium: B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635. 18 Vincentium: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647. 19 Wallisium: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478); *Mechanica*, 1670–1671 (*WO* I S. 570–1063). 19 Gregorium: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667; *Geometriae pars universalis*, 1688; *Exercitationes geometricae*, 1668 [Marg.]; vgl. N. 47. 19 Barrovium: I. Barrow, *Lectiones geometricae*, 1672 [Marg.]; vgl. N. 43.

culares ad axem aequari superficiei seu momento curvae ex axe; patet calculo. Nam invenies perpendicularem aequari rectangulo ex curvae Elemento in ordinatam. Talia igitur theoremata non aestimo, quemadmodum illa quoque de applicationibus interceptarum in axe, (inter tangentes et ordinatas) ad basin. Talia ergo theoremata nihil novi detegunt; nec nisi calculi compendias praebent. At meum theorema de dimensione segmentorum rem detegit novam, quia spatium cujus quaeritur dimensio aliter resolvit, nempe non tantum in ordinatas sed in triangula. Centrobaryca etiam forte aliquid detegunt novum. Poterit forte facilis methodus tradi, qua sine figuris calculo deducantur ex figura quae ex ea pendent. Gregorii theorema, de ductibus parabolarum subalternis aequalibus cylindro patet statim ex calculo[,] nam circuli ordinata $y \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$, id est $\sqcap \sqrt{a+x}$ in $\sqrt{a-x}$, eodem modo $\sqrt{2av - v^2} \sqcap y$. ergo $y \sqcap \sqrt{v}$ ⌢ in $\sqrt{2a - v}$. quae duo eodem redeunt.

Si eadem ordinata y per quandam quantitatem z, multiplicetur, et postea per eandem z † cognita sive constante b, erit differentia summarum productorum aequalis cylindro figurae: ut $zy,, - zy + by \sqcap by$. Hoc etsi per se manifeste pateat in genere, applicationes tamen non semper manifestae, sit v. g, $\frac{x^2}{ax - b^2}$. id est $\frac{x, x}{\sqrt{ax} + b, \sqrt{ax} - b} \sqcap y$. multiplicando per $\sqrt{ax} + b$ fiet $\odot \frac{x^2}{\sqrt{ax} - b}$. et multiplicando per $\sqrt{ax} - b$ fiet: $\frac{x^2}{\sqrt{ax} + b}$ ☽. Quoniam autem pro $\frac{ax^2}{ax - b^2}$, fieri potest $x + \frac{b^2 x}{ax - b^2}$ quae pendet ex quadratura hyperbolae, itaque una ex his duabus data, ☽. et ⊙. dabitur et altera supposita hyperbolae quadratura. $\frac{x^2}{\sqrt{ax} + b} \sqcap x\sqrt{ax} - \frac{bx\sqrt{ax}}{\sqrt{ax} + b}$.

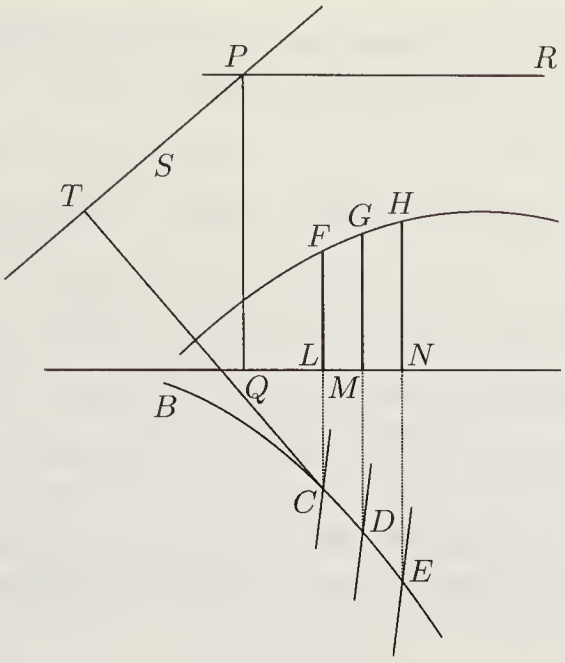
---

14 f. *Dazu am Rande:* Idem est si sit $z + b$ et $z + d$.

1 f. calculo *(1)*, si valorem super *(2)* nam invenies *(a)* superfi *(b)* perpendicularem *L*

---

5 theorema: vgl. VII, 4 N. 39_1 S. 617–620. 9 Gregorii theorema: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VII, prop. LXXXIV, S. 762 f. 20 $\frac{x^2}{\sqrt{ax} + b}$: Es müsste $\frac{ax^2}{\sqrt{ax} + b}$ heißen.



[*Fig. 3*]

Suppone curvae cuidam in aliquo plano positae $BCDE$, in punctis C, D, E, imponi alterius curvae FGH ordinatas, perpendiculariter ad planum, et ita ut medium ordinatae punctum incidat in planum. Patet ipsas LC, MD, NE, ductas in FL, GM, HN, id est in $C.D.E$, impositas curvae $BCDE$ seu rectangula, FLC, GMD, HNE, sive ductum horum duorum planorum in seinvicem, aequari momento omnium LC, MD, NE, etc. Unde si PR sit alius axis et intervallum a QL. recta PQ. momentum ex PR, differet a momento ex QL, cylindro ipsarum LC, MD etc. in PQ. Quod si jam tum ex recta PQ

3 *Über* perpendiculariter: (imo et aliter)

7 si *(1)* PQ sit recta constans, et momentum ex *(2)* PR *L* 7 a | QE. *ändert Hrsg.* | recta *L*

6–8 momento ... PQ: Die Produkte $FL \cdot LC$, $GM \cdot MD$, $HN \cdot NE$ etc. geben nicht das Moment der LC, MD, NE etc., sondern dasjenige der mit ihrem Schwerpunkt nach C, D, E etc. verschobenen Längen FL, GM, HN, etc. bzgl. der Achse QL. Dementsprechend unterscheiden sich die Momente bzgl. der Achsen PR und QL nicht um das Produkt des Achsenabstandes PQ und der Längen LC, MD, NE etc., sondern um dasjenige von PQ und den Längen FL, GM, HN etc., d. h. der längs der Kurve CDE errichteten krummlinigen Fläche.

tum alias ex alia recta ut TS. aliud haberetur momentum ejusdem figurae ordinatarum LF, in C impositarum, tunc haberetur etiam cylinder omnium LF. quod probo: Quia appellando QL, x. CL, y. erit $TC \sqcap \frac{f}{a}x + \frac{g}{a}y + h$. quae ducta in ipsam z. dabit: $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$. Jam zx. datur, supposito momento ex PQ. quod semper idem sive sint ipsae z. ubi erant in LF, MG, etc. sive sint positae in C. D. E. Datur et yz. sive rectangulum pro FLC, sive ductus ex hypothesi. Ergo si detur adhuc unum momentum, ordinatarum curvae in C. D. E impositarum, sit ipsum aequale $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$. dabitur hz. seu cylinder quaesitus. Hinc eligendae curvae $BCDE$, tales, ut per diversas earum ordinatas vel in axem QL, vel in axem TS. multiplicari possint ordinatae curvae datae, cum utilitate quadam seu simplicitate. Ad quod eae curvae utiles, quae plures habent axes utiles, ut Hyperbola Circularis, seu primaria quae duas habet asymptotos, et axem, et axem conjugatum.

3 *Am Rande:* LF, vel $MG \sqcap z$.

1 ejusdem *(1)* curvae qvae eodem modo p *(2)* figurae L

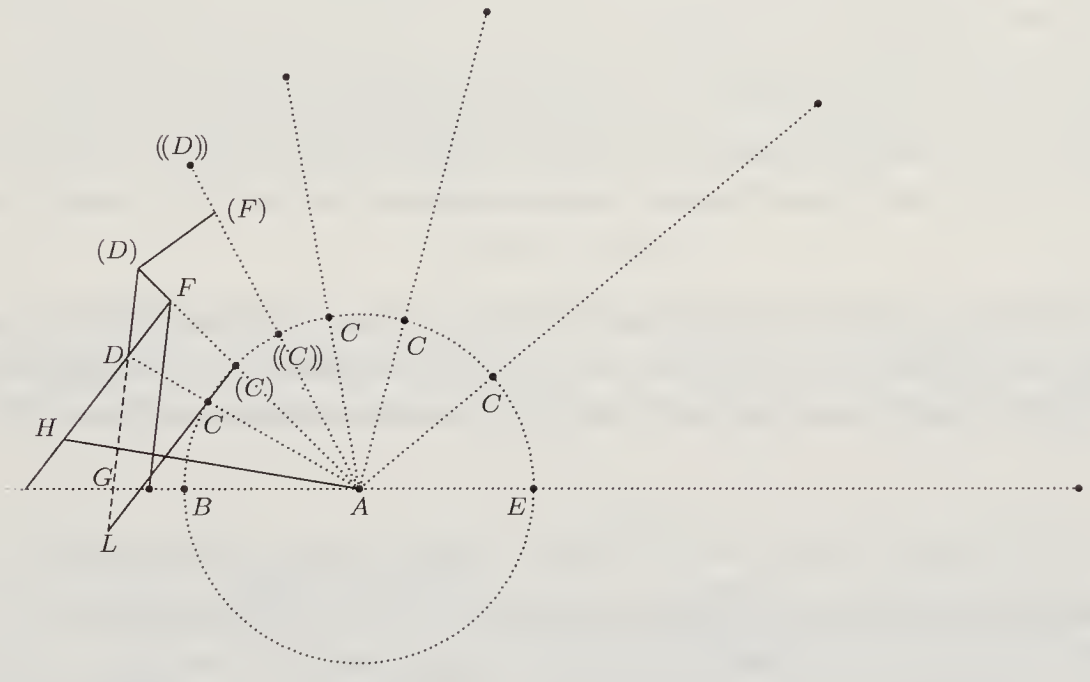
45. LINEA BERTHETIANA

3. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 12. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 12 r°. Auf Bl. 12 v° III, 1 N. 68.
Cc 2, Nr. 1110

3. Novemb. 1675

Linea Berthetiana



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

7 Linea Berthetiana: Leibniz hat die Bertetsche Kurve im Herbst 1673 durch J. Ozanam kennengelernt; vgl. VII, 4 N. 50 u. III, 1 N. 68 S. 308. 8 *Fig. 1*: Eine abgebrochene Vorstufe in Blindtechnik wird nicht abgedruckt. Leibniz hat für die Konstruktion teilweise die von der Rückseite durchscheinenden Linien der Figur von III, 1 N. 68 sowie Blindlinien verwendet; sie werden jeweils punktiert wiedergegeben.

De Curvis protensis

Linea quam R. P. Berthet imaginatus est. Centro A. radio AB. Circulus BCE. Radio AC producto adjiciatur recta CD aequalis arcui BC. Et curva quae transeat per omnia puncta D. designetur. Visa mihi est haec curva satis elegans, ac digna in qua methodos meas experirer.

Ac primum quaeramus ejus tangentem in $A(C)(D)$. Sit $A(C)F \sqcap ACD$. Jungantur $DF, C(C), D(D)$. et $(D)D$ producta occurrat diametro AB in G.

Sed brevior longe atque pulcherior constructio haec est. In producta arcus generatoris $B(C)$ tangente ad diametrum in (C). sumatur $(C)L$ quae sit ad $(C)(D)$ arcum ut DF est ad $F(D)$ id est ut DF est ad $C(C)$, id est ut AF summa arcus et radii est ad radium. Constructio ergo huc redit, in tangente ultima id est ad (C) arcus generatoris $B(C)$ producta in eam partem a qua incipit curvae generatio id est versus B sumatur $(C)L$ quae sit ad arcum extensum CF, ut FA summa arcus extensi et radii est ad radium CA. Juncta $(D)L$ est tangens quaesita ob Triangula similia $(D)FD$ $(D)(C)L$. Si curva BC non sit arcus circuli, et arcus sumatur in curvae perpendiculari producta, eadem locum

---

19 *Zur Stufe (2) der Variante, über* similia: Error. *Dazu am Rande:* Non sunt similia, quia angulus $(D)FD$ non est rectus. At inquies parallelus est tangenti arcus circuli CL, qui normalis ad radium AC. R. Non est normalis ad hunc radium, $A(C)$.

7 f. in G *(1)* pro *(2)* qvaeratur recta AG. Habemus Triangula similia (D)GA, (D)FD. *(a)* Ergo *(b)* item DFA, et C(C)A. Ergo $\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{C(C)} \sqcap \beta} \sqcap$ *(aa)* $\mathrm{z} \sqcap$ *(bb)* $\frac{\mathrm{a+z} \sqcap \mathrm{a+} \operatorname{arc} \mathrm{BC}}{\mathrm{a}}$. Ergo $\mathrm{DF} \sqcap \frac{\mathrm{a+z}}{\mathrm{a}}\beta$. et (D)F $\sqcap$ β. Ergo (D)D $\sqcap$ $\sqrt{\beta^2 + \frac{2\mathrm{az} + \mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2}{\mathrm{a}^2}\beta^2}$ et $\frac{\mathrm{A(D)} \sqcap \mathrm{a+z+}\beta}{\mathrm{(D)G}} \sqcap \frac{\mathrm{D(D)}}{\mathrm{(D)F} \sqcap \beta}$ et DG $\sqcap$ $\frac{\mathrm{a}\beta + \mathrm{z}\beta + \beta^2}{\mathrm{(D)D}} \sqcap \frac{\mathrm{za} + \mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \boxed{2}\mathrm{a+z}}}$ *(aaa)* Ergo $\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{z+a} \sqcap \mathrm{DA}} \sqcap$ *(bbb)* Itaqve per punctum *(ccc)* Itaqve per punctum curvae D ducatur recta arcus | circuli, *gestr.* | generatoris tangenti CL parallela in qva sumatur HF aeqvalis radio circuli, jungatur AH fiatqve DG ad DA, ut HF ad HA, *(aaaa)* erit DG tangens *(bbbb)* centro D radio DG descriptus circulus secabit diametrum productum AB in G. erit *(aaaaa)* DG *(bbbbb)* juncta DG tangens qvaesita *(3)* sed L

---

6 tangentem: vgl. VII, 4 N. 50 S. 810 f.

habebit constructio. Sed punctum A. non erit constans. Sin punctum A sit constans, et arcus sumatur simpliciter in recta AC. producta, qualiscunque illa sit, tunc loco tangentis $(C)L$. dicendum est cum punctum A fixum sumendam perpendicularem ad ipsam AC.

Descriptio hujusmodi Curvarum uno tractu

Sit filum curvae circumplicatum, et in regula mobili circa centrum A, ad verticillum sive orbiculum veniens quem ambit, et inde reflexum in ipsam AC longitudinem extenditur et in quoddam mobile desinit, quod semper in repta AC progredi conatur. Mota ergo regula circa centrum A, si verticillus esset immobilis, et AC non semper eadem (quod in solo circulo contingit) alia describeretur curva, et distantia verticilli a curva protensioni arcus decederet, quas curvas etiam considerare licet. Sin vero verticillus ita sit mobilis susque deque in recta AC. ut semper sequatur curvam materialem et ea cohaereat, tunc filum evolutum a protrahente extendetur in rectam AC. et describetur curva desiderata.

Quadratura Spatii

Patet Triangula ADF spatium complere, secta ergo curva Circuli in partes aequales, patet Rectas AD crescere arithmetice, $a + z$. ponendo z. arithmetice proportionales seu arcus, ipsae autem DF sunt $\frac{a+z}{a}\beta$. et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ADF est: $\frac{a+z}{a}\beta \frown \frac{a+z}{2}$ sive

---

1 *Zu* habebit: Imo non habebit.

3 *Daneben:* Error. Alio accedere debent. Nam si recta AC perpendicularis ad curvam non concurrent duae perp. in A. Si duae rectae concurrant in A. non sunt $(D)F$ et $C(C)$ aequales.

3 (C)L. *(1)* adhibenda est perpendicularis *(2)* dicendum est | cum ... fixum *erg.* | sumendam L
4 *(1)* Gen *(2)* Descriptio L 10 etiam *(1)* calculare lic *(2)* considerare L 12 a *(1)* protendente ext *(2)* | protrahende *ändert Hrsg.* | extendetur L

---

17 non habebit: Die verallgemeinerte Konstruktion ist zulässig, wenn A als der variable Krümmungsmittelpunkt der Kurve aufgefasst wird.

$\frac{a^2+2az+z^2}{2a}\beta$. Summa omnium $\frac{a^2}{2a}\beta$ est $\frac{a}{2}z$. Summa omnium $\frac{2a\beta z}{2a}$ est $\frac{z^2}{2}$. Denique summa omnium $\frac{z^2\beta}{2a}$ est $\frac{z^3}{6[a]}$. Duplum ergo Spatii $AB(D)$ est rectangulum $A(D)(C)$, auctum alio rectangulo quod sit ad ipsum ut quadratum ab ipsa $(D)(C)$ est ad triplum rectangulum $(D)A(C)$ sive $az+z^2+\frac{z^3}{3a}$. posita $z \sqcap (C)D$ et $a \sqcap A(C)$.

2–4 *Nebenrechnung:* $\frac{z^2+az}{\frac{z^3}{3a}} \sqcap \frac{3az+3a^2}{z^2}$

46. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLA

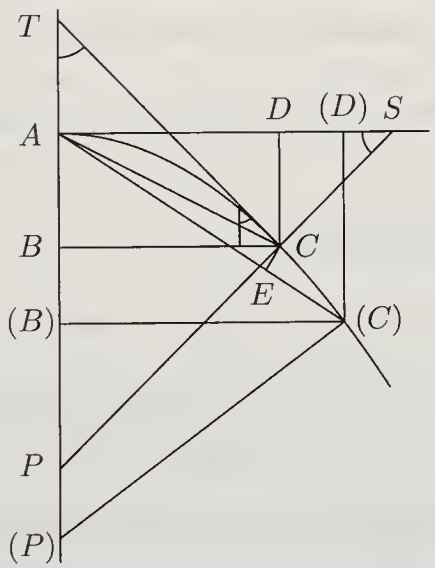
11. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 9 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S. Untere Hälfte von Bl. 2 v° leer. Die verblassten Ziffern der Datumsangabe 11. Novemb. 1675 sind zu einem unbekannten Zeitpunkt von nicht identifizierter Hand (möglicherweise von Leibniz selbst) in Tinte nachgezogen worden. Dabei wurde die 5 der Jahreszahl mit einer 3 überschrieben. Es wird die ursprüngliche Datumsangabe wiedergegeben. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 32–40; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 132–139; 3. *LBG*, 1899, S. 161–167; 4. (englische Übersetzung von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 93–103.
Cc 2, Nr. 1120

11. Novemb. 1675.

Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae: Ejus hodie solutionem reperi cujus analysin dabo.



[*Fig. 1*]

12 f. Novemb. *(1)* 1675 *(2)* | 1673 *in unbekannter Hand, ändert Hrsg.* | Methodi *L* 15 f. Eius ... dabo *erg. L*

14 superiore anno: vgl. z. B. N. 15, dat. Dezember 1674.

Nimirum quaeritur curva $C(C)$ in qua ipsae BP intervalla ordinatarum BC, et perpendicularium ad curvam, PC, in axe $AB(B)$ sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta $AD(D)$ ad ipsam $AB(B)$ axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD ita ut ipsae AD abscissae ex axe $AD(D)$, sint ipsis BC ordinatis ad axem $AB(B)$, aequales. Erunt et CD ordinatae ad axem $AD(D)$ aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$. Appellemus $AD \sqcap BC \sqcap y.$ et $AB \sqcap DC \sqcap x.$ Ipsam BP vocemus ω et ipsam $B(B)$ vocemus z.

Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int \overline{\omega z} \sqcap \frac{y^2}{2}.$ sive esse $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}.$ At ex quadratura Trianguli patet esse $\frac{y^2}{2d} \sqcap y.$ Ergo $\omega z \sqcap y.$ Jam ex hypothesi est $\omega \sqcap \frac{b}{y}.$ Ita enim erunt ipsae ω ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\frac{bz}{y} \sqcap y.$ Adeoque $z \sqcap \frac{y^2}{b}.$ Jam $\int z \sqcap x.$ Ergo $x \sqcap \int \frac{y^2}{b}.$ At $\int \frac{y^2}{b} \sqcap \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x \sqcap \frac{y^3}{3ba}.$ quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x, curvae quaesitae $C(C)$. Inventam ergo habemus curvam, quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A.

Videbimus ergo an verum sit hoc Theorema sane memorabile:

---

9 *Am Rand:* $\underline{\int}$ summa $\underline{d}$ differentia

7 $\sqcap$ x. *(1)* Constat ex alibi *(a)* ex *(b)* a me demonstratis *(aa)* ex *(bb)* omn *(2)* ipsam ... ω *(a)* Constat ex alibi a me demonstratis, esse *(aa)* $\overline{\text{omn}\,\omega} \sqcap \frac{y^2}{2}.$ Ergo $\omega \sqcap \frac{y^2}{2d}.$ *(bb)* $\int \omega \sqcap$ *(b)* et *L*

9 esse *(1)* omn *(2)* $\int \overline{\omega z}$ *L* 9 $\frac{y^2}{2d}.$ *(1)* porro ex hypothesi debet esse *(2)* At *L* 10 qvadratura *(1)* parabolae patet *(2)* Trianguli *L* 14 est *(1)* Geometrica *(2)* Analytica *L*

---

9 alibi: s. Erl. zu N. 40 S. 292 Z. 3. 9 $\frac{y^2}{2d}$: Im vorliegenden Stück benutzt Leibniz zunächst noch $\frac{x}{d}$ für „Differenz der x“ und geht dann ab S. 324 Z. 1 allmählich zu dx über.

„ In Parabola Cubica $C(C)$ sunt BP intervalla perpendicularium ad curvam PC
„ et ordinatarum BC ad axem, in axe ABP sumta ipsis ordinatis BC, reciproce
„ proportionalia.

Hoc calculus tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 \sqcap y^3$. ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c \sqcap \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba \sqcap y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t \sqcap \frac{\not{3}y^3}{\not{3}ba}$. ponendo $BT \sqcap t$ intervallo inter tangentem et ordinatam in axe: Jam $BP \sqcap \omega$ est $\sqcap \frac{y^2}{t}$. Ergo $\omega \sqcap \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} \sqcap \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae ω ipsis y. reciproce proportionales quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus; cujus stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur Curva in qua ipsae BP intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $\omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. Jam $\int \omega \sqcap \frac{y^2}{2}$. Ergo $y \sqcap \sqrt{2 \int \overline{\omega}}$ vel $\sqrt{2 \int \overline{\frac{a^2}{x}}}$. Jam $\int \omega$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura, quae satisfaciat est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura est ex numero Transcendentium.

At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciproce proportionales. Nempe $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\int z \sqcap x$ sive $z \sqcap \frac{x}{d}$ sive fiet: $\omega \frac{\overline{x}}{d} \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\omega \sqcap \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d}$. Et fiet: $x, + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas, erit $\frac{x}{d} \sqcap z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\int x \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{y}} - \frac{y^2}{2}$. et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{y}}$. sive

10 mentem. *(1)* difficilior paulo videtur *(2)* Non *L* 14 est *(1)* logarithmorum seu *(2)* in subduplicata ratione logarithmorum ab *(3)* in *L* 16 BC *(1)* abscissis reciproce *(2)* ordinatis *L* 19 $\int \overline{\frac{a^2}{y}}$. *(1)* sive qvaeritur figura in qva momentum ordinataram ex axe, et abscissarum ex vertice *(2)* sive *(3)* sive *L*

6 methodo tangentium Slusii: s. *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

$d\overline{x^2+y^2} \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae $AC, A(C)$ sunt $\sqcap \sqrt{x^2+y^2}$. Centro A, radio AC, describatur arcus CE, ita ut E cadat in rectam $AE(C)$, erunt ipsae $E(C)$ differentiae inter AC et $A(C)$, sive $EC \sqcap e \sqcap d\overline{x^2+y^2}$. Ergo $e \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis haberemus quaesitum, videtur tamen nihil referre etsi x progressionis arithmeticae sumserimus.

Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsis AD sive y, ipsas EC sive e reciproce proportionales esse. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium, habentur quacunque sint progressione ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est, sed Summa linearum, omnium scilicet $E(C)$ initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium $\underline{e}$ summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur. Quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae non ipsas y.

Sin jam in aequatione superiore $x+\frac{y^2}{2d}, \smile \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ faciamus y. progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{d\overline{x}} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy+\frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. Imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $xy + \frac{yd\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx} \sqcap a^2$. $\odot$

---

15 Nota idem est dx. et $\frac{x}{d}$. id est differentia inter duas x proximas.

3 e $\sqcap$ *(1)* $\sqrt{\mathrm{x}}$ *(2)* $\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$. *L* 15 fiet: *(1)* $\mathrm{x}+\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{d}}$ *(2)* x+ *(a)* $\mathrm{yd}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$. et $\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \mathrm{a}^2$. Imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $\mathrm{xy}+\mathrm{yd}\overline{\mathrm{x}}\mathrm{d}\frac{\overline{\mathrm{y}^2}}{2} \sqcap \mathrm{a}^2$. *(b)* $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}}$ *L*

---

3 $d\overline{x^2+y^2}$: Leibniz vergisst das Wurzelzeichen. Dadurch wird die nachfolgende Gleichung für e inkorrekt; der fehlerhafte Ausdruck für e wird bis Z. 13 beibehalten.

Sed nondum quicquam praestitimus, considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS. dum ipsi AD occurrat in S. esse summam omnium AP applicatarum ad AB, aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD. id est vocando $DS, \sqcap v$. fiet $dy \int y + dy \int v \sqcap dx \int x +$ $dx \int \omega$. sive $dy \int y + dy \int v \sqcap dx \int \frac{a^2}{y}$. ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y. progressionis Arithmeticae, fiet: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \sqcap dx \overline{\text{Log}\, y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. Fiet: $dx \sqcap \frac{y^2}{a^2 - yx}$ et nunc: $dx \sqcap \frac{y^2 + x^2}{2\overline{\text{Log}\, y}}$. Ergo habemus denique aequationem in qua solae supersunt x. et y. extra vincula, nempe: $\overline{y^2 + x^2}$, $a^2 - yx \sqcap 2y^2 \overline{\text{Log}\, y}$. Quae aequatio cum sit determinata locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit hic in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $d\overline{x}$. Quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant quaestionis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facilia hactenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit.

Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans.

In fig. 2. est $BC \sqcap y$. $FC \sqcap d\overline{y}$. Sit punctum G medium ipsius FC. Patet momentum ipsius FC, esse rectangulum sub FC et BG, id est rectangulum BFC. Nam cum sit

2 f. esse *(1)* AP ad *(a)* basin *(b)* axem, s *(2)* omnes AP applicatas *(3)* summam ... AP | applicatas *ändert Hrsg.* | ad L 4 $\mathrm{dx} \int \omega$. *(1)* Jam $\mathrm{dy} \int \mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{y}^2}{2}$. et *(2)* sive L 5 $+ \frac{\mathrm{x}^2}{2} \sqcap$ *(1)* $\mathrm{dx}\overline{\text{Log}\, \mathrm{a}^2}$ *(2)* $\mathrm{dx}\overline{\text{Log}\, \mathrm{y}}$ L 6 $\mathrm{xy} +$ *(1)* $\mathrm{y}^2 \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \mathrm{a}^2$ fiet: $\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2 - \mathrm{xy}}{\mathrm{y}^2}$ at *(a)* supra *(b)* paulo ante *(2)* $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{dx}}$ L 8 nempe: *(1)* $2\overline{\text{Log}\, \mathrm{y}}\mathrm{a}^2 - 2\overline{\text{Log}\, \mathrm{y}}\mathrm{xy} \sqcap \mathrm{y}^4 + \mathrm{y}^2\mathrm{x}^2$ *(2)* $\overline{\mathrm{y}^2 + \mathrm{x}^2}$, L

5 fiet: Die nachfolgende Gleichung ist falsch. Leibniz benutzt sie konsequent weiter bis Z. 8. Die Überlegungen zum Ansatz, durch Heranziehen einer weiteren Differentialgleichung und Anwendung eines Eliminationsverfahrens bei der Lösung der inversen Tangentenaufgabe weiterzukommen, werden davon jedoch nicht beeinträchtigt.

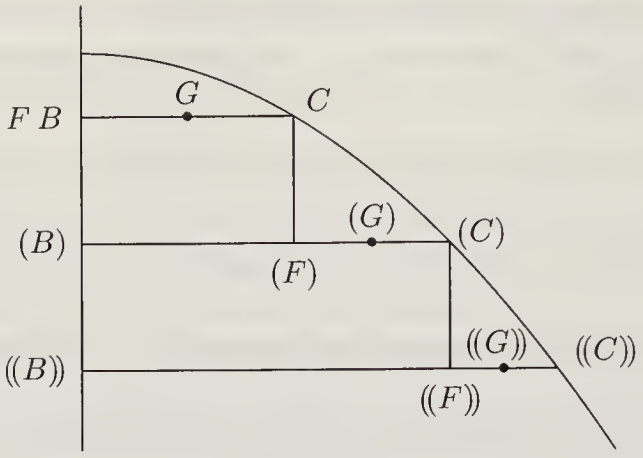


fig. 2.

$BFC + GFC$. posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int \overline{ydy} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Sive momentum omnium differentiarum FC, aequabitur ultimi termini momento. Et $ydy \sqcap d\frac{\overline{y^2}}{2}$ et $y^2dy \sqcap \frac{y\,d\overline{y^2}}{2}$. Porro supra in aeq. $\odot$ faciendo x arithmeticam, fuit $yd\frac{\overline{y^2}}{2} \sqcap a^2 - xy$ sive $d\frac{\overline{y^2}}{2} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$ at idem $\sqcap y\overline{dy}$. Fiet ergo $y\overline{dy} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$. et erit $\int \overline{ydy} \sqcap \int\frac{\overline{a^2}}{y} - \boxed{\int x}\frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int \overline{ydy} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Fiet ergo $y^2 + x^2 \sqcap 2\int\frac{\overline{a^2}}{y}$. ut ante, vel $dy^2 + 2x \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$. et d. ubi jam una, v. g. hic x. pro arithmetice procedente sumta est, non posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x \sqcap \frac{2a^2}{y} - d\overline{y^2}$. quia $d\overline{y^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura, ipsius y. Ipsius y. autem progressio, ut $d\overline{y^2}$ serviat[,] talis sumi debet, ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo

4 f. arithmeticam, *(1)* fiet: $\int \mathrm{yd}\frac{\overline{\mathrm{y}^2}}{2} \sqcap \int \mathrm{a}^2 - \int \mathrm{xy}$ *(2)* fuit *L* 7 vel | $\mathrm{dy}^2 + \mathrm{x}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$ *L* 11 sumi *(1)* potest, *(2)* debet *L*

4 aeq. $\odot$: vgl. S. 324 Z. 16.

ipsae $d\overline{y}$ supponunt ipsas x, non ergo per ipsas invenietur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujusmodi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores utile erit adhuc unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales. Fiet: $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $z\omega \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{2}$. et $z \sqcap dx$. Adeoque fiet: $\omega \sqcap \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{z} \sqcap \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{dx}$. et denique $x + \frac{\frac{d\overline{y^2}}{2}}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \overline{\text{Log}\, y}$ sive $\sqrt{x^2 + y^2} \sqcap AC \sqcap \sqrt{2\,\overline{\text{Log}\, AD}}$. Quae expressio curvae satis est simplex. Requiruntur autem ipsae AB. progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae fieret: $x + \frac{y}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. Sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva in qua ipsae AC ipsis BP aequales, fiet: $\sqrt{x^2 + y^2} \sqcap \omega$. et $\omega \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{2d\overline{x}}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet: $(\int \overline{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqcap) \int AC \sqcap y^2$ sed hoc non sufficit nisi ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. Ut sit $x \sqcap 1$. sit $BC \sqcap (y)$ erit $\sqrt{1 + (y^2)} \sqcap (y^2)$. sive $1 + (y^2) \sqcap (y^4)$. Unde habetur (y) nempe $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$ sive $(y^2) \sqcap \frac{\sqrt{5}}{2}$. et $(y) \sqcap \frac{\sqrt{⑤5}}{\sqrt{2}}$. Porro eodem modo

4 simus *(1)* accuratiores, *(2)* exercitatiores *L* 6 $z\omega \sqcap$ *(1)* y^2 *(2)* z *(3)* | $d\overline{y^2}$ *ändert Hrsg.* | et *L* 6 fiet: *(1)* $x + d\overline{x}$, $\frac{d\overline{y^2}}{2}$ *(2)* ω *L* 8 qvae *(1)* species *(2)* expressio *L* 9 ipsae | AP *ändert Hrsg.* | progressionis *(1)* Geometricae *(2)* arithmeticae *L* 10 $\frac{a^2}{x}$. *(1)* Nota autem dx in x esse *(2)* sed *L* 14 ad *(1)* infinita *(2)* curvam *L*

---

8 $\overline{\text{Log}\, y}$: Es müsste $a^2 \log x$ und in der folgenden Gleichung $\sqrt{2a^2\, \overline{\log AB}}$ heißen. 13 $\sqcap y^2$: Richtig wäre $\frac{y^2}{2}$. Der Rechenfehler wirkt sich, zusammen mit weiteren Versehen, bis S. 328 Z. 3 aus, ohne die Überlegung grundsätzlich zu beeinträchtigen.

$\sqrt{4 + ((y^2))}$ + $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}$ ⊓ $((y^2))$. Ita rursus poterit inveniri $((y))$. Et hujus ope reperietur
AC $A(C)$
tertia AC, et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similius, quo minor assumta est unitas.

x. esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB. esse uniformem. Descriptiones autem quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.

Videndum an $dxdy$ idem sit quod $d\overline{xy}$ et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$ et videtur ut sit. Sit y ⊓ $z^2 + bz$. et x. sit $cz + d$. fiet dy ⊓ $\boxed{z^2} + 2\beta z \boxed{+\beta^2}, \boxed{+bz} + b\beta, \boxed{-z^2}\ \boxed{-bz}$ et fiet dy ⊓ $\overline{2z + b}\beta$. Eodem modo dx ⊓ $+c\beta$. Et ita erit $dydx$ ⊓ $\overline{2z + b}c\beta^2$. At idem produces si statim facias $d\overline{xy}$. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente. Idem est de divisoribus. Sed jam cum earum summae quaeruntur discrimen an sit videndum est, $\int \overline{dx}$ ⊓ x. $\int \overline{dy}$ ⊓ y. $\int \overline{dxy}$ ⊓ xy. Si jam sit aequatio v. g. $dxdy$ ⊓ x. erit $\int \overline{dxdy}$ ⊓ $\int x$. Jam $\int x$ ⊓ $\frac{x^2}{2}$. Ergo $\int \overline{dxdy}$ ⊓ $\frac{x^2}{2}$. sive xy ⊓ $\frac{x^2}{2}$. sive $\frac{x}{2}$ ⊓ y. Quod satisfacit aequationi $dxdy$ ⊓ x. Nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx\, d\frac{x}{2}$ ⊓ x. sive $\frac{dx^2}{2}$ ⊓ x. Quod verum esse constat.

In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$. non est idem quod $\int \overline{xy}$. Ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum.

8–16 *Am Rand:* Error vide infra.

10 ita *(1)* patet esse idem *(2)* erit | dzdx *ändert Hrsg.* | ⊓ $\overline{2z + b}c\beta^2$ *L* 11 separatim *(1)* qvaerenda qvae destruunt, idem in divisoribus *(2)* destructio *L* 12 f. qvaeruntur *(1)* differentiam video *(2)* discrimen *(a)* video, aliud enim est s *(b)* an *L*

---

14 xy: Die Ersetzung von $\int \overline{dxdy}$ durch xy setzt die Regel $dxdy = dxy$ voraus. Dasselbe gilt für die Gleichsetzung von $dx\, d\frac{x}{2}$ mit $d\frac{x^2}{2}$ in Z. 15 f. 19 infra: vgl. S. 330 Z. 7.

Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium, invenire summas productorum, nondum analytice, certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit Wallisius non demonstratione, sed felici inductione nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$ quae quaeruntur. Ponatur $\int \overline{zy} \sqcap \omega$. Erit $zy \sqcap d\overline{\omega}$, et $y \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{z}$ et $\int y \sqcap \int \frac{d\overline{\omega}}{z}$. Eodem modo $\int z \sqcap \int \frac{d\overline{\omega}}{y}$. Ponatur $\int y$ nota $\sqcap v$. et $\int z$ nota $\sqcap \psi$. Fiet $y \sqcap dv \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{z}$ et $z \sqcap d\psi \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{y}$. et $\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. Unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. Adeoque $\frac{v}{\psi} \sqcap \int \frac{z}{y}$. Ergo foret $\int \frac{z}{y} \sqcap \frac{\int z}{\int y}$. Quod est absurdum. Unde sequitur $\int \frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ. summanda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ. Non inquam, quia singulae tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int \frac{dv}{d\psi}$. quam $\frac{\int dv \sqcap v}{\int d\psi \sqcap \psi}$.

Ergone aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Si idem est etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $\sqcap \int \frac{dv}{d\psi}$ sive $\frac{v}{\psi} \sqcap \int \frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{\int dv}{\int d\psi}$. Quod absurdum est. Eodem modo an $d\overline{v\psi} \sqcap dvd\psi$. Ergo $\int d\overline{v\psi}$ sive $v\psi \sqcap \int \overline{dvd\psi}$. Jam $v\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. Ergo $\int \overline{dvd\psi} \sqcap \int dv \int d\psi$. Quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dvd\psi$. idem esse quod $d\overline{v\psi}$, itemque $\frac{dv}{d\psi} \sqcap d\frac{v}{\psi}$. Quod tamen paulo ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus.

4 Sint *(1)* $\int$ z $\int$ y qvae qvaerun *(2)* $\int \overline{\text{zy}}$ *L* 4 f. $\sqcap \omega$. *(1)* porro sit $\int$ z $\sqcap$ *(2)* Erit *L* 7 $\frac{\int \text{z}}{\int \text{y}}$.

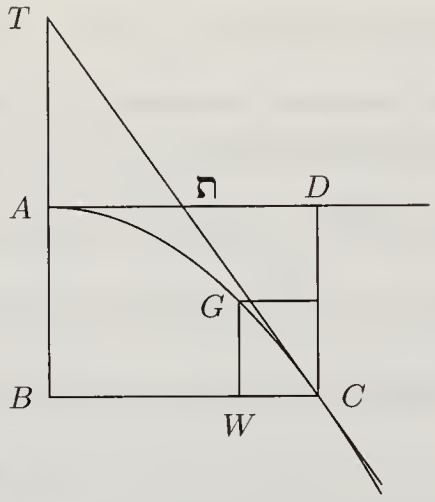
(1) Unde seqvi *(2)* qvod *L* 12 $\frac{\text{dv}}{\text{d}\psi}$? *(1)* Non puto sed est idem. Ergo *(2)* Si *L*

3 Wallisius: vgl. J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. LXXII S. 58 f. (*WO* I S. 498).

6 $\frac{z}{y}$: Hier sind Zähler und Nenner vertauscht. Der Fehler beeinträchtigt die Richtigkeit von Leibniz' Schlussfolgerung nicht.

Sed jam distinguendum video: si sit $v.$ et $\psi.$ et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam v. g. ℵ ⊓ $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius $v.$ quam ipsius ψ rationales per unam quandam, v. g. abscissam $x.$ expressi, tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore dℵ et $dvd\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$.

Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x+\beta, \frown x+\beta,, -x, x$, fiet $2\beta x$. Quod longe aliud est quam $x+\beta, -x,, \frown x+\beta, -x.$ quod daret β^2. Concludendum ergo aliud esse $\overline{dv\psi}$ quam $dvd\psi$, aliudque $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$.



[*Fig. 3*]

Dת ⊓ θ. AB ⊓ x. BC ⊓ y. TB ⊓ t.

Primus gradus[:] $a+bx+cy$ ⊓ 0. Ordinando et accommodando ad tangentes, fiet: bt ⊓ $-cy$. et t ⊓ $\frac{-cy}{b}$. Eodem modo: θ ⊓ $\frac{-bx}{c}$. Sit WC ⊓ ω et GW ⊓ β. Patet esse: $\frac{t}{y}$ ⊓ $\frac{\beta}{\omega}$. et fiet: ω ⊓ $\frac{-\beta b}{c}$. Eodem modo β ⊓ $\frac{-\omega c}{b}$.

Secundus gradus: $a+bx+cy+dx^2+ey^2+fyx$ ⊓ 0. Ordinando ad tangentes, fiet: $bt+2dxt+fyt$ ⊓ $-cy-2ey^2-fyx$. Adeoque t ⊓ $\frac{-cy-2ey^2-fyx}{b+2dx+fy}$. Unde facile patet semper

7–10 $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}\psi}$ | Dת ... t *erg.* | *(1)* Sit $\mathrm{ax}^2+\mathrm{by}^2+\mathrm{cy}$ *(2)* primus *L* 11 et | GC *ändert Hrsg.* | ⊓ β *L*

t per y, (et θ per x) dividi posse et quoniam $\omega \sqcap \frac{\beta y}{t}$. ideo fiet hic $\omega \sqcap \frac{\beta\overline{b + 2dx + fy}}{-c - 2ey - fx}$.

Adeoque fiet: $y \sqcap \frac{-\omega\overline{c + fx}, \frown -\beta\overline{b + 2dx}}{f + 2e}$. At paulo ante $y \sqcap \frac{-a - bx - dx^2}{c + ey + fx}$ et fiet:

$$y \sqcap \frac{-\omega, \overline{c + fx}, \frown -\beta b + 2dx, \frown \overline{c + fx},,, + \overline{f + 2e} \frown \overline{a + bx + dx^2}}{-\omega\overline{c + fx}, \frown -\beta\overline{b + 2dx}, \frown -e}$$

$$\sqcap \frac{-\omega\overline{c + fx}, \frown -\beta\overline{b + 2dx}}{f + 2e}.$$

Habemus ergo aequationem in qua nulla est amplius y. Et omnes figurae, quarum aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest, quadrari possunt. Illae item quae ipsi per methodos alias ostendi possunt σύγνωτοι.

4 f. $\frac{-\omega\overline{c + fx}, \frown -\beta\overline{b + 2dx}}{f + 2e}$. *(1)* qvem valorem inventum inserendo in *(a)* ω *(b)* valore ipsius ω, habebimus aeqvationem in qva nulla y. qvod ut fiat commodius, qvaeramus rursus per partes in exiguis: yx ⊓ a. differentia erit yt ⊓ −yx. et t ⊓ −x. et θ ⊓ −y Jam *(aa)* ⟨ω⟩ ⊓ *(bb)* y ⊓ $\frac{a}{x}$. erit: $\omega \sqcap \frac{-\beta a}{x^2}$. et $\beta \sqcap \frac{-a\omega}{y^2}$. *(2)* Habemus *L* 6 literarum *(1)* cognitarum *(2)* constantium *L* 7 possunt *(1)* sygnotae *(2)* συγγν *(3)* σύγνωτοι *L*

2 fiet: $y \sqcap$: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite müsste $\beta f + 2e\omega$ lauten. Im Zähler wäre das Multiplikationszeichen zu streichen. Die Fehler wirken sich auf die Rechenausdrücke bis Z. 4 aus.

47. MARGINALIEN IN GREGORYS EXERCITATIONES GEOMETRICAE

[Ende Januar 1673 – 1716 (?)]

Überlieferung: *LiH* Marginalien in J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*, London, 1668: HANNOVER *Leibniz-Bibl.* Ms IV 377.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat Gregorys *Exercitationes geometricae* zusammen mit der Ausgabe von Mercators *Logarithmotechnia* und Riccis *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* (London 1668) sowie weiteren Werken während seines ersten Londonaufenthalts zwischen Ende Januar und Ende Februar 1673 erworben. Die *Exercitationes* wurden später mit den Schriften von Mercator und Ricci zusammengebunden und die Ränder unter Aussparung der Marginalien beschnitten. Während die Randnotizen zur *Logarithmotechnia* und zur *Exercitatio geometrica* sämtlich frühen Datums anzunehmen sind (Druck in VII, 4 N. 3) und ein intensiveres Studium der *Exercitationes geometricae* bereits kurz nach Erwerb des Buches nachweisbar ist (s. VII, 4 N. 8, 16_1, 17, 22 sowie 24), stammen die Marginalien zu Gregorys Schrift infolge der verwendeten Infinitesimalsymbolik vorwiegend von frühestens November 1675. Für die beiden entfernten Marginalien in der Praefatio sowie die eingefügten Linien auf S. 2 ist eine Datierung auf die Zeit ab Februar 1673 nicht ausgeschlossen. Die zuerst geschriebenen Marginalien zu Prop. V (S. 21 f.) enthalten das Gleichheitszeichen = und weisen enge Bezüge zur Untersuchung *Trigonometria inassignabilium*, VII, 4 N. 27, vom Sommer 1673 auf. Sie dürften daher auch aus dieser Zeit stammen. Die später geschriebenen Marginalien entstanden wahrscheinlich in Zusammenhang mit der Untersuchung *De Quadratura quadratricis* (LH 35 XIII 1 Bl. 236–239), dat. 6. Juli 1677, in der auf sie verwiesen wird.

Das Marginalexemplar wird als Haupttext wiedergegeben, dem die Seitenzählung in eckigen Klammern vorangestellt wird. Leibniz' Marginalien erscheinen als Fußnoten zum Text bzw. zu den Figuren, Unterstreichungen werden durch Sperrung hervorgehoben. Zur Wiedergabe von Leibniz' Ergänzungen von Linien sowie einer Punktbezeichnung innerhalb Gregorys Fig. 3 wird der ursprünglichen Abbildung ein Ausschnitt einer entsprechend erweiterten Figur gegenübergestellt.

[Praefatio Bl. A2 v° – A3 v°]

... Quae interim objiciuntur a praestantissimo Geometra contra nostram Doctrinam, hic resolvere conabor. *Admitto* (inquit) *in Prop. 11 Demonstratum esse, quod Sector ABIP non sit analytice compositus a triangulo ABP et Trapezio ABFP; sed non video ubi demonstretur Sectorem ABIP non esse analytice compositum ex aliis quantitatibus.* Ego facile agnosco infinitas alias esse quantitates, e quibus analytice componitur Sector

31–333,3 *Ausriss am Rand; Verbindungslinie zwischen Risskante und* Virum.

28 inquit: s. den Brief von J. Wallis an J. Collins vom 8. (18.) September 1668; WALLIS, *Correspondence* II, S. 596–601, insbes. S. 599 f. 28 *Prop. 11*: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 25–28.

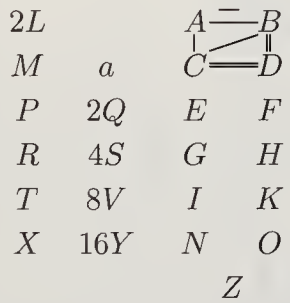
$ABIP$, sed R. Virum interrogo, quomodo innotescant illae quantitates e datis solummodo triangulo ABP et Trapezio $ABFP$, nam hae Problema determinant, et proinde aliae frustra dantur: si autem inveniantur; inveniuntur vel analytice vel non analytice; si posterius, concedo totum; si autem analytice inveniantur e quantitatibus ABP, $ABFP$, et Sector rursus analytice componatur ex illis; Idem Sector etiam analytice componetur ex quantitatibus ABP, $ABFP$, quod est absurdum, nempe contra Prop. 11, quae admittitur. Si autem insistatur, Sectorem posse componi analytice ex aliis quantitatibus, quae illum determinant praeter ABP, $ABFP$: dico ABP, $ABFP$, vel posse componi analytice ex aliis illis quantitatibus vel non; s i p o s t e r i u s , c o n c e d o t o t u m , s e d t a l e s q u a n t i t a t e s e x h i b e r i d e s i d e r o ; si prius, Analyseos tenorem examinando, satis constabit alias illas quantitates etiam analytice componi ex ABP, $ABFP$, et ita ad primum casum relabimur. Satis etiam sciunt Geometrae, perinde esse quo ad solutionem, quomodocunque determinetur problema; ...

[S. 1]

Appendicula Ad Veram Circuli
et Hyperbolae Quadraturam.

...

[S. 2 f.]



Prop. I.

Inter A, B quantitates arbitrarias sit media Geometrica C, item inter C, B sit media harmonica D, et continuetur series convergens, ut sit ejus terminatio, seu Circuli, Ellipseos vel Hyperbolae sector Z. ...

---

1 *Leibniz ergänzt* R. *zu* Rev.

9–12 *Randstreifen abgeschnitten.*

19 f. *Linien von Leibniz eingetragen.*

[S. 14]

Analogia Inter Lineam Meridianam Planispherii Nautici:
et Tangentes Artificiales Geometrice Demonstrata, etc.

[Fig. 3 zu S. 14 f.]

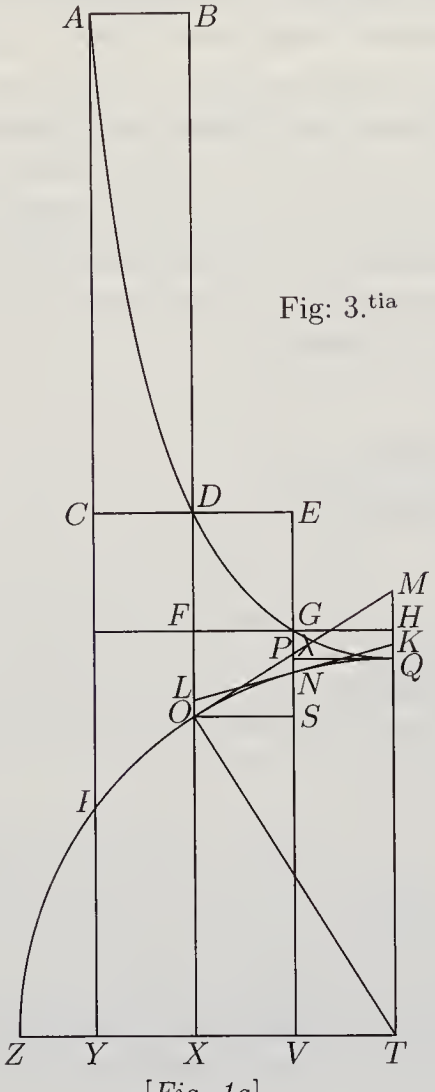
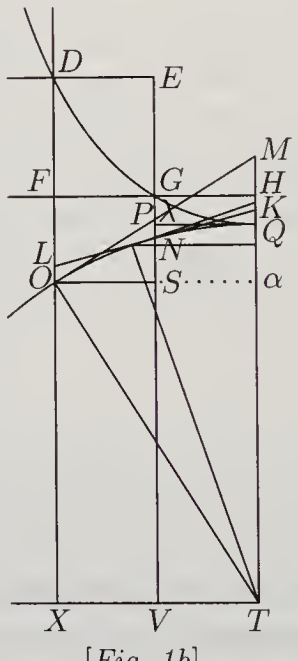


Fig: 3.tia

[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

[*Ausschnitt mit Leibniz' Ergänzungen*]

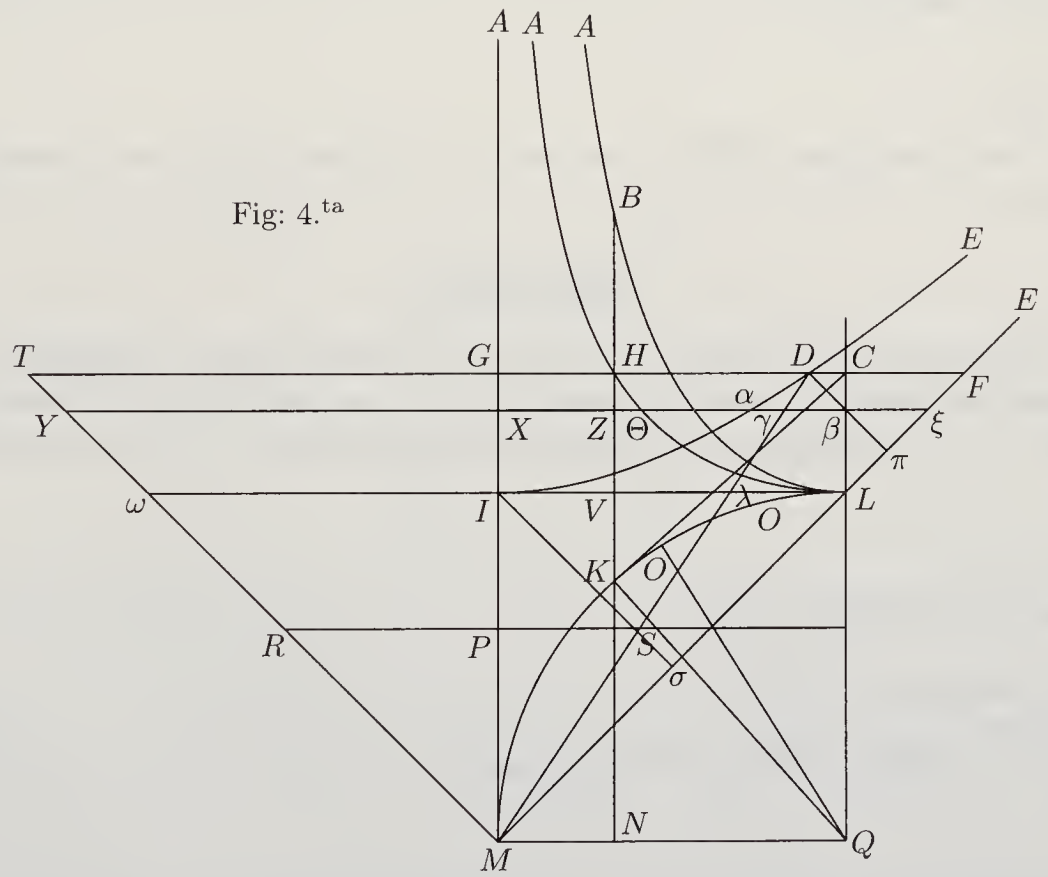
5 *Daneben:* MO. med. prop. inter $M\alpha$ et MT.
TO med. prop. inter $T\alpha$ et MT.
DX. TM. TO contin. prop.

[S. 14]

Prop. I. Theorema.

Sit Circuli quadrans TQZ, cujus pars sit arcus QI: super arcu QI imaginetur portio superficiei Cylindrici recti talis naturae, ut (sumpto in arcu QI quolibet puncto O) perpendicularis ad planum TZQ ex puncto O ad summitatem portionis superficiei cylindricae excitata semper fiat aequalis secanti arcus OQ. Deinde sit mixtilineum $AIYTQ$ talis naturae, ut (ducta in eo recta XD radio QT parallela et arcum quadrantis secante in puncto ad libitum O) recta DX, secans arcus OQ, et radius TQ sint continue proportionales. Dico mixtilineum $AYTQ$ esse aequale dictae portioni superficiei cylindricae: ...

[Fig. 4 zu S. 16–19]



[*Fig. 2*]

[S. 16]

Prop. II. Theorema.

Sit Circuli quadrans QML, sitque mixtilineum $AHLQM$ talis naturae, ut (ducta recta ad libitum HN radio LQ parallela et quadrantis arcum secante in K) recta HN aequalis sit secanti arcus LK, sitque mixtilineum $A\,B\,L\,Q\,M\,A$ talis naturae, ut (productа arbitraria NH in B) rectae LQ, NH, NB, sint continue proportionales: deinde sit Semihyperbola IDE cujus axis MA, vertex I et asymptoton MLE: ducatur ad libitum radio LQ parallela recta NB, curvas LKM, LHA, LBA, secans in punctis K, H, B; et per punctum H ducatur radio MQ recta parallela HF Hyperbolae occurrens in puncto D. Dico Sectorem Hyperbolicum IMD aequalem esse semissi Figurae $BLQN$, quae Figura (ut in antecedente demonstratum est) aequalis est superficiei cylindricae conflatae ex omnibus secantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis suis punctis O normaliter insistentibus. ...

[S. 17]

... est igitur Figura $BLQN$ dupla sectoris Hyperbolici MID, quod demonstrare oportuit.

Consectarium.

Hinc sequitur, quod Figura $BLQN$ semper sit dupla Logarithmi differentiae inter tangentem et secantem arcus KL, posito radio LI loco unitatis, quod sic probo. Ex punctis I, D, in asymptoton ME demittantur perpendiculares $I\sigma$, $D\pi$; ex demonstratis

---

3 *Über* $AHLQM$: $\int \overline{\omega r d\bar{x}}$.

5 *Am Rande:* $\frac{1}{r} \int \overline{\omega^2 dx}$.

16 *Daneben:* $BLQN \sqcap 2MID \sqcap 2, ID\pi\omega$.

---

20 demonstratis: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. 26, S. 41.

21 f. Leibniz setzt $\omega r = HN$, $x = MN$ und $r = LQ$.

in Circ. et Hyperb. Quad. manifestum est sectorem MID esse aequalem Figurae $ID\pi\sigma$ ...

[S. 17 f.]

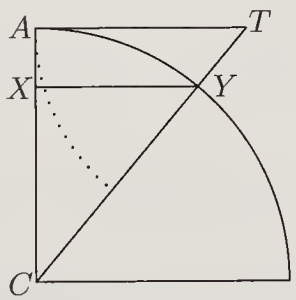
Prop. III. Theorema.

Linea Meridiana Planisphaerii Nautici *est Scala Logarithmorum excessuum, quibus* Secantes *Latitudinum superant earundem* Tangentes, *posito radio loco unitatis.*

... Logarithmus excessus quo secans arcus KL superat ejusdem tangentem, est ad Logarithmum excessus quo secans arcus OL superat suam tangentem, ut arcus KL in latitudine ad arcum OL in latitudine ab Aequatore Planisphaerii Nautici in linea recta computatis; et ideo linea Meridiana Planisphaerii Nautici analoga est Logarithmis excessuum, quibus Secantes latitudinum superant suas Tangentes, quod demonstrare oportuit.

...

7–12 *Dazu am Rande:*



$\overset{t}{AT} : \overset{y}{XY} :: \overset{r}{AC} : \overset{r-x}{CX}.$ $t : y :: r : r-x.$ $t = yr :, r-x.$ $\overset{s}{CT} : \overset{r}{CY} :: r : r-x$ seu $s = rr : r-x.$ $s-t = r\cdot\overline{r-y} : \overline{r-x}.$ Sit $r-x = z$ fiet $s-t = r\cdot\overline{r-y} : z = r^2 - r\sqrt{rr-zz}, : z.$ $\overline{s-t}^2 = r^4 - 2r^3\sqrt{rr-zz} + r^4 - r^2z^2, : zz$ seu $= r^4 - 2r^3y + rryy, : \overline{rr-yy}$ seu $= r^4 - r^3y + r^4 - r^3y + r^2y^2, :, r^2 - y^2 = \dfrac{r^3 - r^2y}{r+y} + \dfrac{r^4}{r^2-y^2}.$

---

17 f. seu =: Auf der rechten Seite ist im Zähler ein r^4 zuviel; Leibniz rechnet konsequent weiter.

[Fig. 6 zu S. 21–23]

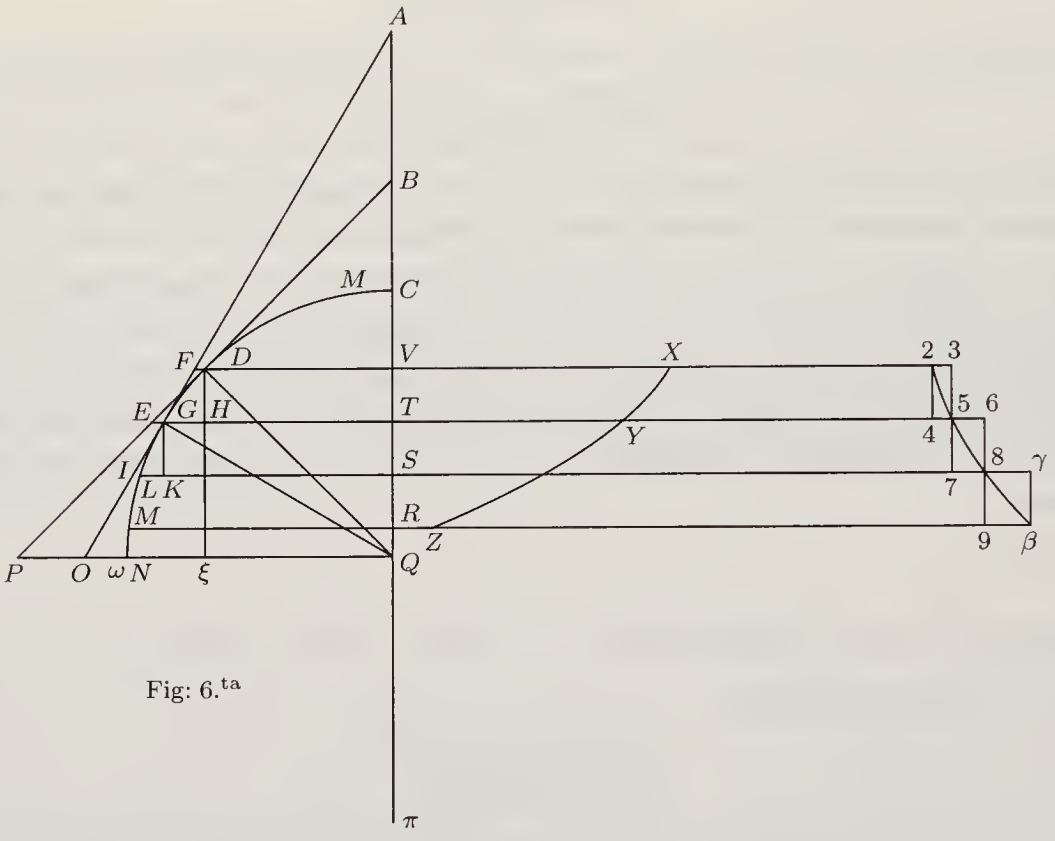
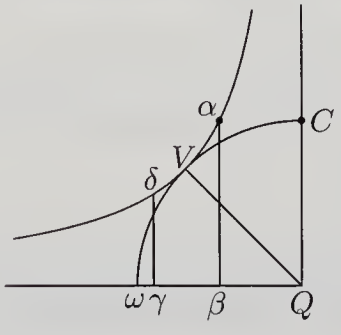


Fig: 6.ta

[*Fig. 3*]

---

2 *Rechts innerhalb der Figur:* $TY \sqcap GO$. $XVRZX \sqcap D\xi N$. $Y5 \sqcap GA$.
Links unterhalb der Figur: $\alpha\beta \sqcap QC \sqcap QV$. V vertex Hyperbolae. $\delta\gamma \sqcap QA - AG$. Spatium $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ duplum demto rectangulo GT in CQ aequabitur summae tangentium arcus CG axi CQ insistentium. Vide pag. 23.



[S. 21 f.]

Prop. V. Theorema.

Sit circuli quadrans $QC\omega$ bifariam divisus in puncto D. Sit arcus DM minor quam $D\omega$, super quo imaginetur superficies Cylindrici recti talis naturae ut (sumpto in arcu DM quolibet puncto G) perpendicularis ad planum $QC\omega$ ex puncto G ad summitatem superficiei Cylindricae excitata semper fiat aequalis secanti arcus GC. In radium QC demittantur rectae perpendiculares DV, MR, quae producantur in 2 et β; fiatque mixtilineum $V2\beta R$ talis naturae, ut (ducta recta quacunque $GT5$ rectae DV parallela) tangentes arcuum GC, $G\omega$, simul, nempe recta AO, aequales sint rectae $T5$. Dico mixtilineum $V2\beta R$ aequale esse superficiei cylindricae super curva DM ...

4–6 *Am Rande, durch Verweissymbol hinter GC angefügt:* = sum. tang. vel conchoeid. auctam momento arcus ex basi.

Darunter, später geschrieben: $GA \sqcap t$. $GO \sqcap \theta$. $QC \sqcap r$. $QV \sqcap y$. $VD \sqcap x$. $\frac{t}{r} \sqcap \frac{y}{x} \sqcap \frac{r}{\theta} \sqcap \frac{d\overline{a}}{d\overline{x}}$ et $\frac{d\overline{a}}{d\overline{y}} \sqcap \frac{x}{y} \sqcap \frac{r}{t} \sqcap \frac{\theta}{r}$.

9 f. *Über* mixtilineum, *gestrichen:* Est ⟨—⟩ spatium [*bricht ab*]

Am Rande: Quia Tang. compl. = momento arcus ex basi.

Darunter, später geschrieben: $V2\beta R \sqcap \int \overline{td\overline{x} + \theta d\overline{x}}$. Sup: Cyl. $\sqcap \int \overline{sd\overline{a}}$ seu $\int \overline{sd\overline{a}} \sqcap \int \overline{td\overline{x}} + \int \overline{\theta d\overline{x}}$. Patet ex triangulis similibus AQO et GKI. Et quia ut mox ostendetur $\int \overline{\theta d\overline{x}} \sqcap r^2 - ry$. fiet $\int \overline{sd\overline{a}} \sqcap \int \overline{td\overline{x}} + r^2 - ry$. At per prop. 1. hujus: $\int \overline{sd\overline{a}} \sqcap \int \overline{\frac{s^2}{r} d\overline{y}}$ idque mihi aliunde uno intuitu patet. Et per prop. 2. hujus $\int \overline{\frac{s^2}{r} d\overline{y}}$ seu $BLQNB$ in fig. 4 $\sqcap$ spatio Hyperbolico duplicato $ID\pi\sigma I$ in fig. 4.

18 GLI *LiH ändert Hrsg.*

---

11 f. vel conchoeid.: Leibniz verwendet diese irreführende Bezeichnung für die Konchoidenfläche ohne das halbe Kreissegment; vgl. VII, 4 N. 27 prop. 8. S. 468. 14 $\frac{t}{r} \sqcap$: Richtig wären $\frac{t}{r} = \frac{x}{y} = \frac{r}{\theta} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{da}{dx} = \frac{t}{x} = \frac{r}{y}$ bzw. $\frac{da}{dy} = \frac{r}{x} = \frac{\theta}{y}$. — Vgl. insgesamt zur Marginalie *De Quadratura quadratricis*, dat. 6. Juli 1677. 17 $V2\beta R \sqcap$: Im Folgenden vertauscht Leibniz die Rollen von x und y. — Vgl. insgesamt *a. a. O.*

[S. 23]

Sit mixtilineum $VXZR$ talis naturae, ut (ducta recta quacunque GTY rectae DX parallela) recta TY semper aequalis fiat tangenti GO; manifestum est (ex Geomet. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum $VXZR$ aequale esse superficiei trunci cylindrici recti resectae a plano basem seminormaliter secante in recta PQ, atque (ex Geom. part. univers. Prop. 3.) evidens est eandem trunci superficiem aequalem esse rectangulo $N\xi$ in CQ, et ideo mixtilineum $VXZR$ eidem rectangulo est aequale. Ex praedictis evidens est mixtilineum $X2\beta Z$ talis esse naturae ut $Y5$ semper sit aequalis tangenti GA; et proinde mixtilineum $X2\beta Z$ una cum portione quadrantis $DVRM$ aequale est spatio conchoidali resecto a rectis DV, MR, cujus conchoidis vertex est C, norma PQ, polus π, $CQ = Q\pi$: ex hac Prop. et hujus 2 evidens est sequens consectarium spatio conchoidali quadrando satis expeditum.

Consectarium.

Si in praedicta conchoide accipiatur spatium contentum a curva conchoidali et rectis CT, $T6$; erit praedictum spatium aequale duplo spatii hyperbolici (cujus asymptotae QA, QP, semiaxis QC) contenti a curva hyperbolica una asymptota et rectis QC, $QA-GA$, alteri asymptotae parallelis, una cum semisegmento circulari CGT dempto rectangulo QC in GT. Aliarum conchoideon spatia (nempe quando vertex et polus non aequaliter distant a normali) possunt mensurari per Analogiam a *Wallisio* in Epist. Com. pag. 171 demonstratam.

---

2 f. *Daneben:* $\int \overline{\theta d\overline{x}} \sqcap r^2 - ry$.

15 *Über* hyperbolici, *gestrichen:* ⟨—⟩

15–17 *Daneben:* Vide quae figurae ascripsi.

---

4 Prop. 4: J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 4, S. 13. 6 Prop. 3: *a. a. O.*, prop. 3, S. 8. 20 Epist. Com.: J. Wallis, *Commercium epistolicum*, 1658, S. 170f. (*WO* II S. 849 f.).

48. METHODI TANGENTIUM DIRECTAE COMPENDIUM

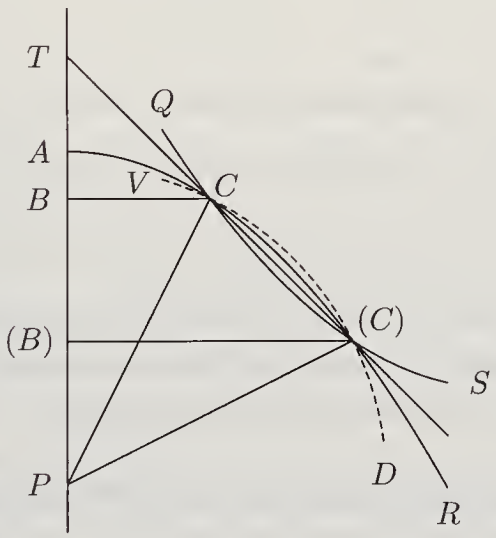
22. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 1 r°, 7 Z. auf Bl. 1 v°. Das Blatt hing ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 2 Bl. 119 (gedr. VII, 3 N. 51). — Gedr. (unter Verschmelzung von Fig. 1 und 2): 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 46 bis 48; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 111–114. Cc 2, Nr. 1125

22. Nov. 1675.

Methodi tangentium directae compendium calculi, dum jam inventis aliarum curvarum tangentibus utimur. Quaedam et de inversa methodo.

Sub fin. pag. 21. Nov. notavi quae in mentem venere circa tangentium methodum. Quae huc redit.



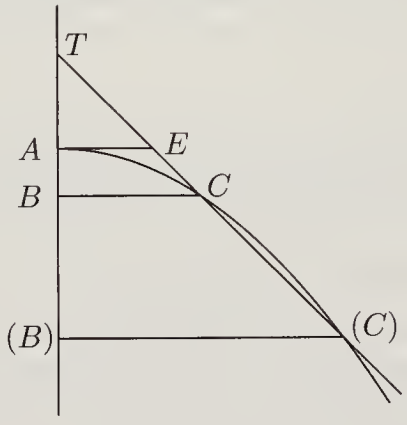
[*Fig. 1*]

Sint duae lineae $ACCR$, et $QCCS$. se secantes in punctis uno duobus pluribusve C, C. Sit axis $AB(B)$, ordinatae $AB \sqcap x$ abscissae $BC \sqcap y$. Habebimus duas aequa-

8 22. Nov. 1675. *erg. L* 9–11 Methodi ... methodo *erg. L*

12 notavi: nicht gefunden.

tiones ad duas lineas, duarum unamquamque incognitarum capitalium. Quod si jam sint earum aequationum radices aequales, seu aequationes duos habeant valores aequales[,] lineae se tangent. Cartesius jam pro linea $QCCS$, elegit arcum circuli $VCCD$ cujus centrum P. ut PC sit minima quae a puncto P duci possit. Idem proveniet et saepe simplicius, si sumas non arcum circuli sed rectam TCC. tangentem, id est maximam quae ex puncto dato T duci potest ad Curvam.



[*Fig. 2*]

Sit $TA \sqcap b$. $AE \sqcap e$. quasi datae. AB, BC, quaesitae, aequationes duae, una ad curvam ACC, $ax^2 + cy^2 +$ etc. $\sqcap 0$. altera ad lineam rectam TCC, quae erit quod $\frac{TA}{AE} \sqcap \frac{TB}{BC}$. sive $\frac{b}{e} \sqcap \frac{b \mp x}{y}$ sive $\mp x \sqcap \frac{b}{e} y - b$, sive $y \sqcap \mp \frac{e}{b} x + e$. Ita valor alterutrius incognitarum semper haberi potest pure, adeoque statim sine exaltatione aequationis ad curvam propositam ACC, tolli potest, et statim habebitur aequatio ad unam incognitam, quam superest tantum, ut ad duas radices aequales determinemus. Et hoc sine dubio Slusianae methodi principium est.

Si $VCCD$ adhibeatur arcus circuli centro P, cum Cartesio, tunc erit aequatio altera ad circulum haec: posito PC radio $\sqcap s$. et $PB \sqcap v - x$ fiet: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx$. x^2

3 QCCR *L ändert Hrsg.*

3 Cartesius: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–48, insbesondere S. 43–45. 4f. minima ... maximam: vgl. die Erl. zu S. 449 Z. 20–23. 7 *Fig. 2*: Eine verworfene Vorstufe wird nicht wiedergegeben. 14 methodi: vgl. R.-Fr. de Sluses Beschreibung in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 15 cum Cartesio: vgl. Erl. zu Z. 3.

Ex hoc patet nobis electionem esse aut circuli aut lineae rectae; et cum in aequatione curvae datae extat sola quadratica potestas ipsius y, ut in conicis semper fieri potest, tunc utilius adhiberi aequationem ad circulum, ita enim ope duorum ipsius y^2 valorum statim tolletur incognita x, at pro omnibus aequationibus ad curvas rationali aequatione expressas, utilius methodus ad rectam.

Hinc jam pergo et dico posse non tantum rectam et circulum, sed et quamlibet Curvam pro arbitrio assumi, modo notus sit modus ducendi tangentes ad assumtam, ita enim ejus ope inveniri possunt tangentes ad datam. Hoc jam usus habebit praeclaros tum ad calculos evitandos aut contrahendos, tum ad demonstrationes et constructiones Geometricas elegantes; ita enim itur a curvis facilioribus ad difficiliores, et proposita aequatione ad unam curvam, semper eligi potest aequatio ad aliam curvam notarum tangentium, cujus ope facillime tollatur una incognitarum, ut si sit aequatio data $hy^2 + y^3 \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f.$ ad curvam cujus quaeruntur tangentes sumatur curva cujus aequatio: $hy^2 + y^3 \sqcap gx + q.$ cujus jam datur tangens, tollendo y fiet aequatio talis: $gx + q \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f.$ Quae determinabitur ad duas radices aequales vel Cartesiana methodo per comparationes, vel Huddeniana per arithmeticam progressionem. Atque ita tollendo x, invenietur valor ipsius g vel $q.$ et una ex his duabus literis $g.$ vel $q.$ pro arbitrio sumi potest: Habebitur ergo modus describendi curvam illam alteram quae datam tangat; ea jam descripta, ad punctum quod ei cum curva proposita commune est, ducatur tangens, quam notam supponimus, ea tangens etiam ipsam curvam propositam tanget. Et credo generaliter hoc modo calculare licebit sumendo semper curvam aliam ut hoc loco fecimus quae unam incognitam plane tollat, hinc credo calculum elegantem derivabimus pro nova tangentium regula quae adhuc sit Slusiana melior, quae scilicet plane statim alterutram incognitam tollat, quod non facit Slusiana.

Haec jam generalissima a⟨m⟩plissimaque facultas sumendi curvam aliquam pro arbitrio, facit, ut prope credam hinc aliquid ad m e t h o d u m t a n g e n t i u m i n v e r s a m et quadraturas duci posse. Nimirum data sit quaedam proprietas tangentium cur-

---

26 f. *Am Rande:* NB.

4 aeqvationibus *(1)* rationalibus *(2)* ad *L* 8 possunt *(1)* aeqvationes *(2)* tangentes *L* 17 et *(1)* uno sumto alterum *(2)* | unum *ändert Hrsg.* | ex *L* 21 Et *(1)* utile *(2)* credo *(a)* hoc *(b)* generaliter *L* 22 qvae *(1)* omnes *(2)* tot *(3)* unam *L*

---

15 Cartesiana: vgl. Erl. zu S. 342 Z. 3. 16 Huddeniana: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. S. 507–516.

vae cujus ordinatarum ad abscissas relatio quaeritur. Inde deduci poterit aequatio, in qua erunt incognitae capitales $x. y.$ et incidentes semper duae, v. g. $s.$ et $v.$ vel b et $e.$ et similes. Opus jam aequatione proprietatem tangentium continente, per quam $s.$ et $v.$ relationem ad tangentes habere exprimatur. Sumatur in eam rem quaelibet nova curva pro arbitrio, et $s.$ atque v, etiam ad ejus tangentes quandam nobis notam habebunt relationem. Ope jam hujus novae aequationis pro arbitrio assumtae, poterimus datam ad tangentes pro curva quaesita pro lubitu nostro mutare, nempe alterutram incognitarum pro lubitu tollendo; et rem in eum statum deducendo, ut facilius appareat calculus inversus. Res eo redit, ergo, ut datis tangentium figurae quaesitae proprietatibus examinemus quas eaedem tangentes habeant relationes ad alterius figurae quae pro data sumitur ordinatas aut tangentes. Hoc etiam serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricationis.

5 tangentes *(1)* eandem habe *(2)* qvandam L

49. DE CURVA LINEAE HASTARIAE SIMILI. DE TRANSMUTATIONE FIGURARUM CURVILINEARUM. DE METHODIS TANGENTES INVENIENDI

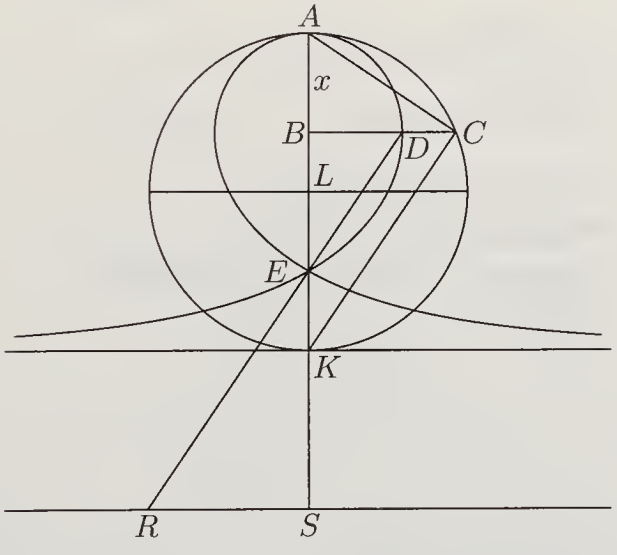
[Am oder kurz vor dem 23. November 1675]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 VIII 30 Bl. 153–154. 1 Bog. 2°. Obere Hälfte von Bl. 153 ausgeschnitten. 2 S. auf Bl. 154. — Auf Bl. 153 und am unteren Rand von Bl. 154 N. 50, datiert auf den 23. November 1675.
Cc 2, Nr. 1127, 1128 A, 00

Datierungsgründe: Die Gesprächsaufzeichnung ist vor der auf den 23. November 1675 datierten N. 50 auf den Bogen geschrieben.

[*Teil 1*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

$\triangle ABC$ $\wp^{\text{tur}}$ (puncto B ad arbitrium electo) spatio ABD.

$BD \wp u$. $AL \wp a$.

$AB \wp x$. $u \wp \frac{3a-2x}{4a-2x}\sqrt{2ax-xx}$.

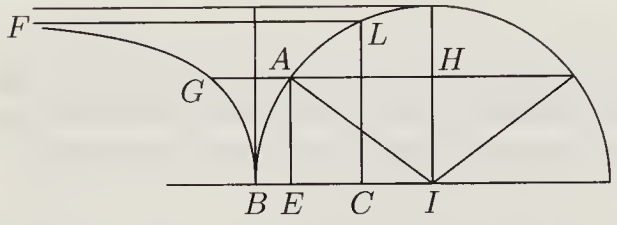
$KE \wp LE$.

Hinc propor: $KB \dashv\vdash EB$ sic BC ad BD.

20 *Fig. 1*: Die Zeichnung deutet darauf hin, dass Tschirnhaus die hier diskutierte Kurve irrtümlich mit der sog. curva hastaria identifizierte, die Leibniz später in *Curvae Hastariae natura* (Cc 2, Nr. 1469) und N. 88, beide dat. Juni 1676, untersucht. Vgl. auch Leibniz' Hinweis in N. 51_2 S. 363 Z. 11 f.

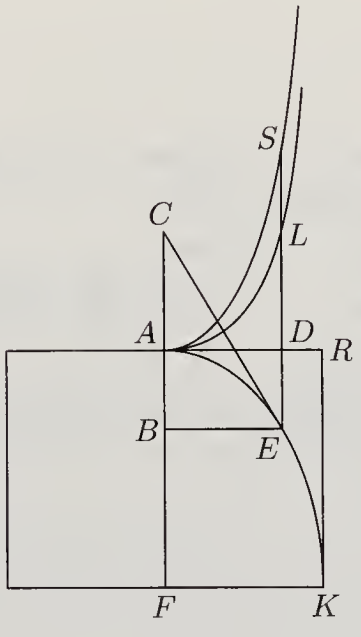
[*Teil 2*]

[*Tschirnhaus*]



$BLC \wp BLF$

[*Fig. 2*]

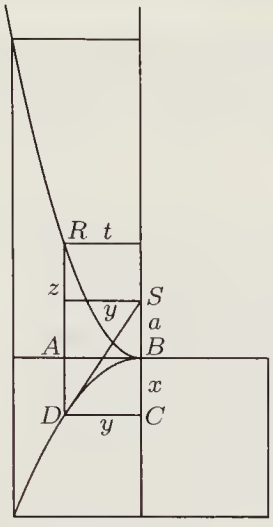


$LS \wp AB$
$LE \wp CB$
$ASD \wp \square ADEB$

Infinitae $CB \wp^{\text{tur}} AFK$.
Infinitae $AB \wp^{\text{tur}} ARK$.
Ergo summa infinitarum $CB + AB \wp^{\text{tur}}$ $ARKF$.

[*Fig. 3*]

7 $ASD \wp \square ADEB$: Richtigerweise müsste auf der linken Seite ASE stehen. 12 *Fig. 3*: vgl. Tschirnhaus' Brief an Pieter van Gent vom 19. Dezember 1675 (AMSTERDAM *Universiteitsbibliotheek* MS IIA38, S. 14) und J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 11, S. 27–29.



[*Fig. 4*]

$rz \propto tt$

CS 3^{pla} BC

$rx \propto yy$

$\frac{r}{3}$

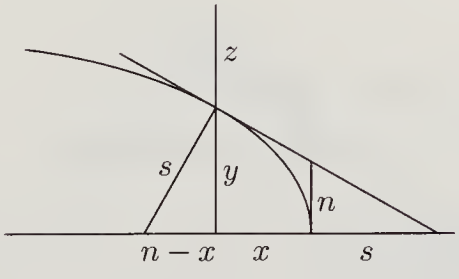
$z \propto \frac{\frac{tt}{r} - a}{2}$

[*Teil 3*]

[*Leibniz*]

$a + cx + dy + exy + fx^2 + gy^2$

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 5*]

$xx + gx + f \propto 0 \quad yy + gy + h$

$x^3 + fxx + gx + h \propto y^3$

$s \propto \frac{x^3 + 2fxx + 3gx}{h + 2g + 3fx}$

---

2 3^{pla} BC: Richtig wäre 2^{pla} BC; entsprechend sollte in Z. 4 $\frac{r}{2}$ stehen. 13 $s \propto \frac{x^3 + 2fxx + 3gx}{h + 2g + 3fx}$: Nach Tschirnhaus' Tangentenregel ergibt sich für den Subtangentenabschnitt $s = \frac{3h + 2gx + fx^2}{g + 2fx + 3x^2}$. — Zu dieser Regel vgl. Tschirnhaus' Brief an Oldenburg von Anfang Juli 1675 (*OC* XI S. 397–401) und seine Abhandlung in den *Acta eruditorum*, Dezember 1682, S. 391–393. 14 *Fig. 5*: In der Zeichnung werden die Bezeichnungen n und s jeweils für zwei Größen verwendet. Tschirnhaus benutzt im zugehörigen Text nur den Subtangentenabschnitt s.

$ax - xx \propto z$

$2e \propto a \qquad x - e$

$e \propto \frac{a}{2} \qquad x - e$

$x \propto \frac{a}{2} \qquad xx - 2ex + ee$

$a - x \qquad x + e$

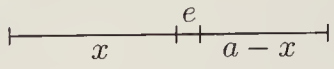
$x \qquad a - x - e$

$\overline{\cancel{ax} - \cancel{xx}} \propto \overline{\cancel{ax} + a\not{e} - \cancel{xx} - 2\not{e}x - \cancel{ee}}$

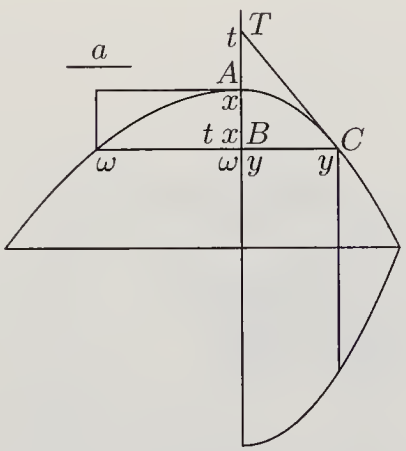
$a \propto 2x$

$ax - xx \propto zz$

[*Leibniz*]



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

$AB \sqcap x. \quad BC \sqcap y. \quad TB \sqcap t.$

$\frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{\omega}$

$\omega \sqcap \frac{ay}{t}$

$a.\ bx.\ cy + dx^2 + ey^2 + fxy \sqcap 0$

$b\,x + 2\,d\,x^2 + f\,x\,y \sqcap -c\,y - 2\,e\,y^2 - f\,x\,y$

$t \qquad xt \qquad t\ y$

$t \sqcap \frac{-cy - 2ey^2 - fxy}{b + 2dx + fy}$

$\omega \sqcap \frac{+ab + 2adx + afx}{-cy - 2ey^2 - fxy}$

14–17 Vgl. N. 46 S. 330 Z. 13. 18 $\omega \sqcap$: Auf der rechten Seite müsste als korrektes Ergebnis $\frac{ab + 2adx + afy}{-c - 2ey - fx}$ stehen.

50. POLYGONORUM USUS AD TETRAGONISTICA ET METHODUM TANGENTIUM INVERSAM

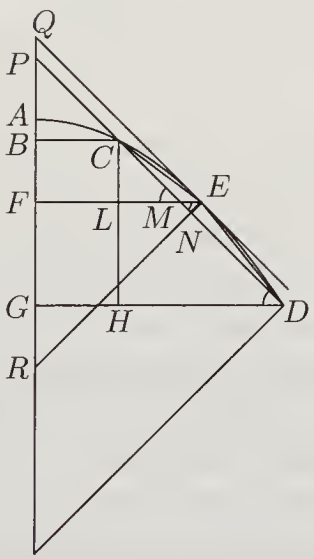
23. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 153–154. 1 Bog. 2°. Obere Hälfte von Bl. 153 ausgeschnitten. 2 S. auf Bl. 153 und jeweils max. 1/4 S. auf Bl. 154 r° und v°. Überschrift auf Bl. 154 r° in Textlücke von N. 49. Hauptteil des Textes auf Bl. 153 r° und Bl. 153 v°. Zusatz am inneren Rand von Bl. 153 r° unterhalb von Fig. 2 sowie in den Textlücken von N. 49 am unteren Rand von Bl. 154 v° und Bl. 154 r°. Geringe Textverluste durch Papierschaden an den Rändern. — Auf Bl. 154 befindet sich die Gesprächsaufzeichnung N. 49.

Cc 2, Nr. 1126, 1128 B, 00

23. Novemb. 1675

Polygonorum usus ad Tetragonistica et Tang. invers.



[*Fig. 1*]

Diversa a processu per indivisibilia nonnihil methodus continuarum inscriptionum et circumscriptionum. Sit segmentum parabolae $CDEC$. ei inscriptum triangulum CED. Sit $CH \sqcap b$. $BC \sqcap y$. $AB \sqcap x$. $AB \sqcap \frac{y^2}{2a}$. $AG \sqcap \frac{y^2}{2a} + b$. $GH \sqcap y$. et $HD \sqcap \sqrt{y^2 + 2ba} - y$. et $CD^2 \sqcap y^2 + 2ba + y^2 - 2y\sqrt{y^2 + 2ba} + b^2$. Sit $BF \sqcap CL \sqcap x$. erit $AF \sqcap \frac{y^2}{2a} + x$. et $FE \sqcap \sqrt{y^2 + 2ax}$. $\frac{LM}{CL \sqcap x} \sqcap \frac{HD \sqcap \sqrt{y^2 + 2ba} - y}{b}$. Ergo $LM \sqcap \frac{x}{b}\sqrt{y^2 + 2ba} - \frac{xy}{b}$. Unde habetur ME, nam $ME \sqcap$

13 f. *(1)* 23 Novemb. 1675. *(a)* Evo *(b)* Evolutiones. polygonorum inscriptiones. Methodus tangentium inversa *(2)* Polygonorum ... invers. | per *gestr.* | *erg. L* 16 methodus *(1)* serierum *(2)* continuarum *L*

24 *Fig. 1*: Zwei gestrichene Vorstufen zur Zeichnung werden nicht wiedergegeben.

$FE-FL-LM \sqcap \sqrt{y^2+2ax}-y+\frac{x}{b}\sqrt{y^2+2ba}+\frac{x}{b}y$. $\frac{NE}{ME} \sqcap \frac{x}{\sqrt{CL^2+LM^2}}$ et $NE \sqcap$

$\sqrt{y^2+2ax}-y+\frac{x}{b}\sqrt{y^2+2ba}+\frac{x}{b}y$ ⌢ $\frac{\not{x}}{x^{\not{2}}+\frac{x^{\not{2}}}{b^2}\overline{y^2+2ba}+\frac{x^{\not{2}}}{b^2}y^2 - \frac{2x^{\not{2}}}{b^2}\langle y\rangle\overline{y^2+2ba}}$.

E⟨ri⟩t $\frac{CD \text{ in } NE}{2} \sqcap \bigtriangledown^{\text{lo}}$. Quod jam faciendum est omnium possibilium maximum, qui calculus utique satis erit prolixus; compendiosius Constructione Geometrica id inveniemus ope et exemplo P. Gregorii a S. Vincentio. Sufficit quaeri NE, omnium possibilium maximam. Jam video tantum opus esse ut ducatur tangens parallela ipsi CD[,] tanget illa parabolam in puncto E et erit EN omnium possibilium maxima. Et jam generaliter video inscriptionem segmenti maximi in eo consistere, ut d u c a t u r t a n g e n s c u r v a m r e c t a e d a t a e p a r a l l e l a. Quod sic fiet generaliter[:] Tangens in E producatur dum axi occurrat in Q. Jam erit $QA \sqcap QF - \frac{v^2}{2a}$ et $\frac{QF}{v} \sqcap \frac{CH}{HD}$. At $QF \sqcap 2AF \sqcap \frac{v^2}{a}$. ob parabolam (si alia curva alia hic aeq⟨uatio⟩). Ergo fiet $\frac{v^2}{av} \sqcap \frac{CH}{HD}$. et $\frac{v}{a} \sqcap \frac{CH}{HD}$. Producta NE erit semper perpendicularis ad curvam, occurrat axi in R. erit $FR \sqcap a$. et erunt $\bigtriangledown^{\text{la}} EFR, CHD$ similia.

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{NE}{ME} \sqcap \frac{b}{CD}$

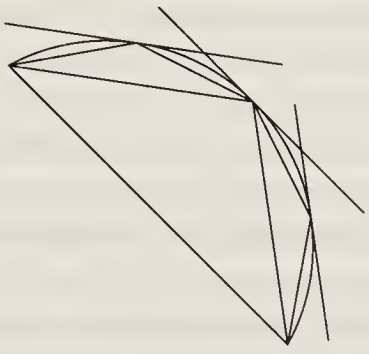
10 *Nebenbetrachtung:* $FE \sqcap v$. $\frac{v^2}{2a} \sqcap AF$.

11 *Am Rande:* Facile continuari potest ut tum prima media FE invenitur per rationem CH ad HD, ita 2da per rationem CL ad LE.

6 maximam *(1)* Habita semel triangulo maximo inscriptabili in aliqvot segm *(2)*. jam *L* 9 generaliter *(1)* CD producatur dum axi occurrat in P *(2)* tangens *L*

---

1 $+\frac{x}{b}\sqrt{y^2+2ba}$: Vor der Wurzel müsste ein Minuszeichen statt des Pluszeichens stehen. Leibniz übernimmt den Fehler in die Gleichung für NE, in der zudem im Nenner ein globales Wurzelzeichen fehlt. 5 Gregorii: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. V, prop. CCXXVII, S. 460. 7–9 Et ... p a r a l l e l a: vgl. VII, 1 N. 85_2 S. 573.



[*Fig. 2*]

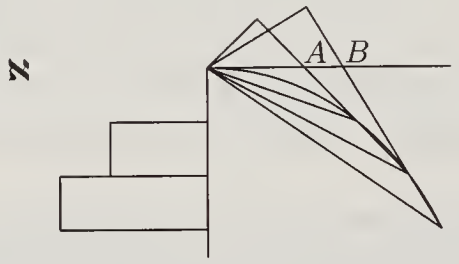
Caeterum hac methodo generalis institui poterit calculus, qua continue quaerantur maxima Triangula inscripta; eadem methodo et semper habebuntur minima circumscripta. Quod si jam talia generaliter calculemus habebimus methodos novas pro solvendis illis difficillimis problematibus irregularibus, ubi ejusmodi serierum infinitarum sed per quantitates non infinita intervalla habentes, inveniuntur summae. Summa autem est pro area investigatione; si vero non $\bigtriangledown^{\text{la}}$ sed subtensae semper quaerantur, vel adscriptae; tunc non quidem s u m m a opus erit, sed t e r m i n o seriei. Mirarum hoc modo progressionum summae ac termini invenientur. Nota semper terminus ultimus, curva, scilicet aequabitur summae differentiarum seriei. Si qua detur progressio ⟨artis⟩ foret maximae eam includere curvae in quam desinat. Quod utile ad curvas vel spatia invenienda ope cognitarum serierum. Hoc etiam pertinet ad methodum tangentium inversam.

Si talium Triangulorum area ducatur in distantiam centri gravitatis eorum a quodam axe, summa ⟨h⟩orum solidorum erit momentum figurae ex axe, quae momenta aliunde saepe data[,] area non data. Itaque innumera nova theoremata hinc emergent. Et generaliter calculando atque explicando pro arbitrio figuram datam habebuntur exempla satis simplicia. Quaeri et possunt cen⟨tr⟩a gravitatis ⟨in⟩scriptarum vel ascriptarum, quae terminari necesse est in curvae centrum gravitatis. His jam theorem⟨ata⟩ alia jungendo Tetragonistica ⟨ex⟩ Geometria et Trigonometria indivisibilium variarum habebuntur progressionum ejusmodi summae per ad se invicem relationes. Et quoniam convergentium serierum inveniri possunt etiam termini methodo Gregoriana inveniuntur inveniendo quantitatem eodem modo compositam ex primis et secundis terminis, tunc scilicet cum ipsi termini secundi componuntur ex primis, ut tertii ex ipsis. Quod perinde est ac in progressione quadam ordinatarum alicujus curvae invenire aliquod latus rectum. Sumantur in eam rem exempla ubi talia praestamus. Nimirum in illis curvarum expressionibus in quibus una ordinata invenitur per praecedentem; et ita unius inventio

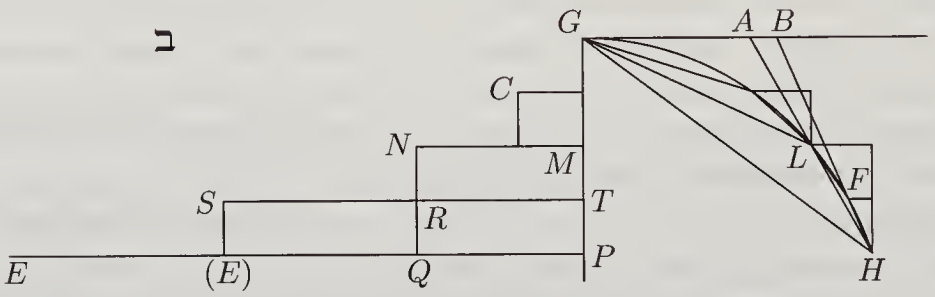
11 seriei *(1)* convergentis *(2)*; Mirarum *L* 16 eorum | a qvodam *streicht Hrsg.* | a *L* 23 habebunt *L ändert Hrsg.*

7 infinita: hier wie auch in S. 353 Z. 25 im Sinne von infinite parva verwendet. 10 *Fig. 2*: Eine nicht gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben. 24 methodo: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, def. 9, S. 10.

opus habet inventione omnium praecedentium, quaeritur inventio aequationis curvae seu relatio ordinatarum ad suas abscissas, qua inventa et quaedam parameter invenietur, aut etiam plures. Est autem parameter eodem modo composita ex primis quo ex secundis ordinatis cum suis abscissis. Jam inventio ejusmodi aequationis redit ad methodum tangentium inversam. Nota duobus semper opus ordinatis et abscissis, scilicet, ut ex iis eodem componatur modo parameter constans. Ita et in Gregorii calculo duobus semper opus variantibus. Idem est ac si Gregorius dixisset aequationem quaerendam explicantem progressionis naturam. Hinc patet quando aliis artibus inveniri potest quantitas eodem modo composita: tunc posse methodum tangentium inversam seu aequationem inveniri, ut cum quadratura habetur, seu seriei summa vel terminus.



[*Fig. 3a*]



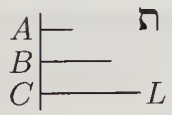
[*Fig. 3b*]

Nota si minima segmenti Triangula inscribere est uti methodo mea qua Triangula infinite parva ex eodem duco, ut in fig. א quoniam latus unum tangens alterum chorda, tunc enim exigua illa quae restant omnia negligi possunt. Videndum an figura quaedam describi possit, eo procedens modo quo ejusmodi Triangula inscripta. Vide in fig. ב. Sit

3 f. secundis *(1)* terminis, sumendo *(2)* ordinatis *L* 16 fig. *(1)* 2. *(2)* | G. *ändert Hrsg.* | sit *L*

6 Gregorii: *a. a. O.*, S. 23–28. 11 f. *Fig. 3a*, *Fig. 3b*: vgl. VII, 1 N. 85_2 S. 573 Fig. 2.

punctum constans ut G. Hinc chordae productae HL, ut HLA, occurrant in A. Transferuntur GA in MN ita ut M punctum Axis constantis respondeat ipsi L, et MN sit aequalis GA, et fiat rectangulum NMP, posito $NQ \sqcap MP$ esse $\sqcap$ distantiae inter ordinatam per L et per H. in axe. Similiter si rursus curvae LH inscribatur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LFH. et sumatur in NQ, ipsa QR vel PT aequalis altitudini ipsius F super H in axe sumtae, et juncta HFB dum ipsi GA occurrat in B. Transferatur GB in RS et erit $\square SRQ \sqcap \bigtriangledown^{\text{lo}}$ LFH et ita continuandum in infinitum donec veniamus ad tangentem, ut si HFB fuisset tangens. Unde jam patet figuram quam hac applicatione quaerimus non posse describi sed ordinatam ejus quamlibet esse infinitam. Cum enim semper desinatur in tangentem debet PE infinita v. g. esse summa omnium tangentium ducta in minimum intervallum, v. g. si FH fuisset tangens, fuisset $P(E)$ vel TS linea infinita ducenda in TP. Idem patet ubique contingere, et descriptionem curvae imaginariae hanc esse ut summa omnium tangentium in unam rectam extensa (: aliud est spatium complens :) axi applicetur. Hanc jam figuram infinito a nobis intervallo omnia sua puncta habentem repraesentare tentandum est per solidum. Nimirum si segmentis non quaereretur inscriptio $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ maximorum, sed talium ut intervalla ordinatarum in axe sint aequalia utique locum habebunt eadem omnia, et summa tangentium GA, GB, et intermediarum repraesentari poterit per totum spatium figurae segmentorum quod perpendiculariter superponetur ipsi TP, proxime praecedens ejusdem figurae segmentorum portio proxime praecedenti axis portioni infinite parvae imponetur: Video tamen difficultatem, non potest summa $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ aequari solido. Et video nec summam tangentium facere ipsam PE, sed summam occurrentium ad chordam productam. Etsi ultima earum sit tangens, impossibile spatium omnium infinitum aequari finito. Sed jam video quam mira ratione id fieri possit figuram scilicet cujus ordinatae omnes infinitae aequari finitae quantitati quia scilicet ipsae ordinatae etiam sibi immediatae, infinita dissident differentia, prorsus ac si



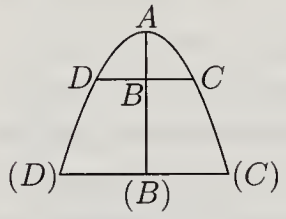
[*Fig. 4*]

fingeremus axi ABC. in infinitas partes diviso, infinitesimae cuilibet applicari numeros intervalla habentes primo pedem 2do, duos pedes, tertio tres etc. Talis area erit minor qualibet assignabili ut ergo haec finita pro nihilo haberi potest, alia talis infinita pro finito. Quare nec figura finita ei homogenea describi potest, nisi talis qualis $\sqcap$. quae in effectu infinite parva sive linea est, nam CL cadet etiam in A, et erit infinita opus linea pro CL, ut C absit ab A

6 erit: Die folgende Behauptung ist nicht richtig.

intervallo assignabili. Idem est ergo et si RQ in ipsa TP, sumta rectangula SQR ipsi RTP imponatur. Solidum enim tale cuidam plano aequale erit. Ut ergo solidum tale compleretur opus foret infinitis modis segmentum secari, et unos aliis perpetuo interseri. Tunc tota figura infinita, vel solidum ejus loco aequaretur segmento dato toties repetito seu si sit aliqua regula, cylindro ejus. Sed videndum quod fiat alio sumto segmento proxime minore, idque eodem modo, ut hoc bisecando, et ita solidum interpoland⟨o⟩. Quo posito etsi spatium compleatur difficile tamen id ad regulam accomodare. Nisi scilicet tandem deprehensuri simus incidere nos in summam ⟨so⟩lidorum seu complementum ⟨ung⟩ulae figurae segmentorum. Quod unum describi meretur ut appareat ut his tam irregularibus mo⟨di⟩s veras fi⟨gura⟩s producere liceat. Investigandum an modus haberi possit in his seriebus non tantum ultimum sed et ⟨que⟩mlibet alium seriei ter⟨mi⟩num inveniendi, item summam non solu⟨m⟩ ⟨o⟩mnium sed praecedentium una regula. Venient ista ad progressiones transcendentes, sumendo numerum terminorum pro y. etc. ut in logarithmis.

[*Zusatz*]



[*Fig. 5*]

Utile duas adhibere series convergentes. Ita enim erit perinde ac si sint duae figurae quarum ordinatae $(D)(B)$ et $(B)(C)$ aliquando coincidunt. Eo hic tantum discrimine; quod differentiae ordinatarum in figuris infinitae parvae quod non est in nostro casu. Id autem agitur ut inveniatur aequatio explicans relationem duarum serierum convergentium terminorum respondentium inter se invicem. Ejus enim aequationis ope invenietur valor ultimi termini ubi coincidunt ut si sit $x^2 + by^2 + cxy +$ etc. ponendo $x \sqcap y$. invenietur utrumque. Et hoc redit inventa Gregorii de compositis eodem modo cumque plura possint esse eodem modo compositae, intelligibilius dixisset quaerendam aequationem relationem explicantem: Si componitur c ex a. b. ut e ex c. d. ergo quod componitur ex a. b. ut ex c. d. componetur etiam ex c. d. ut e. f.

$a \quad b$
$c \quad d$
$e \quad f$

1 intervallo *(1)* sensibili *(2)* assignabili *L*

24 inventa Gregorii: *a. a. O.*

Si $c \sqcap \sqrt{ab}$. seu c. media geometrica inter a. et b. porro d media harmonica inter c. et b. nempe b. d. $\sqrt{ab}$. progressionis harm: $\sqcap \underset{b}{\frac{1}{v}} \underset{d}{\frac{1}{v+e}} \underset{\sqrt{ab}}{\frac{1}{v+2e}}$. Erit $v \sqcap \frac{1}{b}$. et $\frac{1}{b}\sqrt{ab}+2e\sqrt{ab} \sqcap 1$. et $e \sqcap \frac{1-\frac{1}{b}\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}$ et erit $d \sqcap \frac{1}{v+e} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1-\frac{1}{b}\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}}$.

$$\begin{array}{cc} x & y \\ (x) & (y) \\ ((x)) & ((y)) \end{array}$$

$(x) \sqcap \sqrt{xy}$ seu (x) media geometrica inter x et y vel $((x)) \sqcap \sqrt{(x)(y)}$ etc. vel generaliter $\overline{\omega(x)\omega} \sqcap \sqrt{\overline{\omega-1(xy)\omega-1}}$ quod coincidit cum $(x) \sqcap \sqrt{xy}$. Porro $\frac{(y)-y}{(x)-(y)} \sqcap \frac{y}{(x)}$ seu (y) media harmonica inter y. et (x). Substituatur in hac posteriore aequatione valor ipsius (x) ex praecedente et nulla supererit (x) fietque $\frac{(y)-y}{\sqrt{xy}-(y)} \sqcap \frac{y}{\sqrt{xy}}$. sive $(y)\sqrt{xy}-y\sqrt{xy} \sqcap y\sqrt{xy}-y(y)$ sive $(y) \sqcap \frac{2y\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}$ et $(x) \sqcap \sqrt{xy}$. Harum duarum aequationum ope methodo alibi a me tradita veniri poterit ad p r o b l e m a m e t h o d i T a n g e n t i u m i n v e r s a e , ejusque non ut alias in progressione lineari, per terminos differentiarum infinite parvarum sed in numerica per differentias rationem habentes ad tota assignabilem. Nunc et ad polygona finitorum laterum tangentes duci possunt, quae scilicet duos proximos angulos jungunt.

1 *Daneben:* pro sectore Circuli Ellipseos Hyperbolae

12 alibi: vermutlich VII, 4 N. 40_2. 15 Nunc: vgl. VII, 3 N. 50.

51. PRO METHODO TANGENTIUM INVERSA ET ALIIS TETRAGONISTICIS SPECIMINA ET INVENTA

Die beiden folgenden Teilstücke befinden sich auf dem selben Träger. Die Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus N. 51_1 wurde zuerst auf die erste Seite des Bogens geschrieben. Leibniz hat Datum und Überschrift seiner anschließend notierten Aufzeichnung N. 51_2 über die Gesprächsnotiz gesetzt und die beiden Stücke damit zusammengefasst. Vermutlich entstand die gemeinsame Studie mit Tschirnhaus am selben Tag wie Leibniz' Aufzeichnung oder kurz zuvor.

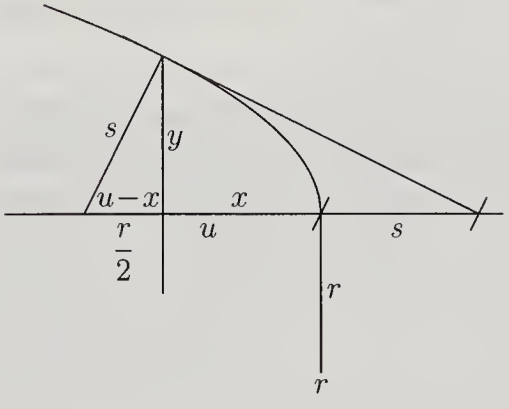
51_1. NOTAE

[Am oder kurz vor dem 27. November 1675]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 V 8 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 2 r°. Auf Bl. 2 v°–3 v° N. 51_2.
Cc 2, Nr. 1132

[*Tschirnhaus*]

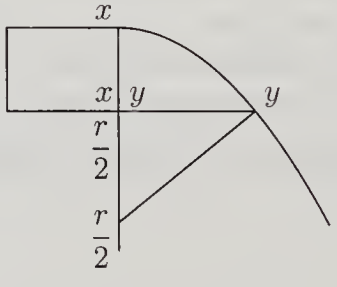
$rx \not\sim yy$



[*Fig. 1*]

[*Leibniz*]

$\frac{rx}{2} \sqcap \frac{y^2}{2}$



[*Fig. 2*]

15 *Links innerhalb von Fig. 1:* $\frac{yy}{4} \not\sim$ [*bricht ab*]

[*Tschirnhaus*]

$$uu - 2ux + xx + \cancel{yy} \propto ss$$
$$uu - 2ux + xx + rx \propto ss$$
$$xx - 2ux + uu \propto 0$$
$$+ \; rx - ss$$
$$\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \end{array}$$
$$2x\cancel{x} - 2u\cancel{x} \propto 0$$
$$+ \; r\cancel{x}$$
$$2x - 2u \propto 0$$
$$+ \; r$$
$$2x + r \propto 2u$$
$$x + \frac{r}{2} \propto u$$

$$x \propto u$$
$$x - u \propto [0]$$
$$xx - ux \; [\propto 0]$$
$$2xx - ux + uu \propto ss$$
$$\cancel{= ss}$$
$$\cancel{2}xx - \cancel{ux} + \cancel{uu} \propto \cancel{uu} - \cancel{2}ux + \cancel{xx} + yy$$
$$xx \propto - ux + yy$$
$$yy \propto - ux + xx$$

$$u \propto x$$
$$x - u \propto [0]$$
$$xx - ux \; [\propto 0]$$
$$\cancel{\frac{xx}{2}} - \cancel{ux} + \cancel{uu} \propto \cancel{uu} - \cancel{2}ux + \frac{\cancel{2}xx}{2} + yy$$
$$\cancel{= ss}$$
$$0 \propto -ux + \frac{xx}{2} + yy$$
$$2yy \propto xx - ux$$
$$2yy \propto xx - ux$$
$$x - u$$
$$x$$

---

14 *Darunter:* $z^3 \overline{\sqcap\!\sqcap} \; 3 \underline{\frac{rr}{2} \quad \frac{r}{2}}$ [*bricht ab*]

---

5 $2xx - ux$: Bei der hier vorgenommenen Umkehrung der Descartesschen Normalenmethode unter Verwendung von Huddes Doppelwurzelverfahren hätte Tschirnhaus den quadratischen Term mit $\frac{1}{2}$ (oder 1) und den linearen Term mit 1 (oder 2) multiplizieren müssen. Das richtige Ergebnis für die durch $u = x$ definierte Kurve gewinnt man aus der Gleichung $x^2 - 2ux + u^2 - s^2 = 0$. — Konsequent weitergerechnet hätte Tschirnhaus in Z. 9 $y^2 = ux + x^2$ erhalten. 14 f. $\cancel{\frac{xx}{2}}$: Die Gleichung müsste $\frac{x^2}{2} - ux + \frac{u^2}{2} - \frac{s^2}{2} = 0$ bzw. $\frac{x^2}{2} - ux + \frac{u^2}{2} = \frac{u^2}{2} - ux + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ lauten (vgl. Anm. zu Z. 5). — Bei konsequenter Fortsetzung der Rechnung hätte sich in Z. 17 $2y^2 = 2ux - x^2$ ergeben.

$rx \propto yy$

$u \propto \frac{r}{2} + x + x^2$

$x - u \propto 0$

$+ \frac{r}{2}$

$xx - ux$

$+ \frac{r}{2}$

$2 \quad 1 \quad 0$

$2xx - ux$

$+ \frac{r}{2}$

~~xx~~ $-$ ~~$2ux$~~ $+$ ~~uu~~ $\propto$ ~~uu~~ $-$ ~~$2ux$~~ $+$ ~~xx~~ $+ yy$

$+ \quad rx$ ~~$= ss$~~

$rx \propto yy$

$\frac{r}{2} + x \quad \frac{r}{2}$

$\frac{rr}{4} + \frac{rx}{2} \propto \frac{yy}{4}$

$uu - 2ux + xx + yy \propto ss$

$rr + 2rx \propto$ ~~yy~~ ~~rx~~

$u \propto r + x$

$rx \quad \frac{r}{2}$ in $x \quad \frac{rx}{2} \propto \frac{yy}{2}$

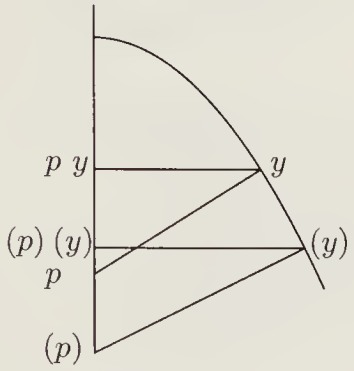
$rx \propto yy \qquad 2rx \propto yy$

$2 + x^2$ *erg. T*

---

5 2 1 0: Es müsste mit $\frac{1}{2}$ 1 0 (oder 1 2 0) multipliziert werden. Tschirnhaus setzt in Z. 8 noch einmal korrekt an.

[*Leibniz*]



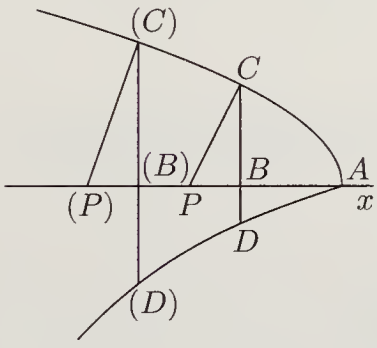
[*Fig. 3*]

$$\underbrace{v - x}_{p} \sqcap \underline{a + cx + dx^2} + ex^3 + fx^4$$

$$x \quad \frac{cx^2}{2} \quad \frac{dx^3}{3}$$

$$\sqrt{x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}\,\text{etc.}} \qquad \frac{y}{\sqrt{2}}$$ 5

[*Leibniz und Tschirnhaus*]

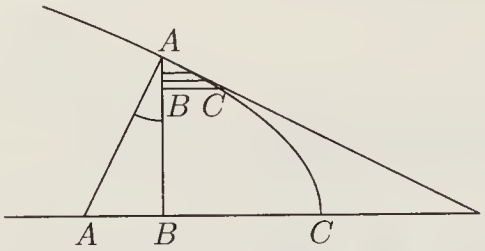


[*Fig. 4, Leibniz*]

---

5 *Unter der Wurzel:*
[*Tschirnhaus, verwischt*] [*Leibniz*]
$a \nsim b$ p

2 fx^4 | etc. *gestr.* | *L* 5 *(1)* $x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}$ etc. $\frac{y^2}{2}$ *(2)* $\sqrt{x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}\,\text{etc.}}$ | $\frac{y}{2}$ *ändert Hrsg.* | *L*



[*Fig. 5, Leibniz und Tschirnhaus*]

[*Tschirnhaus*]

$AB \mathrel{\overline{\sqcap\!\sqcap}} BC$

$$x \mathrel{\not\sim} \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$$

$$x \mathrel{\not\sim} \sqrt{}$$

[*Figur ohne eindeutigen Textzusammenhang*]

[*Fig. 6, Leibniz oder Tschirnhaus*]

7 Fig. 6 steht am oberen Rand neben Fig. 1.

51_2. PRO METHODO TANGENTIUM INVERSA ET ALIIS TETRAGONISTICIS SPECIMINA ET INVENTA

27. November 1675

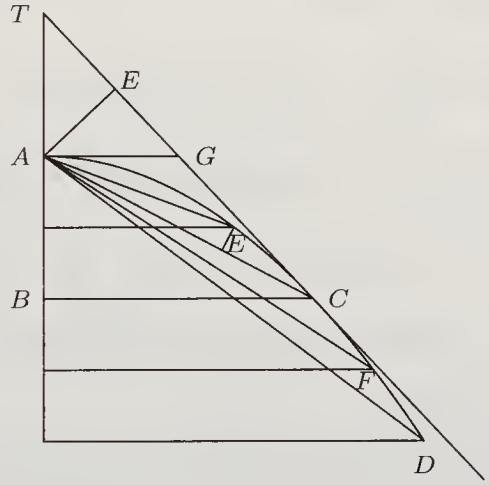
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. Ca 2 S. auf den oberen Dritteln von Bl. 2 v°, 3 r° (Teil 1) und den unteren zwei Dritteln von Bl. 3 r°, v° (Teil 2). Datum und Überschrift am oberen Rand von Bl. 2 r°. Untere zwei Drittel von Bl. 2 v° und oberes Drittel von Bl. 3 v° leer. Auf Bl. 2 r° N. 51_1. — Gedr. (tlw. = Z. 11 – S. 368 Z. 16): 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 41–45; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 104–109.
Cc 2, Nr. 1131

27. Nov. 1675

Pro methodo tangentium inversa
et aliis tetragonisticis specimina et inventa.
Trigonometria indivisibilium. Aequationes inadaequatae.
Ordinatae convergentes. Usus singularis Centri gravitatis.

[*Teil 1*]

Materia contemplationis novae de Centris gravitatis, hoc modo:



[*Fig. 1*]

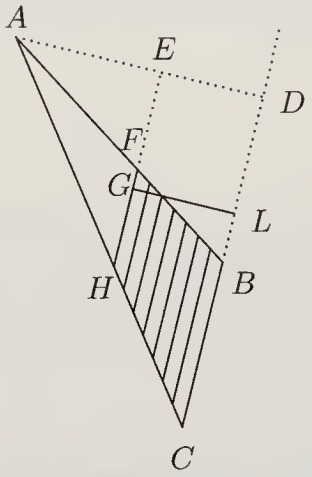
11–15 27. Nov. ... gravitatis *erg. L*

18 *Fig. 1*: Leibniz bezeichnet in der Figur zwei verschiedene Punkte mit *E*. Im Text wird nur der Kurvenpunkt *E* verwendet.

Segmento $AECD$ in $\bigtriangledown^{\text{la}}$ infinita AEC, ACF etc. resoluto inveniatur cujuslibet ex his $\bigtriangledown^{\text{lis}}$ centrum gravitatis quod facile est cum semper Centrum gravitatis $\frac{1}{3}$ Altitudinis parte distet a basi. Cumque via centri gravitatis in $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ducta aequetur revolutioni ejus, ipsae autem GA in infinitesimas axis aequentur duplo $\bigtriangledown^{\text{lo}}$, patet et ipsas AG in ipsas

---

1–3 *Nebenbetrachtung auf Bl. 2 v°:*



$AD \sqcap a$. $BC \sqcap b$. area $\bigtriangledown^{\text{li}}$ $ABC \sqcap \frac{ab}{2}$. $DE \sqcap x$. $DB \sqcap d$. $\frac{EF}{AE \sqcap a-x} \sqcap \frac{d \sqcap DB}{AD \sqcap a}$. $EF \sqcap \frac{d\overline{a-x}}{a}$. et $\frac{EH}{AE} \sqcap \frac{DC \sqcap b+d}{a}$. Ergo $EH \sqcap \frac{\overline{b+d}; \overline{a-x}}{a} \sqcap EF + FH$. Ergo $FH \sqcap \overline{b+d-d}, \frac{a-x}{a} \sqcap \frac{b}{a}\ \overline{a-x}$. Jam $GL \sqcap ED \sqcap x$. Ergo $HF \frown GL \sqcap \frac{b}{a}\overline{ax-x^2}$ quorum Summa $\frac{b}{a}\ \frac{\overline{ax^2}}{2} - \frac{x^3}{3}$. et posito $x \sqcap a$. fiet $\frac{ba^2}{2} - \frac{ba^2}{3} \sqcap \frac{ba^2}{6}$. Quae quantitas Momentum scilicet $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ex basi BC, divisa per aream $\bigtriangledown^{\text{li}}$ $\frac{ab}{2}$, dabit $\frac{a}{3}$. distantiam centri gravitatis $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ABC, a basi BC.

Am oberen Rand, ohne direkten Bezug zum Text: $\underbrace{a \sqcap b \sqcap c}_{\sqcap}$

3 in *(1)* distantiam ab axe ducta *(2)* rem *(3)* $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ L 4 autem | GH *ändert Hrsg.* | in L

---

5 Eine verworfene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

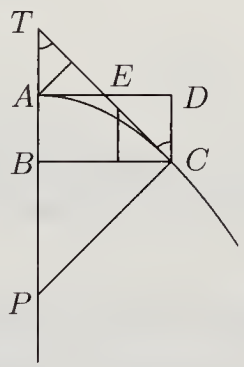
centrorum gravitatis ipsorum $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ AEC ab axe distantias ductas, momento segmenti ex axe aequari. Cujus methodi ope multa statim inveniri possunt dupliciter: Primum, sumendo figuram generalem, et calculando, indeterminate, eamque deinde ita explicando, ut centrorum gravitatis facilis habeatur inventio, ita detegentur momenta spatiorum aliter difficilium, si communi more per ordinatas quaererentur. Deinde contra, si figurae quarum communi more facile habentur momenta, hac methodo tractentur venietur ad curvas quasdam valde implicatas quarum semper dimensio habebitur ex facilioribus.

Ecce hic Regulam notabilem cujus ope ex qualibet Methodo utcunque implicata semper utilia eruuntur.

Utile est saepe quando alte assurgunt problemata, quae sua natura simplicia esse et aliunde solubilia scimus, ita enim multos detegent casus notabiles. Vide quae Tschirnhausius annotavit de tangentibus lineae Hastariae.

[*Teil 2*]

In problematis irregularibus, quae recta tractari aut ad aequationem, satis determinatam revocare non possumus, quia scilicet faciendum aliquid inverse, utile est plures vias inter se conferre, quarum producta coincidere debent. Hoc videtur utile ad methodum tangentium inversam. Ecce specimen.



[*Fig. 2*]

4 detegentur *(1)* figurae *(2)* momenta *L* 8 hic *(1)* Methodum notabilem per qv *(2)* Regulam *L* 8f. qvalibet *(1)* regula *(2)* Methodo *L* 14 aeqvationem, *(1)* unius incognitae *(2)* satis *L* 15 non *erg. L* 15 inverse, *(1)* utile est *(2)* | utile *gestr., erg. Hrsg.* | est *L* 17 Ecce specimen. *erg. L*

11 f. Tschirnhausius annotavit: nicht gefunden; vgl. die Erl. zu N. 49 S. 345 Z. 20.

Quaeritur figura in qua BP ipsis AT reciprocae. Sit $TB \sqcap t$. Erit $AT \sqcap t - x$. et erit $BP \sqcap \frac{a^2}{t-x}$. Multiplicetur in t. fiet $\square$. $TBP \sqcap \frac{ta^2}{t-x} \sqcap a^2 + \frac{a^2[x]}{t-x} \sqcap y^2$. Fiet: $ta^2 \sqcap ty^2 - xy^2$. et $t \sqcap \frac{xy^2}{a^2-y^2}$. Ergo $\frac{t}{x} \sqcap \frac{y^2}{a^2-y^2}$. Ergo $\overline{\text{omn}\, t} \sqcap$ momento ex vertice A, ipsorum $\frac{y^2}{a^2-y^2}$. Aliunde omnes TP ad axem aequantur omnibus TC. ad curvam.

$\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. Erit $\omega \sqcap \frac{\beta y}{t \sqcap \frac{y^2 x}{a^2-y^2}} \sqcap \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{xy}$. Jam $\int \overline{\omega} \sqcap y$. Ergo: $\int \frac{\overline{\beta\overline{a^2-y^2}}}{xy} \sqcap y$.

Porro $\omega x \sqcap \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y}$ et $\int \overline{\omega x} \sqcap yx - \int \overline{y\beta}$. Ergo: $\int \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y} \odot \sqcap yx - \int \overline{y\beta}$.

$\omega \sqcap d\overline{y}$. Ergo: $d\overline{y} \sqcap \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{xy}$. et $xy \sqcap \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{d\overline{y} \sqcap \omega} \sqcap \int \overline{y\beta} + \int \frac{\overline{\beta\overline{a^2-y^2}}}{y}$. Si jam ponamus ipsas y progressionis arithmeticae[,] erunt ipsae $\omega \sqcap d\overline{y}$ constantes, et β variabiles, et fiet: $\beta \sqcap \frac{\int \overline{y\beta + \beta\frac{a^2-y^2}{y}}}{a^2-y^2}$ et $d\overline{\beta\overline{a^2-y^2}} \sqcap \frac{a^2\beta}{y}$. Ob aeq. $\odot$. est $\beta\frac{a^2-y^2}{y} + \beta y \sqcap$

---

3 f. *Nebenbetrachtung:* $\frac{t}{x} \sqcap \frac{y, y}{a+y, a-y}$

9 *Nebenrechnung:* $y\beta + \frac{\beta\overline{a^2-y^2}}{y} \sqcap \frac{y^2\beta + \beta a^2 - y^2\beta}{y} \sqcap \frac{\beta a^2}{y}$.

3 $\frac{y^2}{a^2-y^2}$ *(1)* id est t. erit momentum ex *(a)* axe *(b)* vertice *(2)* ergo *L* 3 f. A, *(1)* omnium *(2)* ipsorum *L* 5 jam *(1)* $\overline{\text{omn}\,\omega} \sqcap$ y. *(2)* $\int \overline{\omega}$ *L* 7 $\int \frac{\overline{\beta\overline{a^2-y^2}}}{y}$. *(1)* Ergo $\frac{\beta}{\omega \sqcap d\overline{y}} \sqcap \int \overline{y+}$ *(2)* Si *L* 9 $d\overline{\beta\overline{a^2-y^2}} \sqcap$ *(1)* $y\beta\ \beta\overline{y-}$ *(2)* $\frac{a^2\beta}{y}$ *L*

---

3 $t \sqcap$: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung müsste $y^2 - a^2$ lauten. Der Vorzeichenfehler hat Auswirkungen auf die weiteren Überlegungen bis S. 365 Z. 2 und tritt auch in S. 365 Z. 11 wieder auf.

$d\overline{yx}$. Ergo $\frac{\beta a^2}{y} \sqcap d\overline{yx}$. Aequationes habuimus invicem independentes primam $\frac{dx}{dy} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{yx}{a+y, a-y}$ alteram $d\overline{yx} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{d\overline{x}a^2}{y}$.

Quaeramus adhuc alias, ut $\int \overline{td\overline{y}} \sqcap \int \overline{yd\overline{x}}$. Sed hoc nihil praebet novi. At $\int t\omega + \int x\omega \sqcap xy$. sive $\begin{matrix} t\,\omega \\ t\,d\overline{y} \end{matrix} + \begin{matrix} x\,\omega \\ x\,d\overline{y} \end{matrix} \sqcap d\overline{xy}$. At $t \sqcap \frac{dx}{dy} y$. Ergo hoc $\sqcap \frac{d\overline{xy} - xd\overline{y}}{dy}$. Ergo $d\overline{x}y \sqcap d\overline{xy} - xd\overline{y}$. Quod Theorema sane memorabile omnibus curvis commune est. Sed nihil ex eo novi ducetur, quia jam adhibuimus.

Sed ex alio principio novum habebimus theorema, quia scil. habetur summa omnium $BP \sqcap \frac{BC^2}{2}$. scilicet: $BP \sqcap \frac{a^2}{t-x}$. et $t \sqcap \frac{\beta y}{\omega} \sqcap \frac{d\overline{x}}{dy} y$ et $BP \sqcap \frac{a^2 d\overline{y}}{d\overline{x}y - d\overline{y}x} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{d\overline{y^2}}{2}$. Habemus ergo duas aequationes in quibus reperitur $d\overline{x}$ scilicet primam et tertiam, quarum ope tollendo $d\overline{x}$. habebimus aequationem, in qua una tantum incognitarum in vinculo remanebit, quo facto habebimus quaesitum, nimirum ex aeq. 1. erat $d\overline{x} \sqcap \frac{d\overline{y}yx}{a^2 - y^2}$ et nunc ex 3 erit $d\overline{x}yd\overline{y^2} - d\overline{y}d\overline{y^2}x \sqcap 2a^2 d\overline{y}$. Ergo $d\overline{x} \sqcap \frac{2a^2 d\overline{y} + d\overline{y}d\overline{y^2}x}{yd\overline{y^2}}$. Habemus ergo aequationem inter duos ipsius $d\overline{x}$ valores, in qua non nisi y. in vinculo, quo facto sumendo y Arithmetice proportionales, fiet $dy \sqcap \omega$ constans, et $d\overline{y^2} \sqcap z$. et $\int z \sqcap \frac{z^2}{2} \sqcap y^2$. Ergo $z \sqcap \sqrt{2}y \sqcap d\overline{y^2}$. Habemus ergo quaesitum.

Ecce elegantissimum specimen quo problemata Methodi Tangentium inversae solvuntur, aut saltem reducuntur ad Quadraturas: Nimirum efficiendum est si licet, diversis

1 $d\overline{yx}$. *(1)* qvae si multiplicentur in y. *(2)* Aeqvationes *L* 1 invicem independentes *erg. L*

2 $\frac{yx}{a+y, a-y}$ *(1)* alteram, *(a)* dx *(b)* $\frac{dx, a+y, a-y}{xy} \sqcap dy$ *(2)* alteram *L* 3 at *(1)* $\int t\beta +$ *(a)* $\int \langle y\beta \rangle$ *(b)* $\int x\beta \sqcap xy$. sive $t\beta + x\beta$ *(2)* $\int t\omega$ *L* 14 $dy \sqcap$ *(1)* y *(2)* | *β ändert Hrsg.* | constans *L*

---

8 $\overset{(3)}{\sqcap}$: Auf der rechten Seite fehlt im Nenner dx. Das Versehen beeinträchtigt die folgenden Überlegungen bis Z. 15.

aequationibus conquisitis, ut Una tantum incognitarum in vinculo Tetragonistico relinquatur. Hoc effici poterit ordinatas varie sumendo, imo et loco ordinatarum convergentes vel alias.

Nota si loco $x.$ vel $y.$ alia quaedam recta inveniri posset, ut quae esset obliqua, aut quae esset una ex convergentibus ad idem punctum, qua adhibita una tantum incognitarum in vinculis restaret, tuto adhiberetur, exemplum sumi posset in quaerenda ipsarum AP relatione, summa enim ipsarum $AP.$ ad axem, aequatur semiquadrato ipsius $AC.$

Quandocunque in vinculo relictae unius incognitae formulae sunt tales ut incognita non contineatur in irrationalitate aut nominatore, semper absolute solvi potest problema, reducitur enim ad quadraturam quae est in potestate, idem est in nominatoribus et irrationalibus simplicibus. At in compositis casus evenire potest, ut ad quadraturam redeamus quae non est in potestate.

Sed quicquid sit, quandocunque problema ad quadraturam reduximus semper describi potest curva quaesita motu Geometrico, qui exacte in potestate est, nec materialem curvam supponit. Haec porro methodus analytice exhibebit omnes quadraturarum a se invicem dependentias; et viam sternet ad absolvendam tetragonisticen.

Fateor interim fieri posse, ut ingenti numero a e q u a t i o n u m i n a d a e q u a t a r u m , (quales istas voco, quarum pluribus opus est ad solvendum problema, (+ etsi ipsae solae sufficerent, si tractabiles essent +)[)] opus sit ad unam penitus ex vinculis tollendam. Malum enim in eo est, quod una aequatione non nisi unus terminus ex vinculis tolli potest, et is si saepius inest, non nisi semel. Itaque intererit magnum quaeri numerum aequationum inadaequatarum. Et examinandum quae sint ab aliis quodam modo independentes; id est per simplicem calculum non possint a se invicem derivari, v. g. summa omnium AP, et summa omnium $AE.$

2 f. hoc ... alias *erg. L* 9 sunt *(1)* ration *(2)* tales *L* 11 ad *(1)* rationalitatem *(2)* qvadraturam *L* 11 qvae est *(1)* | in *streicht Hrsg.* | *(a)* potestate *(b)* | potest *streicht Hrsg.* | *(2)* in *L* 16 omnes *(1)* curvarum *(2)* qvadraturarum *L*

15 motu Geometrico: vgl. Cc 2, Nr. 895–897, dat. Januar 1675.

[*Teil 3*]

Novum genus Trigonometriae indivisibilium: ope ordinatarum non parallelarum sed convergentium

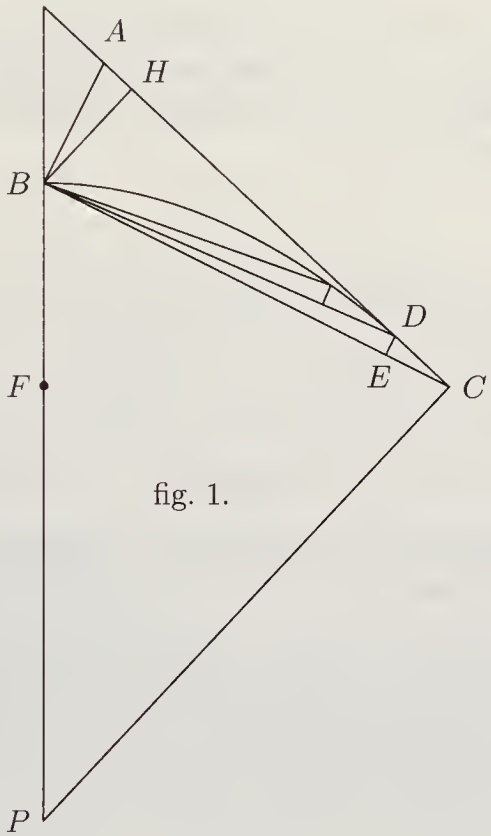


fig. 1.

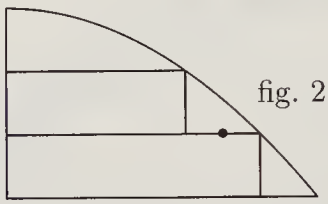
[*Fig. 3*]

Sit punctum fixum B. sit ad curvam $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ exiguum BDC. DE perp. in BC. Ex puncto B ducantur tangenti $AHDC$ occurrentes BA normalis ad BC seu parallela DE, et BH normalis ad tangentem DC productam. Hinc similia $\bigtriangledown^{\text{la}}$: CED, CHB, BHA. Ergo $\frac{BH}{CE} \sqcap \frac{HA}{DE} \sqcap \frac{BA}{CD}$. Adeoque: $BH, DE \sqcap CE, HA$. Et $BH, CD \sqcap CE, BA$. Ex quo sequitur summam $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ seu aream figurae aequari ipsis AB in CE seu in dif-

4 *Fig. 3*: DC wird im Text als Tangente, als Kurvenbogen und als Sekantenabschnitt interpretiert.
9 aream figurae aequari: Leibniz vergisst, die folgenden Produkte durch 2 zu dividieren. Der Fehler tritt auch in S. 368 Z. 2 f. auf, beeinträchtigt aber nicht die grundsätzliche Überlegung.

ferentias BD et denique $HA, CD \sqcap DE, BA$. Porro $\frac{CH}{CE} \sqcap \frac{HB}{DE} \sqcap \frac{CB}{CD}$. Unde rursus fiet: $CH, DE \sqcap CE, HB$. $HB, CD \sqcap DE, CB$, id est area $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ut per se patet, sibi ipsi [aequalis]. Denique $CH, CD \sqcap CE, CB$. Quod postremum notabile videtur pro Trochoeidibus.

Nimirum si curvae DC provolutione in plano immoto CA puncto B constante describatur curva Trochoeides; et posito ordinatam Trochoeidis ad planum immobile CA esse BH, ipsae CH. interceptae ad DC applicatae summatae, aequabuntur ipsis CB summatis ad suas differentias applicatis.



[*Fig. 4*]

Jam si ordinatae quaedam ad suas differentias applicentur idem producetur ac si quaeratur differentiarum momentum ex axe, id est momentum, ac si summa omnium seu maxima in distantiam sui centri gravitatis, id est puncti sui medii ab axe, id est in sui dimidium ducatur[,] id est aequatur summa talium semiquadrato maximi.

Semper ergo habebitur summa omnium BC in CE, quae aequabitur semper semiquadrato BC, sive summae omnium BP, ad axem applicatarum in F, si CP perpendicularis ad curvam DC.

---

10 vid. fig. 2

10–370,7 *Dazu, unter Fig. 6:* NB. elegans observatio[:] tentemus efficere ut trigonometria indivisibilium nos jubeat terminos applicare suis differentiis, et statim novum habebimus theorema elegans.

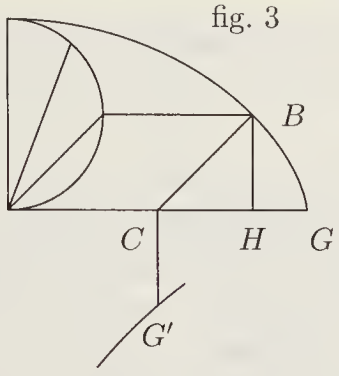
22 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* error

6 Trochoeides *(1)* erit ipsa BC perpendicularis ad Trochoeidem *(2)*; et *L* 7 DC *(1)* ipsarum CH differentias *(2)* applicatae *L*

---

9 *Fig. 4*: Zur Figur und zum zugehörigen Text vgl. N. 46 S. 325 Z. 17 – S. 326 Z. 4.

fig. 3



[*Fig. 5*]

Sit curva B talis Trochoeides, per punctum B descripta. Jungatur CB chorda describens, quam ostendam semper ad curvam esse perpendicularem, et BH, ordinata et HC applicentur in CG', ad planum, seu ad differentias ipsarum GC erit figura unde orta semper quadrabilis et aequalis semiquadrato CB. cum differen⟨tiae⟩ ipsarum GH (puncto G posito fixo) applicatae aequentur semiquadrato HB. Unde si applicentur differentiae inter has duas differentias summa earum aequabitur suo proprio semiquadrato, unde necesse est tunc locum fieri ad lineam rectam (forte, alia quoque, ℜ).

Superest ut demonstrem generaliter chordam illam ut BC semper dare perpendicularem ad Trochoeidem quod probo fig. 4.

Sit polygonum $ABCD$ provolvendum[,] sit punctum describens A. Centro C. radio CA, describatur circulus dum punctum [D] veniat in H punctum rectae BCH, et tunc A. perveniet in L. Juncta AL. utique erit tangens trochoeidis, bisecetur arcus AML. et jungatur CM quae secet AL in N. Secabit utique ad angulos rectos diameter scilicet Circuli chordam sui arcus bisectam a se, erit CN perpendicularis ad ANL tangentem

2 *Zu* Sit curva B: fig. 3

4 ipsarum | HC *ändert Hrsg.* | erit L

1 *Fig. 5*: Leibniz bezeichnet in der Figur zwei verschiedene Punkte mit G. Zur besseren Unterscheidung wird einer davon mit G' benannt. 3 ostendam: Leibniz orientiert sich an der Argumentation von Descartes im Brief an Mersenne vom 23. August 1638, gedr. in R. DESCARTES, *Lettres*, Band 3, 1667, S. 350 f. (*DO* II S. 308 f.); vgl. dazu auch Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii* [Marg.], 1659, *DGS* I S. 267 f. 13 tangens: Leibniz lässt hier und in Z. 15 bereits die Sehne AL mit der Tangente zusammenfallen. Die folgende Argumentation ließe sich aber mit dieser Sehne durchführen, die parallel zur Tangente in M ist.

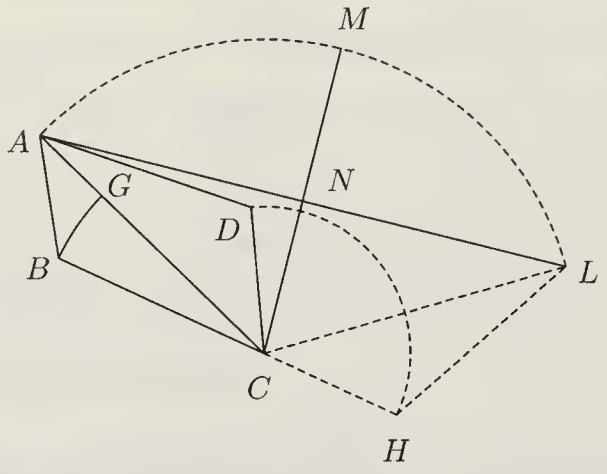


fig. 4

[*Fig. 6*]

ergo ad curvam. Jam CN, et CA vel CL eundem habent terminum communem, C, et posita CD infinite parva; differentiam ipsae quoque habebunt infinite parvam, sed et alter terminus, ut $A_{[,]}M$ vel L infinite parve differet. Ergo CN perpendicularis ad tangentem sive curvam.

Nota si in fig. 3. BC applicentur ad planum id est in generatrice chordae ad curvam dabitur superficies trochoeidis circa basin seu planum.

Data curva et pro Trochoeide sumta statim habebimus Elementa curvae quae generatrix esse debet, posita scilicet BC pro arithmetice proportionali investigentur ipsarum GC differentiae in fig. 3. id est in fig. 1. ex BC. ipsae DC. Datur autem sic EC. constans, et DC, ut dixi, ergo et DE, ergo et Triangulum CHB, adeoque BAH in fig. 1. Sed relatio desideratur inter BC, BF. Imo summa omnium CG fig. 3. seu CH in $DC \sqcap BP$ in diff. BF. Quia autem unius summae eaedem differentiae coincidunt, ergo fiet BP in diff. $BF \sqcap CH$ in DC. Adeoque habebitur valor BP in diff. BF. Ergo $x + \frac{\overline{dy^2}}{2}, dx \sqcap \sqrt{x^2+y^2}$

7 superficies *(1)* cycloeid *(2)* trochoeidis *L* 10 ipsae | DE *ändert Hrsg.*|. datur *L* 10 EC *(1)* arithm *(2)* constans *L* 11 Triangulum *(1)* AHE, *(2)* | CHA *ändert Hrsg.*|, adeoqve | CBA *ändert Hrsg.*| in *L*

1 *Fig. 6*: Leibniz hat die Figur ursprünglich für das abrollende Dreieck ABC entworfen und dann nur unvollständig angepasst. So liegt in seiner Skizze der Punkt L auf der Geraden BCH. Es wird eine textkonforme Figur abgedruckt. Eine fragmentarische gestrichene Vorstufe wird nicht wiedergegeben. 6 fig. 3: s. o. Fig. 5. 10 fig. 1: s. o. Fig. 3.

per etc. ⊓ v. cognitae, ex qua aequatione Trochoeidibus omnibus generali, si tollatur vel $d\overline{y^2}$, vel $d\overline{x}$ tunc quaelibet curva habere posset generatricem analyticam, quod fieri non potest, adeo nec generalis sublatio esse potest.

Interea NB. NB., si aliunde possumus semper Generatricis Trochoeidis inventionem habere suppositis quadraturis, habebitur hinc via generaliter tollendi $d\overline{x}$, ex aequatione aliqua vel $d\overline{y^2}$, alteram per alteram ope hujus inventae aequationis. Si non posset, tamen quia descriptio generatricis Trochoeidis per motum geometricum compositum, ut alibi inveni, semper haberi potest utendo in fig. 1. chorda pro ordinata, ita ut circa immobile centrum recta moveatur alias ducens, ideo possumus habere semper effectionem hujus aequationis novissimae geometricam.

7 alibi: s. N. 17 S. 157 Z. 6 – S. 158 Z. 2. 8 fig. 1: s. o. Fig. 3.

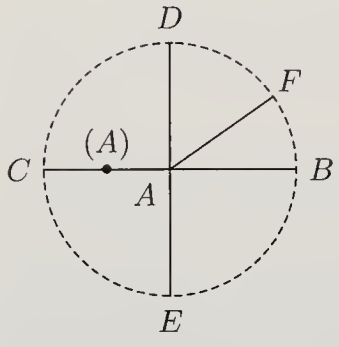
52. CURVARUM DIMENSIO EVOLUTIO EXPANSIO. SPECIATIM CURVAE HYPERBOLAE

8. Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 231–232. 1 Bog. 2°. 4 S. Figuren tlw. stark überarbeitet und schadhaft.
Cc 2, Nr. 1144

8 Xb. 1675

Curvarum dimensio evolutio expansio.
Speciatim curvae Hyperbolae



[*Fig. 1*]

Sint *AB*. *AC*. *AD*. *AE*. *AF*. aequales et rectae *CB* et *DE* se secent ad angulos rectos. Sit *AB* ⊓ *x*. *AC* ⊓ $-x$. Ob circulum centro *A* descriptum patet esse *AD* mediam proportione inter *AB*, et *AC*. Adeoque erit $AD^2 \sqcap -x \mathbin{\hat{}} x$ et $AD \sqcap \dagger\sqrt{-x^2}, \sqcap \dagger x\sqrt{-1}$. et *AE* erit $\dagger x\sqrt{-1}$. Eodem modo et alia recta ut *AF* poterit haberi, eodem modo si essent duae radices vera et falsa inaequales. Itaque non est Contradictio in quantitate $\sqrt{-1}$. Haec a Tschirnhausio observata. Vera contradictio est v. g. aequatio inter 1. et 2. et similis.

10–373,2 *Am Rande:* Generaliter videntur istae nihil dare ad problema; nempe: quantitati propositae addendum aut auferendum; ad aliam formandam, ex partibus: At hoc est nec addere nec auferre.

8f. Curvarum ... Hyperbolae *erg. L* 10 AE. | AC. *ändert Hrsg.* | aeqvales et | recta *ändert Hrsg.* | CB *L* 16 essent *(1)* lineae x et −x, inaeqvales. *(2)* duae *L* 19 *In Figur:* fig. 1. *gestr. L*

---

18 observata: Leibniz bezieht sich wahrscheinlich auf die in VII, 2 N. 61 u. 62 dokumentierten Gespräche mit Tschirnhaus.

Itaque si circuli ope invenienda sit talis linea ut $\sqrt{-1}$ erit impossibilis, quia supponitur simul et natura Circuli, in qua radius major inscriptis.

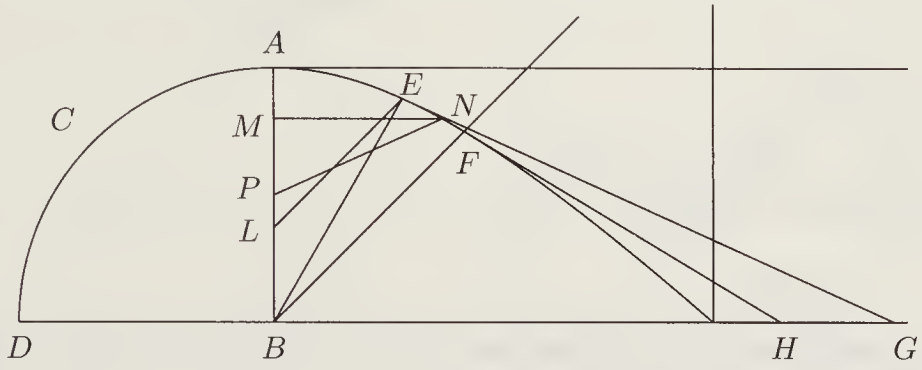


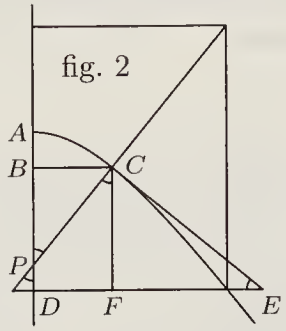
fig. 1.

[*Fig. 2*]

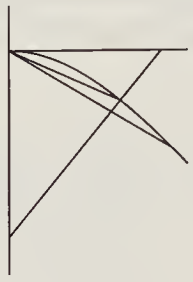
$AB \sqcap a$. Axis circuli vel Hyperbolae. Ejusdemque semilatus rectum. ACD circulus. AEF Hyp. Ex B ducantur rectae ad Hyp. puncta quaelibet, BE, BF, unde tangentes EG, FH, ipsarum jam interceptae BH, BG summa credo scil. ad AB. (+ videndum tamen meo more +) aequatur [duplo] spatio ejusmodi rectis ut BF, BE comprehenso. In circulo jam constat eandem repraesentare curvae Circuli Elementa; sed in Hyperbola invenit Tschirnhausius si Calculo quaeras v. g., et facias ut MN ad NL, ita data a, ad quartam; quartae valor dabit aequationem quae ab ipsius BH, valore nulla prope in re differet, nisi uno numero cognitam multiplicante; unde constat eandem esse curvam; etsi aliud sit curvae exemplum.

1 inveniendas *L ändert Hrsg.* 3 *In Figur: (1)* fig. 2 *(2)* fig. 1. *L* 5 ad *(1)* circulum *(2)* Hyp. *L* 6 FH, *(1)* ipsae jam interceptae *(2)* ipsarum jam | interceptae *ändert Hrsg.* | BH *L*

3 *Fig. 2*: Die von Leibniz flüchtig skizzierte und überarbeitete Figur der Vorlage stimmt nicht völlig mit dem zugehörigen Text überein. Außerdem fehlt der unter NP befindliche Teil des Dreiecks LEB durch Papierverlust, im oberen Teil laufen die Linien LE und BE in eine einzige zusammen. Mit der in Z. 9 auftretenden Strecke NL dürfte die Normale an die Kurve gemeint sein, wie die von Leibniz anschließend S. 374 Z. 2 – S. 375 Z. 1 durchgeführte Überlegung vermuten lässt. Der von Tschirnhaus angegebene Näherungswert wäre dann $a\sqrt{\frac{a^2+4ax+2x^2}{2ax+x^2}}$, der genaue Wert $BH = a\sqrt{\frac{a^2+4ax+4x^2}{2ax+x^2}}$.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Sit in fig. 2. quaerenda DE, AC Hyperbola. AB. Axis. $AB \sqcap x$, et $AD \sqcap a$. $BC^2 \sqcap 2ax + x^2 \sqcap y^2$. $BD \sqcap a - x$.

CP est perpendicularis ad curvam[,] ergo $BP \sqcap a+x$ (+ nota in figura debet Cadere P infra D +). Sunt Triangula PBC et EFC similia. Ergo $\frac{EF}{CF \sqcap a-x} \sqcap \frac{PB \sqcap a+x}{BC \sqcap \sqrt{2ax+x^2}}$ et $EF \sqcap \frac{a^2-x^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Cui si addatur $DF \sqcap \sqrt{2ax+x^2}$, fiet: $\frac{a^2 \boxed{-x^2} + 2ax \boxed{+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}} \sqcap DE$.

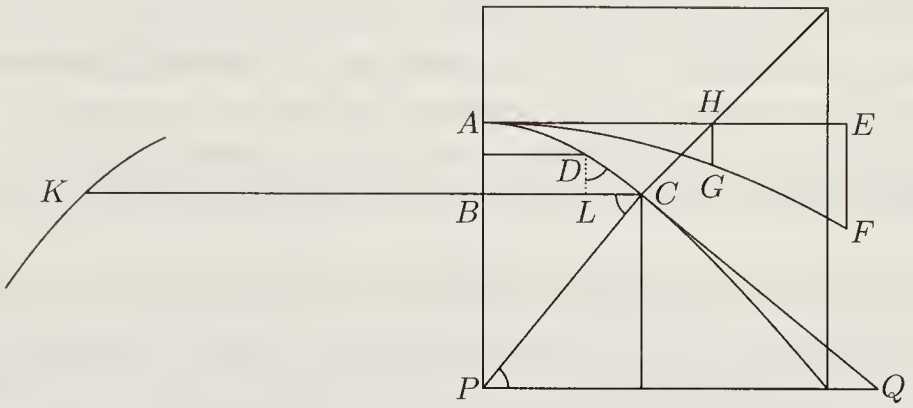
$\frac{2ax}{\sqrt{2ax+x^2}} \sqcap v$. Ergo $\frac{4a^2x^2}{2ax+x^2} \sqcap v^2$ et $\frac{4a^2x}{2a+x} \sqcap v^2$. et $2av^2 + xv^2 \sqcap 4a^2x$. et $x \sqcap \frac{2av^2}{4a^2-v^2}$. datur ex quad. hyp. ut constat. Ergo quia totum EF, etiam pars nempe ipsa $\frac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$ ex quad. Hyp. dabitur.

Quaeramus jam nunc et aliam figuram in qua ordinatae Curvam Hyp. repraesentent. Nempe Heuratii methodo fuit, ut BC, ad CP, ita a data ad quartam z.

8 AF *L ändert Hrsg.* 11–375,1 qvartam z. *(1)* $\frac{z}{a} \sqcap \frac{CB \sqcap \sqrt{2ax+x^2}}{CP \sqcap \sqrt{2ax+x^2+a^2+2ax+x^2}} \sqcap$ *(a)* $\sqrt{a+\frac{-a^2-2ax-x^2}{2ax+2x^2+a^2}}$ seu $a+x$ vocando ξ, fiet $\sqrt{a-\frac{\xi^2}{\xi^2+x^2}}$ *(b)* $\sqrt{1+\frac{-a^2-2ax-x^2}{2ax+2x^2+a^2}}$ seu $a+x$ vocando ξ, fiet $\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\xi^2+x^2}}$ *(2)* $\frac{a}{z}$ *L*

11 methodo: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 518.

$$\frac{a}{z} \sqcap \frac{CB \sqcap \sqrt{2ax+x^2}}{CP \sqcap \sqrt{2ax+x^2+a^2+2ax+x^2}}. \text{ Ergo } z \sqcap a\sqrt{1+\frac{a^2+y^2}{y^2}}.$$



[*Fig. 5*]

Alia Tschirnhausii inquisitio. Pro Curvae Elementis Heuratii methodo dicimus, ut BC, ad CP, ita data ut a, ad quartam ut BK, quae repraesentat Elementa curvae. Sin dicamus, ut BC ad CP, ita CP ad quartam BK, fiet $BK \sqcap \frac{CP^2}{BC}$. $\frac{DC}{DL \sqcap \beta} \sqcap \frac{PQ}{CP}$. Ergo $DC, CP \sqcap DL, PQ$. Ergo PQ transferendae sunt BK. Est idem quod jam dixi nempe loco puncti P fixi sumitur punctum variabile in quo perpendiculares occurrunt ubi patet et esse CP mediam proportionalem inter BC, et PQ seu BK.

Hinc et spatium ipsarum BK, aequabitur superficiei ungulae, quae fiat si ipsae CP ipsis DC seu curvae imponantur. In Circulo casu contingit ut CP, sit etiam constans, adeoque BK simul et curvam repraesentet et portiunculas, spatii hoc modo sumti. Jam si curva ADC expandatur in rectam AE, tunc si spatium AEF rectangulum quod solum in Circulo contingit utique ex data area spatii AE, quae jam habetur habebitur et altitudo seu curva; si posset inveniri AGF esse rectam et statim rectangulum ob datam aream et basin $EF \sqcap CP$, haberetur rursus altitudo seu curva, et ita in caeteris. Id ergo agitur tantum, ut inveniamus naturam expansi spatii, seu quae sit curva. Hoc ut meo more

15 f. *Am Rande:* NB.

11 repraesentet *(1)*, ad Circuli *(2)* et *L* 16–376,1 Hoc ... qvaeram *erg. L*

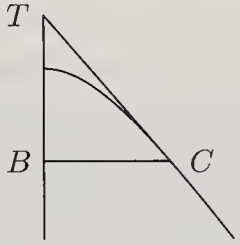
2 *Fig. 5*: Die Figur gibt den zugehörigen Text nur qualitativ wieder.

quaeram[:] Eam in rem ponantur DC Sibi aequales, sit v. g. $\frac{BC \sqcap \sqrt{2ax+x^2}}{BP \sqcap a+x} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2+\omega^2 \sqcap \alpha^2$ et $\sqrt{\beta^2+\omega^2} \sqcap \alpha \sqcap DC$ et $\beta^2 \sqcap \alpha^2-\omega^2$, sive $\beta \sqcap \sqrt{\alpha^2-\omega^2}$. Ergo ipsae ut hoc modo determinentur opus est quadratura circuli seu summa omnium β. Summa enim omnium β, seu omnium $\sqrt{\alpha^2-\omega^2}$ (quae sunt ad Circulum) pendet ex Circuli quadratura. Ex datis autem x, haberi possunt et CP. Semper ergo ipsarum CP (idem est de similibus aliis, quae si imponantur curvae spatium formant quod datur, vel quod ex dato spatio proposito dantur) valor dabitur ope seu quadratricis meae seu summae sinuum.

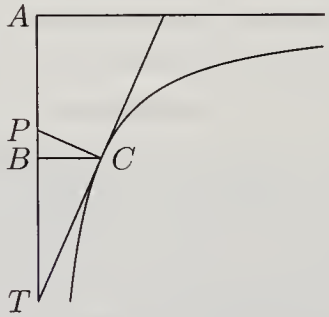
Hinc magna spes omnes quadraturas ad Circuli et Hyp. etc. reduci posse. In nostro exemplo $CP \sqcap HG$ erit $\frac{a^2+2ax}{\sqrt{2ax+x^2}}$ ponendo scilicet $x \sqcap \int \overline{\alpha^2-\omega^2}$. et $AH \sqcap \int \overline{\alpha}$. Jam video errorem meum de Circulo, neque enim ω sunt arithmeticae.

Sed ita procedendum. Sunt aequationes duae:

Una: $\frac{y}{\frac{y^2}{t}} \sqcap p \sqcap \frac{\beta}{\omega}$, sive $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2+\omega^2 \sqcap \alpha^2$. Erit: $\omega \sqcap \frac{y\beta}{t}$. et $\omega^2 \sqcap \frac{y^2\beta^2}{t^2}$ et $\frac{t^2\beta^2+y^2\beta^2}{t^2} \sqcap \alpha^2$. et $\beta \sqcap \frac{t\alpha}{\sqrt{t^2+y^2}}$.



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

15 *Zu Fig. 6:* $\sqrt{t^2+y^2} \sqcap TC$ ipsa scilicet tangens.

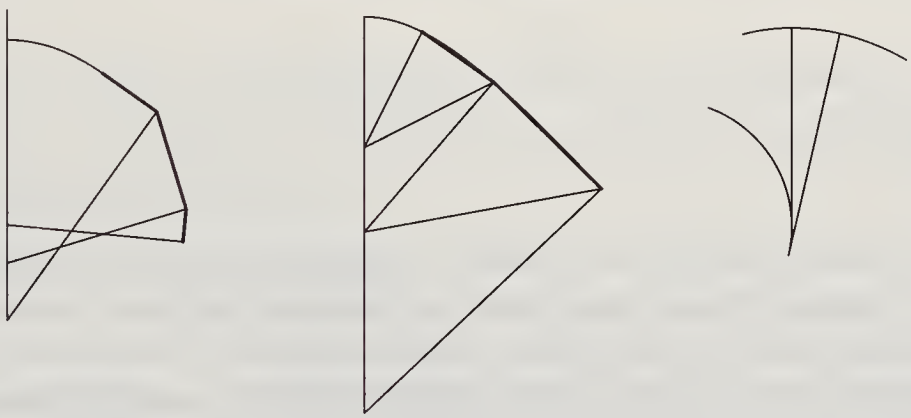
7 ex *(1)* data Curva *(2)* dato L 7 ope *(1)* dimensionis ⟨anguli⟩ *(2)* seu L

In Hyp. ad asympt. $BP \sqcap \frac{a^4}{x^3}$ et $PC^{[2]} \sqcap \frac{a^8}{x^6} + \frac{a^4}{x^2} \sqcap \frac{a^8 + a^4x^4}{x^6}$ et TC hic $\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{x^2}} \sqcap \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$ et $\beta \sqcap \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. Quae aequatio ipsarum β reciproca aequationis Elementorum ipsius curvae ad Asymptotos. Sed hic x non amplius sunt arithmeticae. Sed res eo redit, ut ipsas x inveniamus, scilicet huc res redit; invenire figuram in qua differentiae β, eam habeant relationem ad suas summas x, quam dixi[,] scilicet $dx \sqcap \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. Adeoque $x \sqcap \int \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. et ponend⟨o⟩ ipsas x progressionis arithmeticae nunc ut habeatur summa, utique patet rem redire ad hoc ipsum ut curvae Elementorum dimensio habeatur. Imo non ipsius Curvae opus est dimensione, sed alterius quae ipsi reciproca.

Videndum anne hoc semper. Item an hic recte v. g. $dx \sqcap \frac{x^2}{a^2}$. Ergo $x \sqcap \int \frac{x^2}{a^2} \sqcap \frac{x^3}{[3]a^2}$ absurdum. Video jam non esse in nostra potestate pro arithmetica sumere, quia scilicet

---

1–378,9 *Am Rande, durch Strich abgetrennt:*



NB. Non habetur absolute summa perpendicularium in curvam, ex area spatii sed addenda area ordinatarum ad perpendiculares translatarum.

1 *Nebenrechnung:* $\frac{a^2}{x} \quad \frac{a^4}{x^2} \smile x$

7 habeatur. *(1)* sed ut artificio aliqvo immutetur Calculus qvaeramus non ipsam β, sed ω *(2)* Imo *L*

nulla amplius litera arbitraria est; et eo ipso, quia datur talem esse x, ut talis sit ejus differentia non potest sumi arithmetica.

In Hyp. ad axem $\frac{y}{p \sqcap a+x} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2+\omega^2 \sqcap \alpha^2$ sive $\frac{y^2 \sqcap 2ax+x^2}{a^2+2ax+x^2} \sqcap \frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ sive $1+\frac{a^2}{2ax+x^2} \sqcap \frac{\alpha^2}{\beta^2}-1$. et $2\beta^2+\frac{a^2\beta^2}{2ax+x^2} \sqcap \alpha^2$ et $2\beta^2 2ax+2\beta^2x^2+a^2\beta^2 \sqcap \alpha^2 2ax+\alpha^2x^2$, et $\beta^2 \sqcap \frac{\alpha^2\overline{2ax+x^2}}{4ax+2x^2+a^2} \sqcap \alpha^2-\omega^2$ et pro $2ax+x^2$ ponendo y^2, fiet $\frac{\alpha^2y^2}{2y^2+a^2} \sqcap \alpha^2-\omega^2 \sqcap \beta^2$, sive $\omega^2 \sqcap \alpha^2-\frac{\alpha^2y^2}{2y^2+a^2}$ et $\omega^2 \sqcap \frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2a^2}{2y^2+a^2}$. Sunt autem ω differentiae, y summae. Unde rursus ejusmodi oritur relatio atque ex his jam illud hac ratione saltem discimus quomodo possimus problemata reciproca in quibus quaeritur summa ex data relatione inter summam et differentiam, reducere ad Curvarum expansiones.

Simplicissimus jam in mentem venit et perelegans curvam ejusmodi expansione faciendam describendi modus: Si curva AB plano $A(B)$ applicetur et inter provolvendum, propellat mobilem ipsi $A(B)$ normalem perpetuo $(B)(P)$ cum axe $(A)(P)$ in (P) semper intersecantem. Puncta intersectionis (P) dabunt curvam novam.

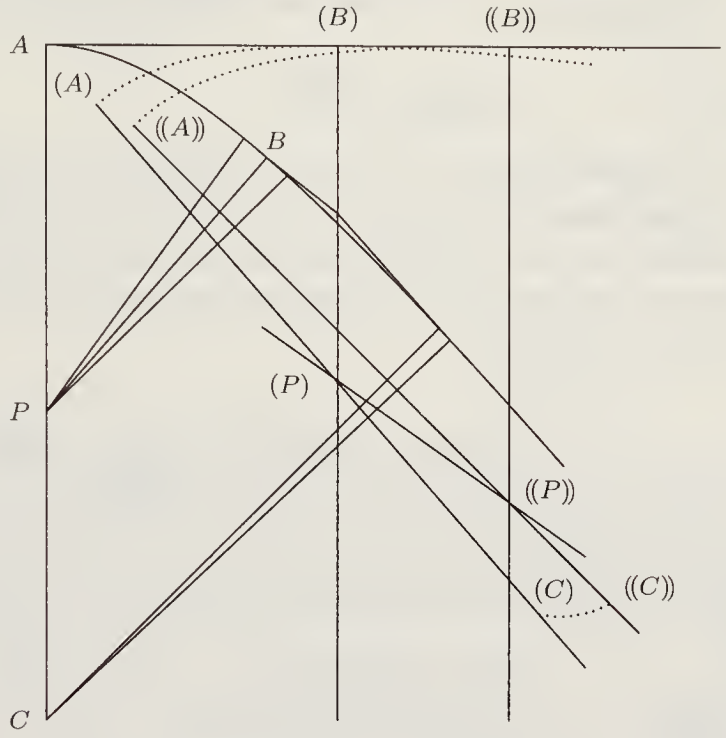
10–380,12 *Am Rande, durch Strich abgetrennt:* NB. NB. $BP \sqcap v$. Ergo $4ax+2x^2+a^2 \sqcap v^2$. Ergo $2ax+x^2+a^2 \sqcap \frac{v^2+a^2}{2}$ et $x \not+ a \sqcap \sqrt{\frac{v^2+a^2}{2}}-a$. et $(B)((B)) \sqcap \frac{va}{\sqrt{\frac{v^2-a^2}{2}}}$.

Cujus figurae seu omnium $(B)((B))$ ex v quaeritur quadratura. Idem est si cujuslibet alterius figurae, relationem Elementorum curvae, ad alias ipsis insistentes, explicantis haberi posset dimensio saltem symmetros ipso, ungularis superficiei ex insistentibus factae spatio habebitur ex dato illo spatio ungulari, et ipsa curva. Hinc si spatium ungulare curvae figurae symmetrorum videndum an hac relatione aliud symmetron obtineatur. Hinc multiplici semper calculo fortuna tentari potest.

12 in P *L ändert Hrsg.* 15 f. B(B) *L ändert Hrsg. zweimal*

---

6 $-\frac{\alpha^2a^2}{2y^2+a^2}$: Richtig wäre $+\frac{\alpha^2a^2}{4y^2+2a^2}$; der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.



[*Fig. 8*]

$BP \sqcap \sqrt{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}$. sive $\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$. Et $(B)((B)) \sqcap \dfrac{BPa}{\sqrt{2ax + x^2}}$ sive $BP \sqcap \dfrac{(B)((B))\sqrt{2ax + x^2}}{a}$.

Differentiae ipsarum BP sunt

$$-\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} + \sqrt{4ax + 4a\beta + 2x^2 + 4x\beta + 2\beta^2 + a^2} \sqcap e.$$

et

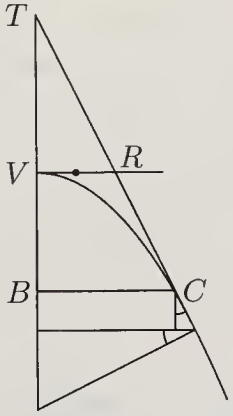
$$\boxed{+4ax} \; +4a\beta \; \boxed{+2x^2} \sqcap \boxed{4ax} \; \boxed{+2x^2} \; \boxed{+a^2} \; (\oplus e^2 + 2e\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$$
$$+4\beta x \, (\oplus 2\beta^2$$
$$\boxed{+a^2}$$

378,13–379,2 novam. *(1)* Differentiae ipsarum BP, sunt $\sqcap \sqrt{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}$. sive *(a)* si ipsarum *(b)* $\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$ sunt ipsae BP $\sqcap$ *(2)* BP *L* 2–380,2 B(B) *L ändert Hrsg. fünfmal* 7–380,1 $+2e\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$ *(1)* $4\beta^2x^2 + 16a\beta^2x + 16a^2\beta^2 \sqcap 4e^24ax + 4e^22x^2 + 4e^2a^2$ *(2)* vel *L*

vel $e \sqcap \frac{2a\beta + 2\beta x}{\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}$. et $(B)((B)) \sqcap \frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Fiet $\frac{(B)((B))}{e} \sqcap \frac{\overline{2a\beta + 2\beta x}\sqrt{2ax + x^2}}{4a^2x + 2ax^2 + a^3}$ et $e \frown (B)((B)) \sqcap \sqrt{\frac{x\beta\alpha}{a}}$.

Cum ergo differentia ipsarum BP ad ipsas $(B)((B))$ non habeat rationem constantem, patet non posse lineam $(P)((P))$ esse rectam, ut mihi dictum erat.

Unica Calculandi de istis via haec est: In omnibus curvis Analyticis sciri potest relatio differentiarum ipsarum y, ad y. Eadem in his semper nota est, judicari poterit ergo an haec curva sit analytica.



[*Fig. 9*]

$\int x\omega \sqcap xy - \int \overline{y\beta}$. $\frac{\beta}{\omega} \sqcap \frac{y}{\frac{dy^2\beta}{2}}$. et $d\overline{y^2\beta} \sqcap \frac{2y\omega}{\beta}$. et $y^2\beta \sqcap 2\int \frac{y\omega}{\beta}$.

$\frac{VR}{t-x} \sqcap \frac{y}{t}$. $VR \sqcap \frac{y}{t}, t-x$ et $\frac{\int y - \int \frac{\overline{yx}}{t}}{2} \sqcap \int y - \frac{yx}{2}$. Adeoque $\frac{yx}{2} - \frac{\int \frac{\overline{yx}}{t}}{2} \sqcap \int \frac{y}{2}$. Ergo $yx \sqcap \int \frac{yx}{t} + \int y \sqcap \int y\beta + \int x\omega$. et $\frac{yx}{t} + y \sqcap y\beta + x\omega$.

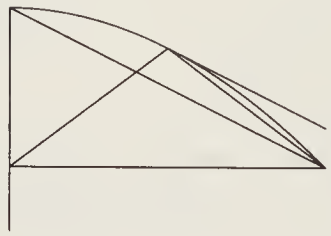
Lineas quasdam ita producere, ut sint ad lineam ad quam terminantur perpendiculares. Ergo ipsae non possunt esse ordinatae vel convergentes: sed perpetuo angulum mutari debent. Tangentibus aliquid determinare vel perpetuo anguli mutatione idem est.

1 $\sqcap \frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}$ | qvae dantur *streicht Hrsg.* ex natura *(1)* hyp. Qvad. *(2)* Circul *gestr.* | fiet *L* 5 curvis *(1)* Geometricis *(2)* Analyticis *L*

1 $\frac{(B)((B))}{e}$: Leibniz berechnet irrtümlich $\frac{e}{(B)((B))}$, auch die folgende Gleichung ist nicht richtig. Die Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt. 4 dictum: s. o. S. 378 Z. 13. 8 $\frac{\beta}{\omega} \sqcap$: Im Nenner der rechten Seite müsste $\frac{dy^2}{2\beta}$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt die beiden folgenden Gleichungen.

Perpendiculares alicujus curvae ita producere ut sint alterius cujusdam curvae perpendiculares.

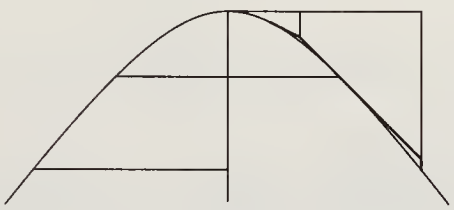
[*Fig. 10*]



[*Fig. 11*]

In Circulo angulus tangentis ad Chordam est dimidius anguli ad circumferentiam. Quaeratur Curva in qua sit triens. Sed videtur hoc non esse in potestate, quia curva omnis non uniformis et Circulus et diversis modis sumendo non quadrabit facile.

Modus hic detegendi impossibilitatem problematum Geometrice sine Calculo.

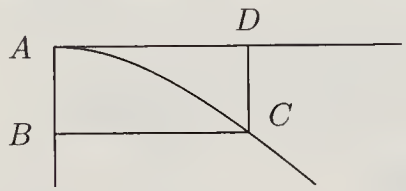


[*Fig. 12*]

4 est *(1)* duplus *(2)* dimidius *L* 5 sit *(1)* triplus *(2)* triens *L* 7–382,1 Calculo. *(1)* $\sqrt{+1 \mp \frac{a}{q}\frac{a^2}{2ax+x^2}} \sqcap \omega.$ $\frac{\sqrt{2a\ x+x^2 \mp \frac{a}{q}\ x \mp \frac{a}{q}\ x^2 + a^2,, \frown 2ax+x^2}}{2ax+x^2} \sqcap \omega,$ vel $\frac{\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2}}{y} \sqcap \omega$ *(a)* $\omega^2 \sqcap 1 \mp \frac{a}{q} + \frac{a^2}{y^2}.$ $y^2\omega^2 \sqcap y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2.$ et $y^2\omega^2 - y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 \sqcap a^2.$ et $y \sqcap \frac{a^2}{\sqrt{\omega^2 - 1 \mp \frac{a}{q}}}$ *(2)* $\beta\ldots \sqcap z.$ | $\frac{\sqrt{2a\ x+x^2 \mp \frac{a}{q}\ x \mp \frac{a}{q}\ x^2 + a^2,, \frown 2ax+x^2}}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \sqcap \omega$ *ändert Hrsg.*|, vel *L*

$$\beta\sqrt{\frac{+1}{\mp\frac{a}{q}}\frac{a^2}{2ax\mp\frac{a}{q}x^2}} \sqcap z. \quad \beta\frac{\sqrt{\begin{matrix}2a\ x\mp\frac{a}{q}x^2\\ \mp 2\frac{a^2}{q}x+\frac{a^2}{q^2}x^2\end{matrix}\ +a^2,,\ \frown\ 2ax\mp\frac{a}{q}x^2}}{2ax\mp\frac{a}{q}x^2} \sqcap z, \text{ vel}$$

$$\beta\frac{\sqrt{y^2\mp\frac{a}{q}y^2+a^2}}{y} \sqcap z.\ 2ax\beta^2\mp\frac{a}{q}x^2\beta^2\mp 2\frac{a^2}{q}x\beta^2+\frac{a^2}{q^2}x^2\beta^2 \sqcap z^2[y^2]-a^2\beta^2.\ y^2z^2 \sqcap y^2\mp\frac{a}{q}y^2+a^2.\ \text{et}\ y^2z^2-y^2\mp\frac{a}{q}y^2\sqcap a^2.\ \text{et}\ y\sqcap\frac{a^2}{\sqrt{z^2-1\mp\frac{a}{q}}}.$$



[*Fig. 13*]

$AD \sqcap y.\ DC \sqcap x.$ et $2ax\mp\frac{a}{q}x^2\sqcap y^2$. Ergo $\mp[2]qx+x^2+q^2\sqcap\mp\frac{q}{a}y^2+q^2$ et $\mp x\mp q\sqcap\sqrt{q^2\mp\frac{q}{a}y^2}$. et $x\sqcap\mp q\mp\sqrt{q^2\mp\frac{q}{a}y^2}$.

$$2ax\mp\frac{2a}{q}x^2\sqcap 2y\theta.\ \theta\sqcap\frac{ax\mp\frac{a}{q}x^2}{y}\sqcap\frac{y^2+ax}{y}\sqcap y+\frac{ax}{y}\ \text{e}\langle\text{t}\rangle\ \theta\sqcap y+\frac{\mp q\mp\sqrt{q^2\mp\frac{q}{a}y^2}}{y}.$$

---

7 *Nebenbetrachtung:* $2ax\mp\frac{a}{q}x^2\sqcap y^2.\ 2at\mp 2\frac{a}{q}xt\sqcap 2y^2.\ t\sqcap\frac{y^2\sqcap 2ax\mp\frac{a}{q}x^2}{a\mp\frac{a}{q}x}.\ t-x\sqcap$

$$\frac{\textcircled{2}ax\ \boxed{\mp\frac{a}{q}x^2}\ \boxed{-ax}\ \boxed{\mp\frac{a}{q}x^2}}{a\mp\frac{a}{q}x}.$$

---

2 $y^2z^2\sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Faktor β^2. Leibniz rechnet konsequent weiter und setzt in Z. 4 neu an. 7 $\sqcap\frac{y^2+ax}{y}$: Richtig wäre $\frac{y^2-ax}{y}$. Dieser und weitere Fehler beeinträchtigen die Rechnung bis S. 385 Z. 1.

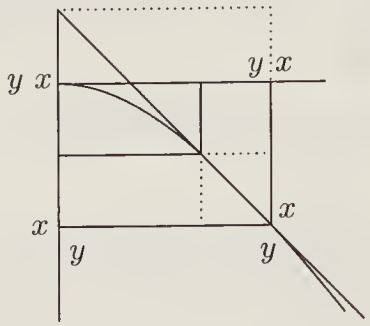
$$\frac{\theta}{x} \sqcap \frac{\omega}{\beta} \text{ et } \beta \sqcap \frac{x\omega}{\theta \sqcap y + \frac{ax}{y}} \sqcap \frac{xy\omega}{y^2 + ax} \sqcap \frac{y\omega}{a} + \frac{y^3\omega}{a^2x + ay^2}.$$

$$\beta^2 + \omega^2 \sqcap \frac{x^2\omega^2}{\theta^2} + \omega^2 \sqcap z^2. \text{ et } z \sqcap \frac{\omega}{\theta}\sqrt{x^2 + \theta^2}.$$

---

1 *Nebenbetrachtung:* β differentia partium axis. ω differentia partium tangentis verticis. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$.

382,7 $\mp\frac{2a}{q}x^2 \sqcap$ *(1)* 2yt. t $\sqcap \frac{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \frac{y^2 + ax}{y} \sqcap y + \frac{ax}{y}$ e⟨t⟩ t $\sqcap y + \frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y}$ et $\frac{t}{y} \sqcap$ *(a)* $\frac{\beta}{\omega}$ erit $\omega \sqcap \frac{y\beta}{t}$ et $\omega \sqcap \frac{y\beta}{y + \frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y}}$. Cuius figurae datur summa seu omnium $\frac{y^2\beta}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} \sqcap \beta + \frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$ eius qvadrato addatur qvadratum β^2, et qvaeratur z pro curvae Elemento fiet $z^2 \sqcap 2\beta^2 + \frac{q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}{y^4 \mp 2qy^2 \ni 2y^2\sqrt{q^2 + \frac{q}{a}y^2}, +q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + 2\beta\frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$ *(b)* $\frac{\omega}{\beta}$ erit $\beta \sqcap \frac{y\omega}{t}$ et $\beta \sqcap \frac{y\omega}{y + \frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y}}$. Cuius figurae datur summa seu omnium $\frac{y^2\omega}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} \sqcap \omega + \frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$ eius qvadrato addatur qvadratum β^2, et qvaeratur z pro curvae Elemento fiet $z^2 \sqcap 2\omega^2 + \frac{q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}{y^4 \mp 2qy^2 \ni 2y^2\sqrt{q^2 + \frac{q}{a}y^2}, +q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + 2\omega\frac{\mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \ni \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$ *(2)* 2yθ *L*



[*Fig. 14*]

$x^2 \sqcap q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2$. et $\theta^2 \sqcap y^2 + 2ax + \frac{a^2x^2}{y^2}$. Ergo $\theta^2 \sqcap y^2$ $\boxed{\mp 2qa}$ $\mp$ $2a\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + \frac{2a^2q^2}{y^2} \mp \frac{2qa^2}{y}\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}$ $\boxed{\mp 2qa}$.

$$z \sqcap \sqrt{\frac{1}{\mp \frac{a}{q}\frac{a^2}{y^2}}} \frown \frac{y\omega}{a} + \frac{y^3\omega}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{q^2 \mp \frac{a}{q}y^2} + ay^2}.$$

$$z \sqcap \frac{\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2}}{\not{y}} \frown \frac{\not{y}\omega}{a}\boxed{+\frac{y^{\not{3}2}\omega}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}}\frac{\omega}{a} + \frac{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots}}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}.$$

$z \sqcap \sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2} \frown 2\omega a + \frac{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots}}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}$ quae pendet ex Curva proposita

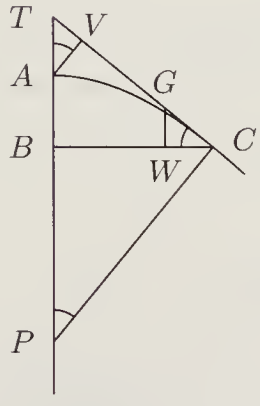
---

4 *Nebenbetrachtung:* $zy \sqcap \beta\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2}$ et $z^2y^2 \sqcap \beta^2y^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}y^2 + \beta^2a^2$ et $y^2 \sqcap \frac{\beta^2a^2}{z^2 - \beta^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}}$. et $y \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{z^2 - \beta^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}}}$ et $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 + a^2 \sqcap a^2 + \frac{\beta^2a^2}{z^2 - \beta^2}$ etc. et $x \sqcap$ [*bricht ab*]

8 f. et *(1)* x+ *streicht Hrsg. (2)* x $\sqcap$ *L*

ubi opus est, ut quaeramus $\frac{\dagger a^2 q \frown \sqrt{y^2 \dagger \frac{a}{q}y^2 + a^2}}{\dagger a^2 q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}$ et $\frac{\mp \sqrt{y^2 \frown \frac{1}{\dagger \frac{a}{q}} + a^2,, \frown q^2 \dagger \frac{q}{a}y^2}}{\dagger a^2 q \mp a^2\sqrt{q^2 \dagger \frac{q}{a}y^2} + ay^2}$.

Sed haec sunt nimis implicata.



[*Fig. 15*]

$GC \sqcap z.\ WC \sqcap \omega.\ AB \sqcap x.\ z \sqcap \beta \sqrt{\frac{1}{\dagger \frac{a}{q}} + \frac{a^2}{2ax \dagger \frac{a}{q}x^2}}$.

$\frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q}x}} \sqcap \frac{\sqrt{2ax \dagger \frac{a}{q}x^2 + a^2 \dagger \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2}}{a \dagger \frac{a}{q}x}$.

$\frac{a^2}{2ax \dagger \frac{a}{q}x^2} + \frac{1}{\dagger \frac{a}{q}} \sqcap z^2$. et videndum qua relatio inter AV, et $GC \sqcap z$ exprimi possit aequatione. $\frac{\omega}{z} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q}x}}$.

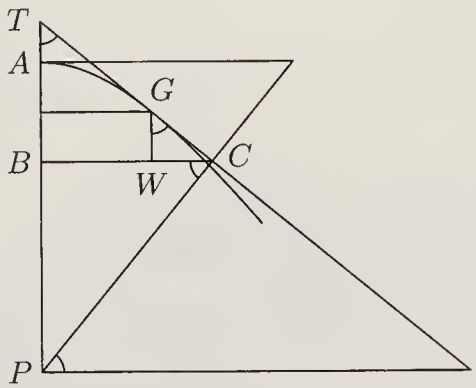
$2ax \dagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. et $x \overset{(2)}{\sqcap} \dagger q \mp \sqrt{q^2 \dagger \frac{q}{a}\frac{\beta^2 a^2}{z^2 - \beta^2 \dagger \beta^2 \frac{a}{q}}}$ et $\frac{\omega}{\beta} \overset{(3)}{\sqcap} \beta \frac{a \dagger \frac{a}{q}x}{y \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{z^2 - \beta^2 \dagger \beta^2 \frac{a}{q}}}}$.

Ergo in aeq. 1. inserendo pro ω et x eorum valores, habebitur aequatio in qua solae extabunt z. et AV. et ipsa AV pure habebitur. Nota hoc modo non nisi naturam inveniri sive aequationem explicantem naturam Trochoeidis Conicae, in quantum ea aequatione

1 ubi | tantum *gestr.* | opus *L*

4 $\frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q}x}} \sqcap$: Leibniz berechnet auf der rechten Seite der Gleichung irrtümlich $\frac{z}{\omega}$ statt $\frac{\omega}{z}$. In Z. 6 setzt er die Gleichung richtig an. 5 $\sqcap z^2$: Richtig wäre $\frac{z^2}{\beta^2}$.

explicari potest. Ideo quia punctum fixum, ex quo demittendae perpendiculares. Et hoc modo habetur curva, in qua habetur relatio quae est non inter ordinatas et abscissas, sed quae est inter differentias ordinatarum et abscissas, vel quae est inter differentias ordinatarum et abscissarum. Quaerenda ratio, in qua puncto non existente fixo, tamen imposito in curvam dent figuram ex data pendentem.

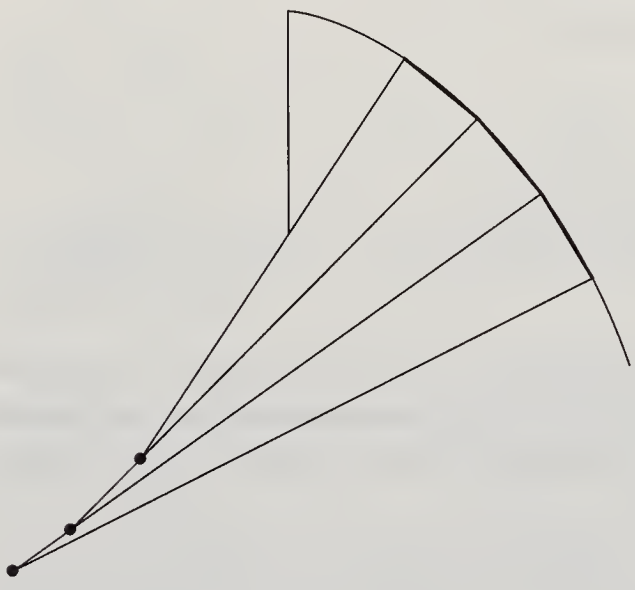


[*Fig. 16*]

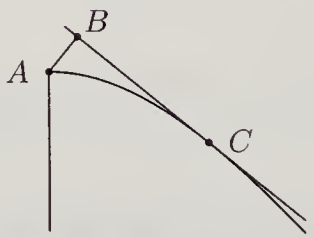
$\frac{y}{\beta} \sqcap \frac{p}{\omega} \sqcap \frac{s}{z}$. Ergo $pz \sqcap s\omega$.

$\frac{t}{\beta} \sqcap \frac{y}{\omega} \sqcap \frac{m}{z}$. Fiet $zy \sqcap m\omega$.

$\frac{\frac{s^2}{y}}{z} \sqcap \frac{s}{\beta}$. et $\frac{s^2}{y}\beta \sqcap sz$.



[*Fig. 17*]

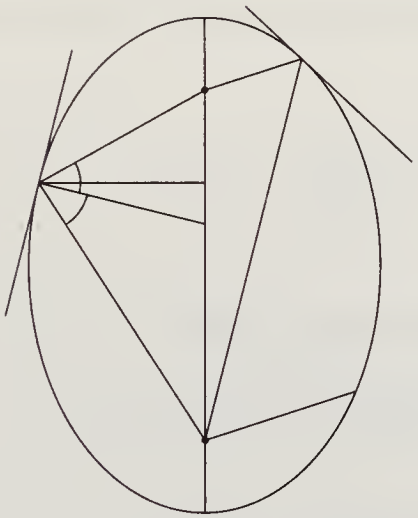


[*Fig. 18*]

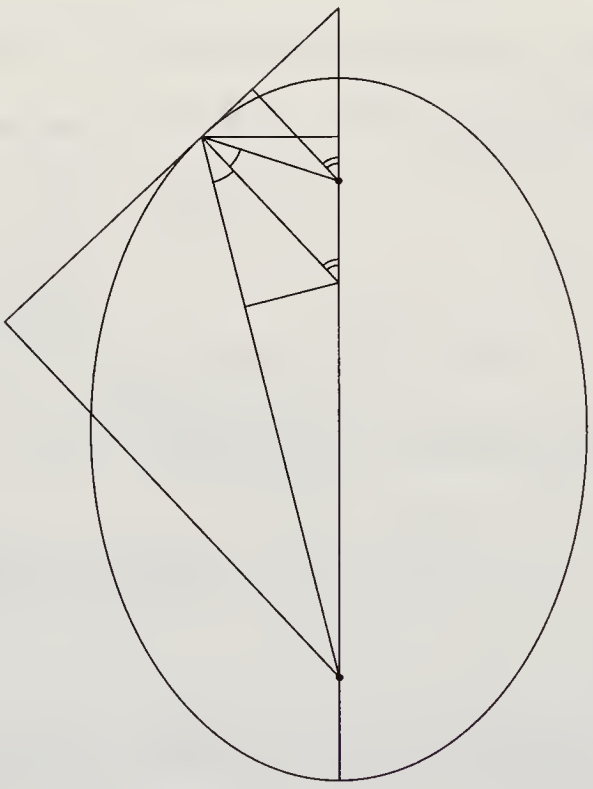
Si figurae evolutae et evolutioni descriptae dimensio ex eodem principio habetur: tunc evolutione descripta in rectam expansa, figuram dabit, cujus dimensio ex utraque pendebit.

Figurae Trochoeidis dimensio semper datur ex spatio figurae describentis. Error. Imo non. Quia perpendiculares ex puncto fixo non applicantur ad curvam, ibi ubi provolvitur. Itaque si provolutione describere volemus figuram, cujus dimensio ex data dimensione pendeat sic agemus ut perpendiculares a⟨d⟩ axem productas aut aliam curvam applicemus, modo alterum illud spatium etiam detur.

Sed si illam curvam in rectam expandamus, quae fit more meo intervallis a puncto fixo puncto provolutionis impositis: Ea curva in rectum extensa, tum demum verum erit haberi curvam habita Spatii dimensione, si modo inveniri queat quae sit curva illa expansa in rectam. Investigabitur autem, quia investigari poterit relatio inter differentias et abscissas. Sed tunc recurrendum est in Catalogum curvarum tangentiumque ut sciatur sitne curva illa ex earum numero quae sunt analyticae seu non transcendentes.

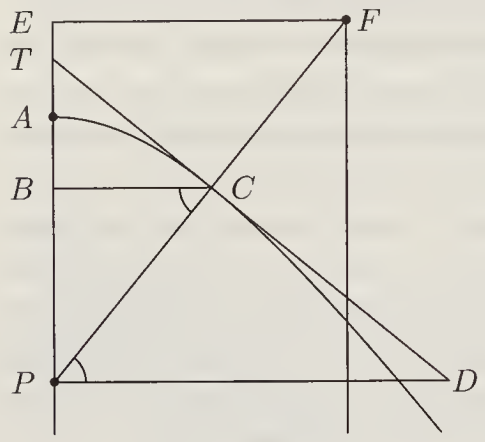


[*Fig. 19*]



[*Fig. 20*]

3 itaqve *(1)* necessario utendum est; *(2)* si *(a)* evolutione *(b)* provolutione *L* 4 agemus | ex *streicht Hrsg.* | ut *L* 11 sitne *(1)* in rerum natura relatio *(2)* curva *L*



[*Fig. 21*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap \sqrt{2ax+x^2}$. $\frac{BC}{CP} \sqcap \frac{CP}{PD}$. et $PD \sqcap \frac{CP^2}{BC} \sqcap \frac{2ax+x^2, +a^2+2ax+x^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$. $\frac{BC}{CP} \sqcap \frac{a \sqcap EF}{PF}$. et $PF \sqcap \frac{CPa}{BC} \sqcap \frac{a\sqrt{4ax+2x^2+a^2}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. $PD \sqcap 2\sqrt{2ax+x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$. $PF \sqcap a\sqrt{2+\frac{a^2}{2ax+x^2}} \sqcap z$.

Fiat $b\sqrt{2ax+x^2} + \frac{a^3+ac\sqrt{2ax+x^2}+adx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ $+fx \sqcap va$ et reducendo: $b2ax+bx^2+a^3+ac\sqrt{2ax+x^2}+adx+fx\sqrt{\dots} \sqcap va\sqrt{\dots}$ sive $\frac{b2ax+bx^2+a^3+adx}{va-fx-ac} \sqcap \sqrt{2ax+x^2}$. et quadrando

$$\begin{array}{llll} \beta^6+2\beta^3 b\,2\,a\,x & 2\beta^3 b & x^2 & +2b^{[2]}2ax^3 \quad +b^2x^4 \\ a\,d\,. & b^2 4a^2 & .. & 2[b]ad \\ & 2b2aad & .. & \\ & a^2d^2 & & \end{array}$$

$$2ax+x^2 \sqcap \frac{}{v^2a^2-2vafx-2vaac, +f^2x^2+2facx, +a^2c^2}.$$

Eodem modo: Si ad $\frac{a\sqrt{4ax+2x^2+a^2}}{\sqrt{2ax+x^2}}$ addas $+n+l\sqrt{4ax+2x^2+a^2}+mx$[,]

$$v\sqrt{2+\frac{a^2}{2ax+x^2}} \sqcap \frac{la}{\sqrt{2ax+x^2}, \sqrt{4ax+2x^2+a^2}} + v + mx + n$$

6 fiat *(1)* by $+\frac{a^2}{y} \sqcap$ e $\sqcap$ PD *(2)* b$\sqrt{2ax+x^2}$ *(3)* b$\sqrt{2ax+x^2}$ *L*

12 $2ax+x^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung hat Leibniz im Zähler des Bruches punktuell a in β geändert. 13 Eodem modo: Die folgende Substitutionsrechnung ist fehlerhaft. Der richtige Wert für ℵ wäre $\frac{z(2ax+x^2)}{x}$.

et $\dfrac{\sqrt{4ax+2x^2+a^2}-la \frown \dfrac{1}{\sqrt{4ax+2x^2+a^2}}\boxed{2}}{\sqrt{2ax+x^2}} \sqcap v^2+2vmx+2nv+m^2x^2+2mnx+n^2$

sive $\sqcap \dfrac{4ax+2x^2+a^2-2la+\dfrac{l^2a^2}{4ax+2x^2+a^2}}{2ax+x^2}$.

$\dfrac{z^2\sqrt{4ax+2x^2+a^2} \frown 2ax+x^2}{x} \sqcap \aleph$ momentum curvae scilicet e vertice opposito quaeratur.

53. DE EXPANSIONE SUPERFICIERUM CYLINDRIFORMIUM PRO DIMENSIONE CURVARUM

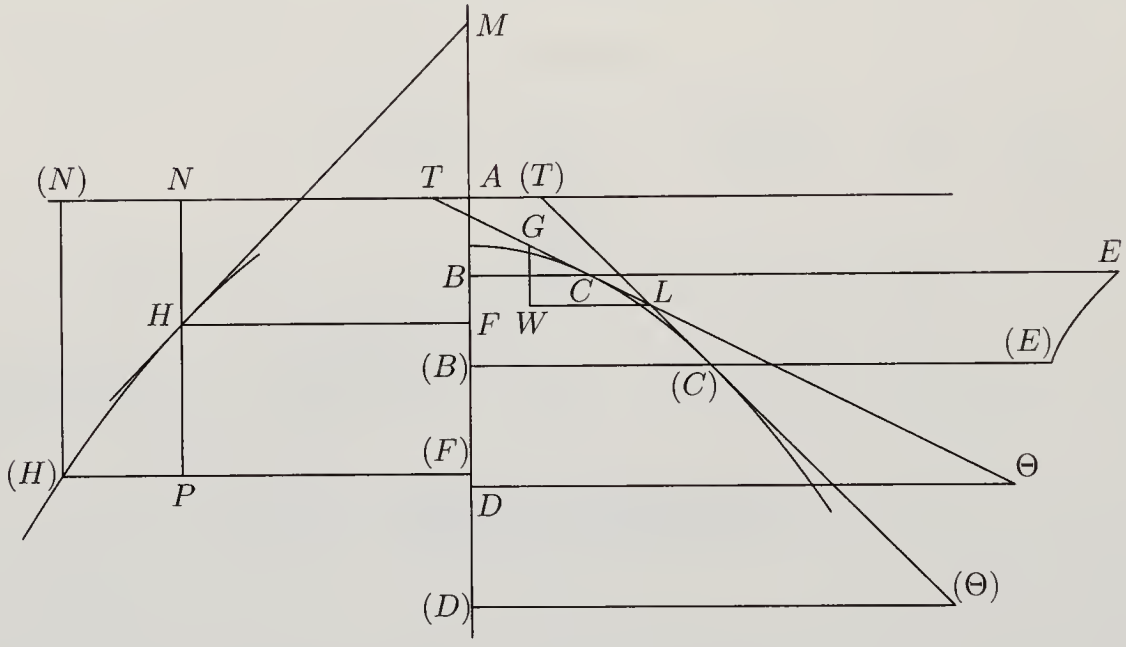
14. Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 1/4 S.
Cc 2, Nr. 1157

14 Xb. 1675

De expansione superficierum cylindriformium
pro dimensione curvarum
et de calculo differentiarum

De figuris planis quae fiunt expansione figurarum
in superficie cylindriformi descriptarum.



[*Fig. 1*]

---

6 *Daneben:* Nihil hinc ductum est.

7–9 De ... differentiarum *erg. L* 10 *(1)* De extensione spatiorum in superf *(2)* De Locis planis qvae fiunt ex *(3)* De ... fiunt *(a)* ex figuris in superfie cylindrica descriptis *(b)* expansione *L*

Superficies cylindriformis est quae fit recta per curvam in uno plano positam ducta, situ ad planum normali. Quae recta si inter describendum varie crescere aut decrescere intelligatur; fiet figura in superficie cylindriformi descripta, seu Superficies cylindriformis truncata. Cui semper plana aequalis exhiberi potest, hoc modo:

Sit curva quaecunque $C.(C)$. Sit axis ABD ad quam per ordinatas BC curva $C(C)$ referatur, cognita relatione ipsarum $AB.$ ad ipsas $BC.$ Per punctum A transeat Axis conjugatus AT, et sumto in axe puncto D ducatur per ipsum axi conjugato AT parallela $D\Theta$. Sumta intelligantur puncta $T.\,\Theta.$ hoc modo ut juncta $TC\Theta$ sit tangens curvae in $C.$ Quae jam ponatur ipsi BC ordinatae, in directum, translata scilicet in $BE.$ et ipsa AD ipsi curvae in $C.$ insistat situ ad ejus planum normali, idque in quibuslibet punctis $C, (C)$ sumtis semper pro arbitrio punctis $D.\,(D)$ factum intelligatur, translatis ipsis $(T)(\Theta)$ in $(B)(E)$ et AD impositis in $C.$

Erit spatium planum $EB(B)(E)E$; superficiei cylindriformi ex omnibus AD curvae impositis factae aequale. Facto enim Triangulo characteristico $GWL.$ erit, $T\Theta$ ad AD, ut GL ad $GW.$ adeoque AD in $GL.$ id est AD imposita curvae, aequabitur $T\Theta$ in GW, id est BE ordinatae ad Axem. Adeoque summa omnium AD ad curvam, seu superficies cylindriformis, aequabitur summae omnium $T\Theta$ ad axem seu spatio $EB(B)(E)E.$

Ponatur curva $C(C)$ pertingere usque ad $A.$ Jam superficies cylindrica ita explanetur, ut coincidat plano curvae, et ut curva coincidat axi. Sive ut posito puncto A fili ex curvae $AC(C)$ extensione facti; in $A.$ punctum alterum C vel (C) cadat in F vel (F). Et ita superficies cylindriformis extendatur in spatium planum $HF(F)(H)H$ axis parte $F(F)$ cujus ignota nobis quantitas[,] curva $H(H)$ cujus non est nota nobis natura, et duabus rectis datis $FH.\,(F)(H)$ quae ipsis $AD, A(D)$ sunt aequales. Ex punctis $H.\,(H)$ ducantur ordinatae $HN, (H)(N)$ in axem conjugatum ATN. Ex datis ergo AN, sive FH, sive AD,

---

14 f. *Nebenbetrachtung unter Fig. 1:* $\omega \sqcap \frac{\beta y}{t}$

3 superficie *(1)* cylindrica *(2)* cylindriformi *L* 13 superficiei *(1)* cylindricae *(2)* cylindriformi *L* 16 BE *(1)* applicatae *(2)* spatio *(3)* ordinatae *L* 18 Ponatur ... ad A. *erg. L* 19 curva | primo puncto C *gestr.* | coincidat *L* 19 puncto | *(1)* C *(2)* A *erg.* | *(a)* curvae *(b)* fili *(aa)* curvae AC(C) *(aaa)* respondentis *(bbb)* aeqvalis in B pun *(bb)* ex *L* 21 spatium | planum *erg.* | HF(F)(H)H *(1)* compleatur rectangulum. Ex punctis H *(2)* Axis *L* 24–392,1 AD, *(1)* qvaeruntur ipsae NH. Patet uti *(2)* et *L*

et iis quae dixi, reliqua quaeruntur. Patet autem ex data spatii $EB(B)(E)E$ dimensione etiam spatii $HF(F)(H)H$ dari dimensionem. Quod si ergo constet de natura curvae $H(H)$, et sit ipsa una ex iis quae quadrari possunt, (absolute vel Hypothetice) id est in quibus ex data abscissa et ordinata datur area; tunc ex dato spatio $EB(B)(E)E$. id est spatio $HF(F)(H)H$, quoniam jam datur abscissa ex axe conjugato $AN \sqcap AD$. dabitur etiam recta AF, seu longitudo curvae $C(C)$. Et vicissim ex data longitudine curvae, $C(C)$ et natura figurae $H(H)$ si modo ex Analyticarum quadrabilium ea numero est, dabitur spatium $EB(B)(E)E$.

Hinc jam usum hunc duco; quoniam ipsae AD, infinitis modis sic possunt assumi pro arbitrio, ut constet de natura curvae $H(H)$, infinita etiam spatia $EB(B)(E)E$ inter se diversa, eaque omnia analytica obtineri posse, quorum quadratura ex solius curvae dimensione, adeoque ex se invicem dependeat. Adeoque hoc modo data qualibet curva infinitae habebuntur figurae ipsi syllogae, ac proinde et inter se. S y l l o g a voco, quorum uno noto aliud notum est. Atque ita longe major aperitur inveniendi campus, quam si AD certo modo atque ita sumtis, ut omnia BE omnibus BC sylloga sint. Potest, ut obiter dicam[,] fieri, ut duo quaedam inter se non sint sylloga, sint tamen tertio; id est ut datis duobus opus sit ad tertium ex ipsis habendum. Posses s y n d o t a appellare, quorum pluribus datis datur reliquum. Data autem intelligenda erunt non positione, sive descriptione sed relatione sive schesi. Posses et σύγνωτα optime appellare.

Caeterum hoc modo infinita haberi spatia, quae ex curvae propositae dimensione pendeant omnia. Ex eo apparebit, si infinitas curvas $H(H)$ inveniri posse ostendemus, cognitae naturae et quarum spatia quadrabilia ex datis ordinatis et abscissis, ita enim et spatia infinitis modis facta ad curvam $E(E)$ ex data curvae dimensione habebimus. Quod apparebit si ostendam ipsas AD, tales assumi posse, ut curva $H(H)$ fiat data. Verbi gratia data curva $C(C)$: efficere possum ut curva $H(H)$ fiat recta, vel parabola, vel hyperbola, vel aliqua paraboloeidum, aut Hyperboloeidum; vel alia denique curva Analytica quaecunque. Quod sic ostendam. Ex puncto H. curvae $H(H)$ ad axem ducta intelligatur tangens HM. Ajo ipsam FM magnitudine dari, tametsi positione non detur. Quod sic ostendo. Ponantur $C(C)$ portio curvae infinite parva, adeoque et $F(F)$ et $D(D)$ et $N(N)$. Datur calculo recta $F(F)$ vel HP ex data natura curvae $C(C)$. Quia

4 ex *(1)* dato Rectangulo *(2)* data *L* 13 ipsi *(1)* symmetrae *(2)* syllogae *L* 19 sive *(1)* ratione *(2)* schesi *L* 21 si *(1)* infinita spatia *(2)* infinitas *L* 29 f. Ponantur ... N(N) *erg. L* 30 Datur | calculo *erg.* | recta F(F) *(1)* curvae C(C) portiuncula, seu latus polygoni curvae infinitanguli. Data enim qvalibet curva, latus eiusmodi *(2)* vel *L*

enim $AF, A(F)$ sunt portiones curvae in rectum extensae, ideo $F(F)$ erit latus polygoni infinitanguli curvae, unum enim latus polygoni infinitanguli praecedentibus seu portioni curvae in rectum extensae AF, additum, facit proxime sequentem curvae in rectum extensae portionem $A(F)$. Datur autem calculo latus polygoni infinitanguli curvae, ex data progressione ordinatarum et abscissarum, quod adeo verum est, ut methodo Heuratii figura describi possit, cujus ordinatae sunt hujus polygoni lateribus proportionales. Datur igitur calculo recta $F(F)$ sive GL. Datur et calculo recta $(H)P$ sive $N(N)$ sive $D(D)$ quia ipsae $AD, A(D)$ calculo dantur: Datur ergo et ratio HP ad $P(H)$. Ergo et ob Triangula $HP(H), M(F)(H)$ dabitur ratio $M(F)$ ad $(F)(H)$ id est ex datis FH vel $(F)(H)$ sive AN, sive AD, dabitur MF. Tametsi puncta F et M. ignorentur. Quoniam ergo ipsae AN, vel FH vel AD, sumtae sunt pro arbitrio, ideo assumi poterunt tales, ut relatio inter ipsas FM, et FH fiat qualis desideratur; id est ut curva $H(H)$ sit data. Quod faciendum erat.

Male concepi: Sic dicendum potius. Ex datis AB, dantur $F(F)$ ut probavi. Ergo datur relatio inter AB et $F(F)$. Datur et relatio inter $F(F)$ et AD, sive inter AN et HP. ex natura curvae $H(H)$ data. In omni enim curva cujus natura data est, datur haec relatio. Datur ergo et relatio inter AD, et AB. Id est, datis AB dabuntur ipsae AD, tales, ut curvae $H(H)$ natura fiat data. Datis autem AD, etiam $T\Theta$, sive BE dari patet.

13 f. erat. *(1)* Exemplo utamur, et ponendo curvam CC. esse parabolam; erit Elementum curvae, seu *(a)* $\frac{\mathrm{F(F)}}{\mathrm{a}}$ ⊓ *(aa)* x *(bb)* $\frac{\sqrt{\mathrm{ax}}}{2\mathrm{a}}$ *(cc)* $\frac{\sqrt{2\mathrm{ax}}}{\mathrm{a}}$ *(dd)* $\sqrt{2}$ *(ee)* $\frac{\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2}}{\sqrt{2\mathrm{ax}}}$ *(b)* $\frac{\mathrm{F(F)} \sqcap \mathrm{z}}{\mathrm{a}}$ *(c)* $\frac{\mathrm{F(F)} \sqcap \mathrm{z}}{\beta}$ ⊓ $\frac{\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2}}{\sqrt{2\mathrm{ax}}}$ ⊓ | *β erg.* | $\sqrt{1+\frac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{ax}}}$ qvae pendet ex *(aaa)* natura *(bbb)* Hyperbolae qvadratura; *(aaaa)* ut *(bbbb)* sed ut ipsa prodeat Hyperbola, sumamus potius Parabolam concavitatem directrici | AB *erg.* | obvertentem. sit AB ⊓ y. erit x ⊓ BC ⊓ $\frac{\mathrm{y}^2}{2\mathrm{a}}$ Erit ω ⊓ $\frac{\mathrm{y}\beta}{\mathrm{a}}$ et z ⊓ *(aaaaa)* √ *(bbbbb)* $\beta\langle\!-\!\rangle$ *(ccccc)* $\frac{\beta}{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{y}^2+\mathrm{a}^2}$. ad Hyperbolam ⊓ F(F) posito scilicet A vertice parabolae, et AB ⊓ y. *(2)* Male *L* 14 probavi, *(1)* ex datis iisdem AB, dantur AD, qvia pro arbitrio sumi possunt *(2)* sive datur *(3)* Ergo *L* 15 F(F). *(1)* Ergo vicissim *(a)* datur relatio *(b)* ex datis F(F) dantur AB. *(2)* Datur *L* 18 data. *(1)* Exemplo in eam rem opus est. *(a)* qvaeritur *(b)* qvaeratur *(aa)* qvales *(bb)* qvalis *(aaa)* debea *(bbb)* futura sit *(2)* Datis *L*

5 Heuratii: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

Id est dari poterunt tot curvae $E(E)$, quarum figurae ex datae curvae $C(C)$ dimensione pendeant; quot intelligi possunt figurae quadrabiles.

In exemplum sit $C(C)$ curva parabolica cujus vertex A. tangens verticis, et nunc directrix AB. Sit $AB \sqcap y$. Erit $BC \sqcap \frac{y^2}{2a}$. Et $GW \sqcap \beta$. et $WL \sqcap \frac{y\beta}{a}$. et $GL \sqcap z \sqcap \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2+y^2} \sqcap HP$. Quaeritur AD talis, ut curva $H(H)$ sit parabola. seu ut positis $AN \sqcap AD \sqcap v$. ipsarum AF differentiis $F(F) \sqcap z$ positis $\frac{\beta}{a}\sqrt{a^2+y^2}$. Jam constat ex natura parabolae hanc in ea esse relationem ipsarum AN, et HP, sive z, ut positis $AN \sqcap$ Arithmeticis, sit $HP \sqcap \frac{d\overline{v}\, v}{b} \sqcap z \sqcap \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2+y^2}$. Sed hic jam video nos haerere; neque quicquam obtinuisse. Nam ex hac aequatione $\frac{d\overline{v}\, v}{b} \sqcap \frac{\beta}{a}\sqrt{a^2+y^2}$. quaerenda est v. quod perdifficile est et fiet: $v \sqcap \int \frac{b\beta}{va}\sqrt{a^2+y^2}$. Sed hinc non nisi casus particularis haberi potest, nempe curvam haberi posse, cujus differentiae abscissarum sint Elementis curvarum reciprocae. Nam tunc fiet $v \sqcap \int \frac{b}{v}$. et erit v. ad parabolam, in qua differentiae summis reciprocae. Et curva $H(H)$ ex ipsis $AN \sqcap v$. erit etiam parabola ex Hypothesi. Sed jam non video an haec sit realis quaestio dicere curvam quaeri in qua sint differentiae abscissarum curvae Elementis reciprocae. Nisi Abscissas mutes in ordinatas; quaereturque curva in qua differentiae ordinatarum sint curvae Elementis reciprocae, id est $\sqrt{\beta^2+\omega^2} \sqcap \frac{\alpha^2}{\omega}$ posita α constante. Quod non est in potestate si et β. constans[,] fiet enim $\beta^2+\omega^2 \sqcap \frac{\alpha^4}{\omega^2}$. adeoque ω erit quantitas constans sive recta certa, et locus erit ad rectam. Sed si β.

2 possunt *(1)* curvae qvadra *(2)* figurae *L* 5 ut *(1)* eius intervalla ordin *(2)* H *(3)* N(N) vel H(P). eius ordinatarum differentiae *(4)* positis *L* 6 ⊓ v. *(1)* sunt *(2)* et earum differentiis D(D) vocatis e, *(3)* ipsarum *(a)* AD, *(b)* AF *L* 8 HP *(1)* ⊓ y *(2)* ⊓ *(a)* $\mathrm{d\overline{v}\,v}$ *(b)* $\surd$ *(c)* $\frac{\mathrm{v}^2}{2\mathrm{b}}$ *(d)* $\frac{\mathrm{d\overline{v}\,v}}{\mathrm{b}}$ *L* 11 differentiae *(1)* ord *(2)* abscissarum *L* 16 differentiae *(1)* abscissarum sint *(2)* ordinatarum sint | curvis *ändert Hrsg.* | reciprocae *L*

12 reciprocae: s. Erl. zu S. 395 Z. 12.

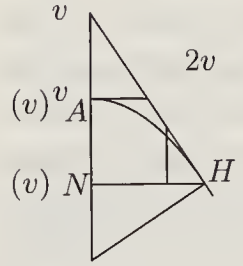
variat, alia atque alia fiet curva. Quaeritur ergo progressio aliqua talis abscissarum, ut ex ea calculentur ordinatae secundum regulam quandam fiant differentiae, seu $\beta.$ et $\omega.$ relationis quae jubetur. Ut sint relatio inter abscissas et ordinatas quaelibet: $bx^2 + cy^2 + dyx$ etc. $\sqcap$ 0. et relatio ipsarum x ad arithmeticas φ[:] $e\varphi^2 + fx^2 + g\varphi + hx$ etc. $\sqcap$ 0. Valor ipsius x ex posteriore inseratur in priore et tunc quaeratur differentia ipsarum $y.$ quae invenietur per $\varphi.$ ex data jam etiam differentia ipsarum $x.$ Rursus per aequationem posteriorem quaeratur differentia ipsarum $x.$ quae ex solis φ absolute dabitur. Ergo absolute etiam dabitur differentia ipsarum $y.$ etiam ex solis $\varphi.$ Ergo apparebit an tales assumtae sint $b.$ $c.$ $d.$ etc. et gradus dimensionum, ut fiat quod desideratur. Interim etsi talis curva vix tractabilis videatur hoc tamen de ea habemus, ut si ponatur ipsa $C(C).$ et ipsa curva $H(H)$ debeat esse parabola, ipsas AD fore etiam ad parabolam, fiet enim $v \sqcap \int \overline{\frac{b}{va}}.$ quae est ad parabolam ut aliunde mihi notum: dabitur ergo hujus curvae elementum $z.$ Sed jam video me errasse non quidem in his, sed quod sumsi $\sqrt{a^2 + y^2}$ pro curvae elemento cum sit ipsa $\frac{\beta\sqrt{a^2 + y^2}}{a}.$ Unde si reciprocae $\beta,$ et $\sqrt{a^2 + y^2},$ fiet constans. Unde haberetur recta pro curva $C(C).$ Interea satis est nos didicisse etiam haec problemata realia esse, et aliquando solubilia cum quaeritur relatio inter differentias ordinatarum et abscissarum.

In omni curva verum est esse Elementum curvae: $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}.$ Et si t tangentis intervallum, erit $\frac{dx}{d\overline{y}} \sqcap \frac{t}{y}.$ Sit $AD \sqcap v.$ et fiet: $\frac{T\Theta}{v} \sqcap \frac{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dx}$ et $T\Theta \sqcap BE \sqcap \frac{v}{d\overline{x}}\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2},$ sive $d\overline{x}\,T\Theta \sqcap v\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}.$ id est $T\Theta$ ad axem aequantur ipsis v ad curvam. Si extendatur superficies cylindriformis in rectam, erunt AF vel $NH \sqcap \int\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ et AN vel $FH \sqcap v.$ quae v sumi possunt pro arbitrio. Quaeruntur

1 talis *(1)*, ut si numeri terminorum *(2)* abscissarum *L* 19 $\sqcap$ v. *(1)* Erit BD $\sqcap$ v − x *(2)* et *L* 21 extendatur *(1)* planum *(2)* superficies *L*

12 aliunde: s. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, dat. Dezember 1674, VII, 3 N. 39 S. 560–562.

jam v tales, ut sit curva $H(H)$ parabolica, vel alia quadrabilis. Constat in parabolica, cujus ordinatae ad axem v, esse $t \sqcap 2v$ adeoque fiet: Ejusque ordinatarum $\int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ differentias esse $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ fiet ergo $\frac{dv}{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}} \sqcap \frac{2v}{\int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}$.

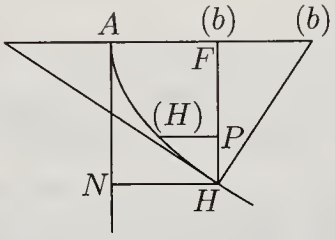


[*Fig. 2*]

seu $dv \int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \sqcap 2v \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$.

Jam video denique his nihil fieri posse, nam si detur AN magnitudine et positione, utique dabitur et NH magnitudine et positione ex data curvae natura. Data autem $NH_{[,]}$ curvae de qua quaeritur dabitur longitudo.

Generalis aequatio erit: $dv \int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \sqcap t \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Aliter pro parabola:



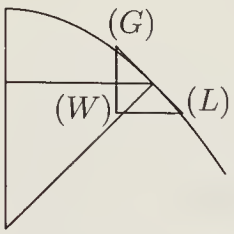
[*Fig. 3*]

$\frac{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dv} \sqcap \frac{v}{b}$ posito b. esse semilatus rectum parabolae seu intervallum perpendicularium in axe; fiet $b \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \sqcap d\overline{v}\, v$. Problema ergo cujus ope cujuslibet curvae dimensio haberi posset huc redit[:] ordinatam invenire quae in suam abscissam ducta datum det valorem. Sed jam video nihil hinc haberi, nam, scimus summam ordinatarum in suas differentias ductarum aequari semiquadrato ultimae. Adeoque res iterum eo redit, ut inveniatur summa Elementorum curvae, seu $b \int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} \sqcap \frac{v^2}{2}$.

Et quoniam in omni curva ejus natura exprimi potest ope solius ordinatae, vel ope solius abscissae, accedentibus differentiis utriusque, quarum alterutrius hic dantur. Ideo infinitae similes formari possunt quaestiones, ut in Parabola Cubica sunt ordinatae perpendicularium intervallis reciprocae: seu $p \sqcap \frac{1}{v}$. Ergo $\frac{v}{\frac{1}{v}} \sqcap \frac{z \sqcap (G)(W) \sqcap \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{WL \sqcap dv}$

2 t ⊓ v *L ändert Hrsg.* 15 suas *(1)* abscissas *(2)* differentias *L*

21 reciprocae: s. N. 46 S. 322 Z. 1 – S. 323 Z. 8.



[*Fig. 4*]

et fiet: $d\overline{v}\, v^2 \sqcap \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Id est $\frac{v^3}{3} \sqcap \int \sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$. Patet ergo nihil ex hac inquisitione duci posse: satius in ipsam curvam ope quadraturarum inquirere, nam calculo Tangentium inverso assumere v talem, aequatione facta, ut v vel v^2 denique in dv ducta faciat datam formulam longe difficilius, quam efficere ut simpliciter differentia v habeat datam formulam. Quanquam certis casibus particularibus fieri queat, ut ductus ille fiat simplicior.

1 $\frac{\mathrm{v}}{3}$ *L ändert Hrsg.*

6 *Fig. 4*: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

54. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS

21. Dezember 1675

54_1. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS

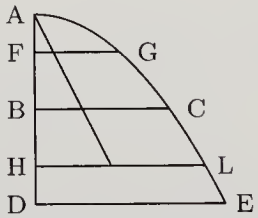
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 223. 1 Bl. 2°. 1 4/5 S. Bl. 223 bildete ursprünglich mit Bl. 224 (= N. 54_2) einen Bogen.
Cc 2, Nr. 1164 A

21. Xb. 1675.

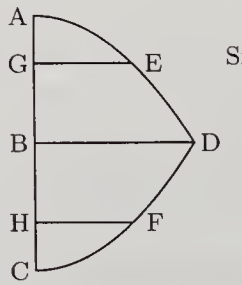
De Additione ordinatarum ad quadraturas;
Specimen Analyseos Tetragonisticae, pro Curvis,
in quibus cognita relatio Segmentorum:

Axe posito AC, sit curva ad ipsum referenda AED. Spatium mensurandum, $ACDEA$. Nota sit ratio ejus, ad spatium $ABEHA$, quod ordinata BE, per medium ipsius AC, nempe B. ducta abscinditur. Sumantur in ipsa AB, abscissae AF, et inde a C. ipsis aequales CG; ad illas ordinatae FH, ad has GL.

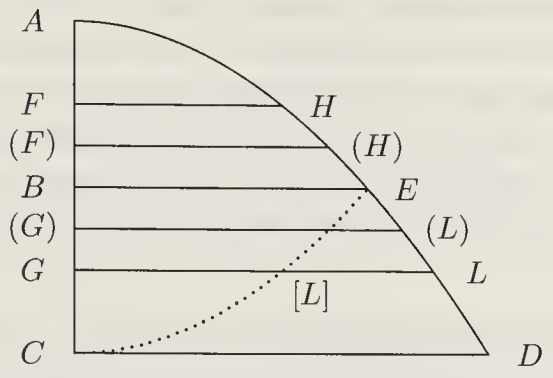
8 f. qvadraturas; *(1)*



(a) Sit *(aa)* spatium *(bb)* figura curvilinea *(b)* Sit figura qvaecunqve ADECA. cuius altitudo AD. in qva punctum medium B. *(2)*



Sit Spatium *(a)* Curvil *(b)* rectis *(c)* ABDEA rectis AB, BD, et Curva linea AED. contentum, producatur AB in C, ut sit BC ⊓ AB. et tunc similis *(aa)* appli *(bb)* aeqvalisqve priori ABDEA *(aaa)* appli *(bbb)* apponatur figura CBDFC, eandem cum priori habens basin BD *(3)* Specimen *L* 10 qvibus *(1)* Spatiorum *(2)* cognita *L* 14 ordinatae | FG *ändert Hrsg.* |, ad *L*



[*Fig. 1*]

Sit jam $AF \sqcap CG \sqcap x.$ et $FH \sqcap y.$ et $AC \sqcap a.$ Erit $AG \sqcap a-x.$ et sit $GL \sqcap z.$ Ponamus ex data AF, vel AG haberi valorem ipsius FH vel GL integrum ac rationalem, cujus primum exemplum $FH \sqcap AF \sqcap x.$ seu $GL \sqcap AG \sqcap a-x.$ Jam $\int \overline{FH} + \int \overline{GL} \sqcap ABEHA + (EBCDLE \sqcap) \frac{b}{a} ABEHA$ (quia ratio $EBCDLE$, ad $ABEHA$ nota supponitur $\frac{b}{a}$) et eadem $\int \overline{FH} + \int \overline{GL} \sqcap \int \overline{x} +$ $\int \overline{a-x} \sqcap \int a \sqcap a \frown AB \sqcap \frac{a^2}{2}.$ et $ABEHA \sqcap \frac{a}{a+b} \frown \frac{a^2}{2} \sqcap \int \overline{x}.$

Si $FH \sqcap x^2.$ erit $GL \sqcap x^2 - 2ax + a^2.$ et $\int \overline{FH + GL} \sqcap \int \overline{2x^2 - 2ax + a^2}.$ Ergo erit

$$2 \int \overline{x^2} - \frac{1}{\frac{(b)}{a}} \int \overline{x^2} \sqcap \int \overline{+2ax - a^2} \sqcap \frac{a}{a+b} \frown a^3 - \frac{a^3}{2}.$$

Ita patet haberi summam x^2, ex data $\int \overline{x}.$ Eodem modo si $FH \sqcap x^3$ et $GL \sqcap a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$ fiet $\int \overline{FH + GL} \sqcap \int \overline{a^3 - 3a^2x + 3ax^2}.$

Ergo si modo datur ratio $\int \overline{FH}$ ad $\int \overline{GL}$ habebitur $\int \overline{x^3}$ ex data $\int \overline{x}$ et $\int \overline{x^2}.$ Eodem modo in caeteris gradibus procedi potest. Notando tantum discrimen inter impares et pares.

Alia ratione procedi poterit, si non addamus FH, et GL, sed subtrahamus. Quo modo in paribus fiet quod nunc in imparibus, et contra. Et si ponantur semper $ABEHA$, et $EBCDLE$ aequales tunc fiet $\int \overline{\dagger FH \dagger GL} \sqcap 0$ et in paribus deprimetur calculus ad gradum inferiorem, et ita ope superioris eleganter habebitur dimensio inferioris parabolae. Haec non explico, quemadmodum nec quomodo habeantur semper $\frac{b}{a}.$ quia in paraboloeidibus istis facilia.

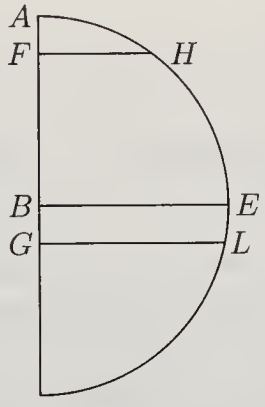
1 FH | ⊓ GL *gestr.* | ⊓ y *(1)* Et sit y rationalis integra ex data x. v. g. sit y ⊓ x *(2)* et *L*

12 f. $\frac{a}{a+b} \frown$ | a^2 *ändert Hrsg.* | $-\frac{a^3}{2}$. *(1)* pono b cum de summa x. *(2)* ita *(3)* ita *L*

9 *Fig. 1*: Die Punktbezeichnung [*L*] in der Figur und im Text S. 400 Z. 1 stammt von Leibniz.

Generaliter si figura inferior: $BE[L]C$ aequalis et similiter posita superiori, $ABEHA$, et tamen eadem aequatione utraque continetur, ut in circulo[,] Ellipsi; et infinitis casibus; imo in factis expresse ex compositione, ut Margaritae Slusii ex duabus parabolis Cubicis, et infinitis aliis casibus fabricari possunt tales, ut duas portiones similis una nihilominus comprehendat aequatio, et tunc addendo tollendoque semper fient novae aequationes tetragonisticae memorabiles: Exempla igitur fabricabimus nova variis modis: Infinita enim hinc duci possunt.

Primum autem nunc non nisi ordinatas rationales quaeremus, sit: $FH \sqcap \frac{1}{x}$. Erit $GL \sqcap \frac{1}{a-x}$. Et $\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a}{xa-x^2}$ et $\frac{1}{x} - \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a-2x}{xa-x^2}$. Ita addi etiam possunt: $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a\boxed{-x+x}+a}{a^2-x^2}$. Sed jam video nihil hinc nos habituros novi, et nos redituros ad ordinariam methodum nostram, qua multiplicamus talia.



[*Fig. 2*]

Si duas similes et aequales portiones subtrahamus invicem, id non ita faciendum, ut ordinatas respondentes, sed ut alias, ut in Circulo si addamus FH semper ad GL. vel subtrahamus, ponendo semper $AF \sqcap BG$, summa erit duplex area, residuum erit 0. Unde $\sqrt{2ax-x^2}$ et $\sqrt{a^2-x^2}$ horum summa vel residuum haberi potest. Aliud hic differentia aliud residuum.

Hinc erit $\int \overline{\sqrt{2ax-x^2} - \sqrt{a^2-x^2}} \sqcap 0$. si scilicet intelligamus nos ad maximam progredi. Nota hoc genus aequationum, nota item debere inveniri characterem unde intelligamus ad maximam usque x progredi debere. Nota etsi summa $\sqcap$ 0. non tamen ideo et summa quadratorum ab his residuis aequalis 0. Ratio quod in his vinculis non est permissa multiplicatio.

Caeterum ex his fieri poterit aliquando, ut inveniatur quadratura cujusdam totius, vel casus particularis, si scilicet ex illa conjunctione per additionem vel subtractionem

1 et *(1)* | similis *streicht Hrsg.* | superio *(2)* similiter *L* 14 addamus | FG *ändert Hrsg.* | semper *L* 16 area, *(1)* differentia erit 0. Unde $\sqrt{2ax-x^2}$+ *(2)* residuum *L* 24 vinculis *erg. L*

3 Margaritae: Leibniz bezieht sich auf das Beispiel in R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 110.

duarum ordinatarum, quarum summae cognitam habent rationem inter se, in certo tantum casu (ut cum componunt ambae figuram eandem vel similem, etc.) fiat figura cujus aliunde habetur dimensio: Quales casus fingi operae pretium erit.

Hic obiter tantum adjungo singulare quoddam genus additionis ordinatarum. Sit

$$\underset{e}{\sqrt{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{x^2}{4}}}} \dot{+} \underset{v}{\sqrt{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{x^2}{4}}}} \sqcap z \sqcap e \dot{+} v.$$

erit $z^2(\sqcap e^2+v^2 \dot{+} 2ev) \sqcap r \dot{+} x$. quae est aequatio ad parabolam, sive ipsam x. sive ipsam r, pro indeterminata sumas. Ideoque summa omnium z haberi potest. Quaeramus jam ad quam sint curvam ipsae e, et v.

$e^2 \sqcap \frac{r}{2}+\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2}$ et $2e^2-r \sqcap \sqrt{r^2-x^2}$ et $4e^4-4e^2r\boxed{+r^2} \sqcap \boxed{r^2}-x^2$ positoque x esse incognitam, fiet aequatio $x \sqcap 2e\sqrt{r-e^2}$. quae exhibet momentum Circuli ex axe conjugato per verticem adeoque pendet ex Circuli Quadratura. (Nota hanc phrasin: Axis conjugatus per verticem, axis conjugatus per centrum, Axis conjugatus per focum, etc.) Sin vero sit x constans et r indeterminata, fiet $r \sqcap e^2+\frac{x^2}{4e^2}$. quae est composita ex applicata Parabolae ad axem conjugatum per verticem, et ex applicata Hyperbolae secundae; adeoque quadrari potest.

Jam $v^2 \sqcap \frac{r}{2}-\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2}$. sive $2v^2-r \sqcap \sqrt{r^2-x^2}$, et $4v^4-4v^2r\boxed{+r^2} \sqcap \boxed{r^2}-x^2$ et $x \sqcap 2v\sqrt{r-v^2}$. quae rursus Circuli momentum.

Et videndum qua ratione fiat, ut ex his duobus Circuli momentis componatur figura

---

11 *Zu* per verticem: Imo error, non est ex vertice sed centro. Ideo absolute habetur.

18–402,1 *Zu* figura quadrabilis: Imo nihil hinc quia haec duo momenta aliunde habentur.

---

11 pendet: Leibniz erkennt den Fehler am Ende von N. 54_2 und markiert die darauf beruhenden Aussagen.

quadrabilis: et an non inde lux quaedam ad casum particularem. Rursus autem $r \sqcap v^2 + \frac{x^2}{4v^2}$.

Magni momenti foret demonstrare Geometrice interpolationes Wallisianas per unam regulam Generalem. Videndum an id fieri possit continuis interpolationibus indubitabilibus; ostendendo interpolationes dubitabiles non aliter cadere posse. Et hoc posito novum habebimus inveniendi principium Geometrice demonstratum; sane foecundissimum.

Et ita nova plane ratione progressionibus, et inductione uti poterimus ad inveniendum. Idem serviet non tantum ad interpolationes sed et ad continuationes progressionum, certosque earum terminos inveniendos. Et videndum an tali arte demonstrari etiam illud possit: quod series infinita $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.$ etc. sit major qualibet quantitate, quoniam scilicet ob continuam progressionem, $\frac{2}{1}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{5}{4}$ etc. rationis est, initium seriei esse $\frac{1}{0}$.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	etc.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	
etc.	etc.		
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	

2 f. $+\frac{x^2}{4v^2}$ *(1)* Qvod si jam ipsas x. *(a)* et r, v. g. *(b)* aut r, prout alteram vel alteram pro indeterminata sumimus explicemus *(2)* Magni *L*

3 interpolationes: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 132–146, 161–165, 193–196 (*WO* I S. 439–447, 458–460, 476–478) und *Commercium epistolicum*, 1658, S. 51 (*WO* II S. 786).

54_2. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS. PARS II

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 224. 1 Bl. 2°. 4/5 S. auf Bl. 224 r°. Bl. 224 v° leer. Bl. 224 bildete ursprünglich mit Bl. 223 (= N. 54_1) einen Bogen.
Cc 2, Nr. 1164 B

21. Xb. 1675.

Pars II. De additione ordinatarum ad Quadraturas

Praecedente Scheda ostendi si sit $\sqrt{\frac{r}{2}+\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2}} \mp \sqrt{\frac{r}{2}-\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2}} \sqcap z \sqcap \underset{e}{} \mp \underset{v}{}$ posita r constante et x indeterminata c o r r e c t a n g u l a , id est ordinata vel abscissa, fore $z^2 \sqcap r \mp x$ quae est aequatio ad parabolam, sive $z \sqcap \sqrt{r \mp x}$ et summa haberi poterit omnium z.

Ex relatione ipsarum e ad x. fiet haec aequatio: $x \sqcap 2e\sqrt{r-e^2}$ et pro relatione omnium v ad x, fiet $x \sqcap 2v\sqrt{r-v^2}$. Spatium ergo ad curvam ad quam x et v, vel x et r correctangulae sunt, pendebit ex quadratura Circuli, id est ex momentis Circuli ex vertice. Hoc Geometrice examinare operae pretium erit, ut appareat quomodo hic ex duabus compositis figuris quadraturam Circuli repraesentantibus, fiat figura quadrabilis.

Sit quadrans Circuli $ABDC$. radio $AB \sqcap AC \sqcap r \sqcap 1$. Ex puncto in curva ejus D, sit ordinata vel sinus DE. Sit $AE \sqcap x$. erit: $DE \sqcap \sqrt{1-x^2}$. Producatur AB in F, et BA in G. et P (+ nota hunc expressionis modum +) ita ut sit BF ut et $GP \sqcap \frac{1}{2}$. et $AG \sqcap 1$. Compleantur rectangula $FACH$, et $GACL$ et $PGLQ$. Producatur DE, in M, et R et ED in N. ut occurrat ipsis FNH, GML, PRQ. Inter ipsam PG vel MR vel LQ et ipsas, GB, MD, LC et intermedias quaerantur mediae proportionales, ut GS

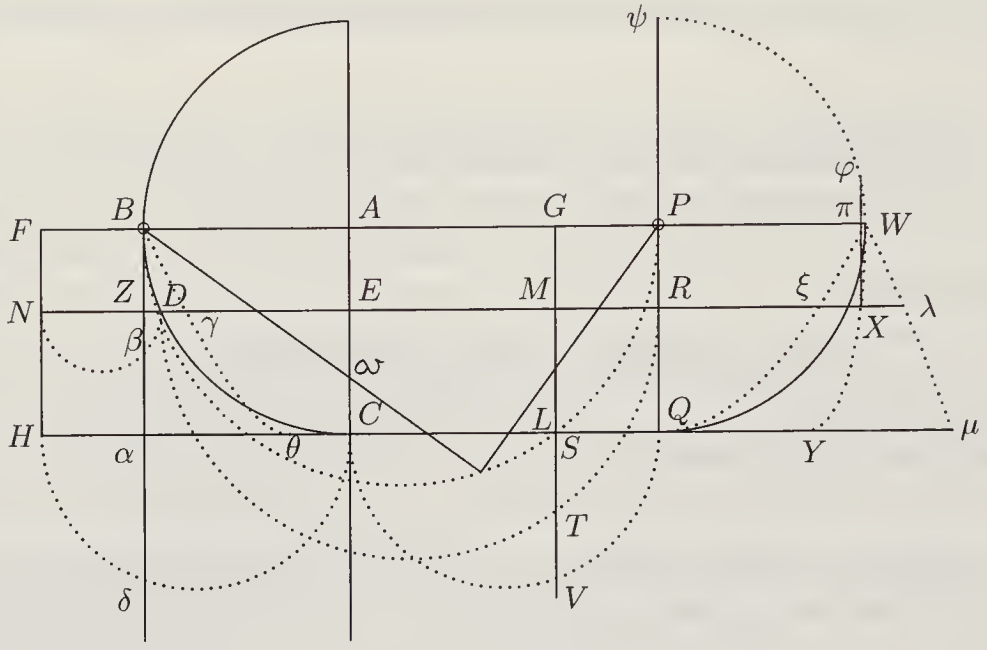
---

6 *Darunter:* Vide praecedentia parte 1. eadem die.

13 f. *Zu* ex vertice: Imo error. Ex axe conjugato per centrum quae semper haberi possent.

---

7 ostendi: N. 54_1 S. 401 Z. 4–7.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

($GS \sqcap GL$), $MT, LV.$ et intermediae, quae in productis GP in $W.$ MR in $X.$ LQ in $Y.$ ponantur, ita ut fiat $PW \sqcap GS \sqcap GL$ et $RX \sqcap MT, QY \sqcap LV.$ et curva $WXY.$ transeat per extrema puncta. ED producatur in $Z.$ ubi occurrat ipsi $BZ\alpha$ (posito α cadere in CH, et esse $B\alpha \sqcap AC.$) Jam inter ipsam BF, ve[l] ZN, et ipsas ZD, inter ipsam $BF \sqcap \frac{1}{2}$, αC, et intermedias, quaerantur mediae proportionales, ut inter NZ et ZD sit $Z\beta.$ cui in ipsa ZE sumatur ei aequalis $Z\gamma.$ et inter $H\alpha$ sive $\frac{1}{2}$ et $\alpha C.$ erit $\alpha\delta$ proportionalis, cui in αC sumatur aequalis $\alpha\theta$, quae et aequalis QY, et per puncta $B\gamma\theta$, et intermedia ducatur curva $B\gamma\theta.$ Erit ut ex calculo patet, $Z\gamma \sqcap v.$ et $RX \sqcap e.$ Addantur in unam ordinatam $RX\lambda$ vel $QY\mu$, ponendo $X\lambda$ semper $Z\gamma.$ et $Y\mu \sqcap \alpha\theta$, et ita in intermediis; et curva ducatur $W\lambda\mu.$ ad quam sunt omnes $R\lambda$, nempe $z.$ quae est parabolica, ut ex calculo supra ostendi.

Si contra sit z non $e+v$ sed $e-v.$ et auferendae sint ipsae v ab ipsis e, ut si sumatur in recta RX; ipsa $X\xi$ aequalis $Z\gamma$, eodemque modo ab $YQ.$ auferatur, $\alpha\theta$, ubi contingit

---

1 *Zur Figur:* NB. $GL \sqcap GS.$ seu puncta L et S debent coincidere.

ob $\alpha\theta$, et QY aequales, ut punctum cadat in Q. Ideo curva ad quam est $z \sqcap e - v$ erit $W\xi Q$. quae etiam est parabolica, ut ostendi.

Area spatii $WPRX$. haberi potest ex quadratura Circuli; ut supra dixi. Num quomodo inde ducatur, particulatim exponendum. Ex puncto X demittatur in rectam PW $\xi\pi$. et ex posita $P\pi$ abscissa $\sqcap e$. erit ordinata $x \sqcap 2e\sqrt{1-e^2}$ ut supra calculus ostendit. Ergo $\int \overline{x} \sqcap 2\int \overline{e\sqrt{1-e^2}}$.

Centro P radio $PW \sqcap 1$. describatur quadrans qualis prior, $PW\varphi\psi$. Continuetur $X\pi$ dum ejus arcui occurrat in φ. Ajo momentum sinuum seu omnium $\pi\varphi$ ex axe PQ. ipsarum πX summae esse proportionale. Sed jam video me in errore fuisse versatum, dum aliquid hinc duci posse credidi, circa Circulum. Nam jam recognosco momenta sinuum ex basi per centrum, non ex ipsis ut ex $e + v$ vel $e - v$ haberi ex quadratura parabolae, etsi si quis calculum persequatur, elegans theorema habiturum non videatur dubitandum.

1 ideo *(1)* jam curva repraesentans er *(2)* curva L 6 $\int \overline{\pi}$ L *ändert Hrsg.*

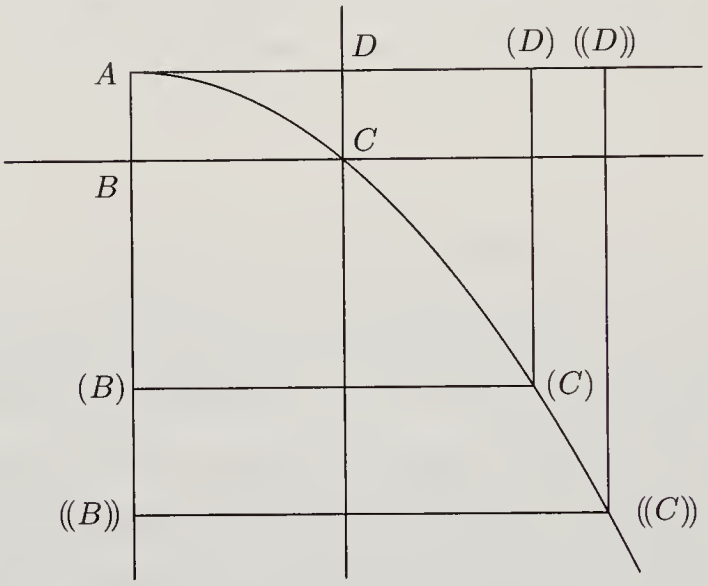
55. DE MOMENTIS, AEQUATIONES TETRAGONISTICAE

22. Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 150–151. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 150. Auf Bl. 151 N. 56.
Cc 2, Nr. 1165

22 Xb. 1675

De Momentis, aequationes Tetragonisticae



[*Fig 1*]

[*1. Ansatz, gestrichen*]

Momentum Quadrilinei $CB((B))((C))C$ ex Axe AB. quaeritur. Sit AB vel $A(B)$ vel $A((B))$ ⊓ x, ⊓ DC vel $(D)(C)$ vel $((D))((C))$. BC vel $(B)(C)$ vel $((B))((C))$ ⊓ y sive AD vel $A(D)$ vel $A((D))$. Et β differentia ipsarum x, γ diff. ipsarum y immediatarum. Differentia

10 Momentum *(1)* Spatij BB *(2)* Qvadrilinei | CB(B)(C)C *ändert Hrsg.* | ex *L* 12–407,2 vel A((D)) Et *(1)* γ differentia ipsarum x, β *(2)* β ... sit *erg. L*

inter duas ordinatas extremas, ut $D((D))$ sit ψ, differentia inter duas abscissas extremas ut $B((B))$ sit $[\varphi]$.

Momentum quadrilinei $CB((B))((C))C$ est $\frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta}$ ut constat. Momentum quadrilinei complementalis $CD((D))((C))C$, ex Axe AB, est $\int \overline{xy\gamma}$. Gnomon $ABCD$ est $((y))((x))$. Ejus momentum ex Axe AB est $((\frac{y^2x}{2}))$. Rectangulum completum $A((B))((C))((D))$ cujus valor xy. Et ejus momentum ex axe AB, erit $\frac{xy^2}{2}$. Quoniam autem hoc rectangulum aequivalet quadrilineis et Gnomoni, et eodem situ servato ab ipsis completur; ideo, et momentum ejus aequivalebit summae momentorum ab ipsis, et fiet: $2\int \overline{xy\gamma} + \int \overline{y^2\beta} \sqcap xy^2 - ((xy^2))$. Ubi nota, per $x.$ et $y.$ absolute seu extra vinculum posita majorem ex duabus ordinatis vel abscissis extremis [*bricht ab*]

[*2. Ansatz*]

Quadrilineum $CB((B))((C))(C)C$ inter ordinatas extremas $BC, ((B))((C))$, partem axis $B((B))$ et curvam $C(C)((C))$ comprehensum. Punctum axis fixum A. Abscissae $AB, A(B), A((B))$. Quas generali nomine vocabimus x. Et quandocunque intra vinculum sub $\int.$ aut $d.$ continebitur x, intelligentur omnes inter AB, et $A((B))$ comprehensae; quando vero x simpliciter reperietur extra vinculum tale, intelligetur x extrema. Eodem modo y erit BC, vel $(B)(C)$ vel $((B))((C))$ et (in aequationibus Quadraturarum) simpliciter posita erit ordinata extrema. Quandocunque in eadem aequatione reperiuntur $x.$ et $y.$ sine alia nota, intelligentur eae quae ad se invicem referuntur. Majorem ex x extremis vocabimus x, minorem ξ. Eodem modo majorem ex y extremis vocabimus y, minorem

3 f. constat *(1)*, nunc qvaeramus idem adhuc semel *(a)* : *(b)*, hoc modo: *(2)* Momentum *(a)* qvadrilinei *(b)* Gnomonis *(c)* qvadrilinei *L* 4 CD(D)(C)C *L ändert Hrsg.* 4 $\int \overline{xy\gamma}$. *(1)* Momentum *(a)* AC *(b)* Gnomonis, ABCD ex axe AB, *(2)* Gnomon *L* 5 $((\frac{y^2x}{2}))$ *(1)* Addantur momenta Qvadrilineorum ⟨et⟩ Gnomonis fiet *(2)* jam Qvadrilinea cum Gnomone aeqvantur rectangulo completo *(3)* Rectangulum *L* 9 posita *(1)* minima *(a)* earum qvae *(b)* ordinata *(2)* minor *(3)* majorem *L* 12 *(1)* Spatium *(2)* qvadrilineum *L* 16 intelligetur *(1)* ((x)) cuius punctum ((B)), a puncto fixo A, remotissimum est. *(2)* x extrema *L* 19 referuntur *(1)* x maximam vocabimus simpliciter *(2)* extremam in *(3)* Majorem ex extremis *(4)* ipsam *(5)* Majorem *L*

υ. Cum majore vel minore existente abscissa, major est etiam vel minor ei respondens ordinata extrema, nullis opus erit notis ulterioribus. Sed cum altera existente majore altera est minor, tunc eae quae ad se invicem referuntur postremae, iisdem parenthesibus notentur, ut $((x))$. $((\upsilon))$ significat minorem y majori x respondere. Differentia duarum x immediatarum sit β. duarum y. immediatarum sit γ. Differentia duarum x extremarum φ, duarum vero y extremarum, ψ.

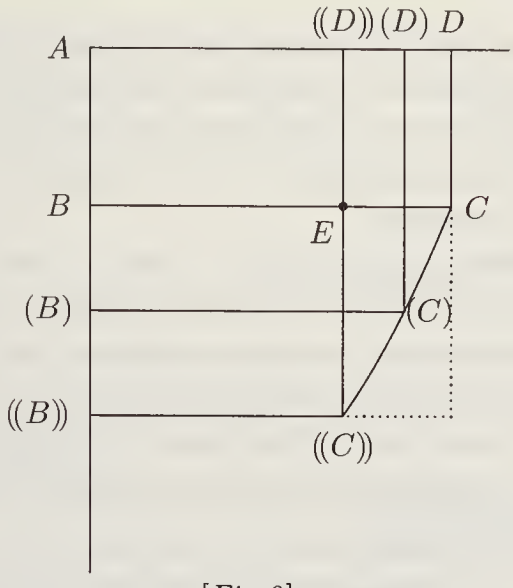
Momentum quadrilinei $CB((B))((C))(C)C$ ex Axe $A((B))$ erit $\frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta}$. Momentum quadrilinei conjugati $CD((D))((C))(C)C$ ex eodem axe erit $\int \overline{xy\gamma}$. Gnomon $ABCD \sqcap \xi\upsilon$. Ejus momentum ex Axe, erit $\frac{\xi\upsilon^2}{2}$. Rectangulum completum $A((B))((C))((D))$ erit xy, ejusque momentum $\frac{xy^2}{2}$, quoniam vero rectangulum hoc non tantum aequale est, sed et c o i n c i d e n s ipsis duobus Quadrilineis, et Gnomoni, ita ut jacent sumtis; ideo et momentum ejus aequale ipsorummet momentorum summae, et fiet aequatio Tetragonistica: $\int \overline{y^2\beta} + 2\int \overline{xy\gamma} \sqcap xy^2 - \xi\upsilon^2$.

Quodsi quaeramus aequationem referentem inter se momenta quadrilineorum, ad Axem conjugatum AD, sic procedemus: Momentum spatii conjugati $CD((D))((C))(C)C$ ex Axe conjugato AD, est $\frac{1}{2}\int \overline{x^2\gamma}$. Momentum spatii $CB((B))((C))(C)C$ ex axe conjugato est $\int \overline{xy\beta}$. Gnomonis $ABCD \sqcap \xi\upsilon$, momentum ex axe conjugato est $\frac{\xi^2\upsilon}{2}$. et rectanguli completi $A((B))((C))((D))$ momentum ex eodem $\frac{x^2y}{2}$; et fiet aequatio ut ante $\int \overline{x^2\gamma} + 2\int \overline{xy\beta} \sqcap x^2y - \xi^2\upsilon$.

Et hic quidem usus non est difficilis, sed difficilior est calculus, quando ordinatis crescentibus descrescunt abscissae, vel quod idem est contra:

Momentum omnium BC ex axe $AB, \sqcap \frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta}$. Momentum omnium DC ex axe $AB \sqcap \int \overline{xy\gamma}$. A momento omn. BC, seu spatii $CB((B))((C))(C)C$, id est ex momento Rectanguli $BE((C)) +$ momento Spatii trilinei $CE((C))(C)C$; auferatur momentum omnium DC, id est momentum rectanguli DCE, + momentum ejusdem Spatii trilinei.

8 qvadrilinei *(1)* qvod *(2)* complementalis *(3)* conjugati *L* 11 duobus *(1)* Rectan *(2)* Qvadrilineis *L*



[*Fig 2*]

Ergo destructo utrobique hujus trilinei momento, erit momentum omn. BC − mom. omn. $DC, \sqcap$ mom. $\square^{\text{li}}$ $BE((C))$ − mom. $\square^{\text{li}}$ DCE. Adeoque jam $\square^{\text{lum}}$ $BE((C))$ est $B((B))$ ⌢ $((B))((C))$ sive $((x)) - \xi, ⌢$ $((\upsilon))$ ejusque momentum ex axe est: $\frac{1}{2}((x))((\upsilon^2)) - \frac{1}{2}\xi((\upsilon^2))$. et $\square^{\text{lum}}$ DCE $\sqcap$ ξ ⌢ $y - ((\upsilon))$. Ejusque momentum erit: $\xi,,$ ⌢ $y - ((\upsilon)),,$ ⌢ $\boxed{((\upsilon)) + \frac{y - ((\upsilon))}{2}} \frac{y + ((\upsilon))}{2}$ sive $\frac{1}{2}\xi$ ⌢ $y^2 - ((\upsilon^2))$. Quod si a momento rectanguli $BE((C))$, subtrahatur momentum $\square^{\text{li}}DCE$, fiet $\frac{1}{2}((x))((\upsilon^2)) - \frac{1}{2}\xi y^2$. et fiet tandem $\int \overline{y^2\beta} - 2\int \overline{xy\gamma}$ $\sqcap$ $((x))((\upsilon^2)) - \xi y^2$. Jungendo ergo haec theoremata concludemus Differentiam rectangulorum extremorum sub ordinata in suam abscissam, aequari vel Summae, vel cum R e t r o ⟨g⟩ r a d a est figura (: id est cum crescentibus abscissis decrescunt ordinatae :) differentiae inter summam Quadratorum ab ordinatis ad axem applicatorum, et duplam summam Rectangulorum sub Correctangulis, applicatorum ad axem conjugatum. Et haec vera sunt, modo figura sit ad easdem partes cava. Nam si non sit, eadem obtinebit

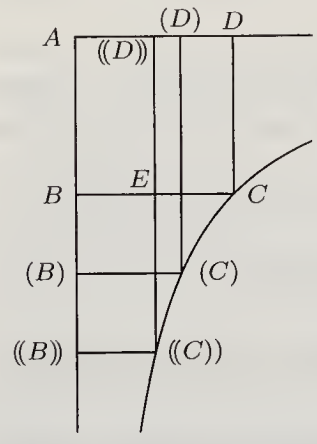
6 f. rectanguli | DCE, subtrahatur momentum $\square^{\text{li}}$ BE((C)) *ändert Hrsg.* |, fiet *L* 12 conjugatum. *(1)* | Sed qvoniam hoc verum est etiamsi *streicht Hrsg.* | *(2)* Et *L* 13 sunt, *(1)* | etsi *streicht Hrsg.* | figura non sit ad easdem partes cava, modo non sit Stationaria *(2)* modo *L*

13 si non sit: Der gestrichene Entwurf einer Figur dazu wird nicht wiedergegeben.

ratiocinatio modo in duas partes ad easdem partes cavas, dividatur. Caeterum hic illud obiter dixerim, eam fore genuinam ac naturalem, theorema tam pulchrum demonstrandi methodum, quae una complectatur utrumque casum, universali ratiocinatione. Ego enim illud generaliter sentio, eas demonstrationes non esse optimas, quae diversos theorematis ejusdem casus separatim ostendunt.

Si quaeramus momenta ex axe conjugato, ut supra, et fiet in casu Figurae Retrogradae: $\int \overline{x^2\gamma} - 2\int \overline{xy\beta} \sqcap ((x^2\upsilon)) - \xi^2 y$. Nota: Figura Retrograda utrique axi, proposito pariter et conjugato obvertit concavitatem, vel utrique pariter convexitatem. Figura progrediens alterutri. Non de curvis sed de figuris dici potest esse hoc modo retrogradas. Forte aliud vocabulum commodius. Omnis figurae Retrogradae complementum est progrediens.

Ne ullus casus nobis elabatur, illum tantum superest tractemus, quo eadem curva convexitatem obvertit utrique Axi.



[*Fig. 3*]

Spat. $CB((B))((C))(C)C \overset{(1)}{\sqcap} BE((C)) + CE((C))(C)C$ et
$\odot$ ☿ ♅

Spat. $CD((D))((C))(C)C \overset{(2)}{\sqcap} DCE + ♄$.
☽ ♃

☿ $\overset{(3)}{\sqcap}$ $((x)) - \xi,,$ ⌢ $((\upsilon))$ et ♃ $\overset{(4)}{\sqcap}$ $y - ((\upsilon))$ ⌢ ξ.

Moment. $\odot$ ex $AB \overset{(5)}{\sqcap} \frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta}$. Moment. ☽ ex $AB \overset{(6)}{\sqcap}$ $\int \overline{xy\gamma}$. Mom. $\odot$ − Mom. ☽ $\overset{(7)}{\sqcap}$ mom. ☿ $\boxed{+\text{mom. } ♅}$ − mom. ♃ $\boxed{-\text{mom. } ♅}$ per 1. 2. Ergo per 5. 6. 7. erit $\frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta} - \int \overline{xy\gamma}$ $\overset{(8)}{\sqcap}$ mom. ☿ − mom. ♃.

5 f. ostendunt. *(1)* Si curva C(C)((C)) non concavam sed convexam ostendat axi partem, *(a)* id *(b)* eadem nihilominus demonstratio locum habebit, *(aa)* tant *(bb)* idem scilicet ac si *(2)* Si *L* 8 vel ... convexitatem *erg. L* 12 f. utriqve *(1)* Axium *(2)* Axi *(a)* | Mom *streicht Hrsg.* | *(b)* ⟨—⟩ (c) $\int x\beta$ *(d)* $\int y\beta \sqcap$ *(aa)* $\frac{1}{2}y^2\beta$ *(bb)* $\frac{1}{2}\int \overline{y^2\beta}$ Moment. $\int \overline{x\gamma} \sqcap \int \overline{xy\gamma}$ | Jam *streicht Hrsg.* | *(aaa)* Mom $\int y\beta \sqcap$ Mom *(bbb)* Mom. *(3)* Spat: *L*

7 $((x^2\upsilon)) - \xi^2 y$: Richtig wäre $\xi^2 y - ((x^2\upsilon))$ wie in S. 411 Z. 15.

Mom. ♀ $\overset{(9)}{\sqcap}$ ♀ $\frown \frac{((\upsilon))}{2}$. Ergo per 3. 9. Mom. ♀ $\overset{(10)}{\sqcap}$ $((x)) - \xi, \frown \frac{((\upsilon^2))}{2}$. Eodem modo mom. ♄ $\overset{(11)}{\sqcap}$ ♄ $\frown \llcorner BE + \frac{EC}{2}\lrcorner \sqcap$ ♄ $\frown ((\upsilon)) + \frac{y - ((\upsilon))}{2} \sqcap$ ♄ $\frown \frac{y + ((\upsilon))}{2}$. Ergo per 4, 11. erit mom. ♄ $\overset{(12)}{\sqcap}$ $y^2 - ((\upsilon^2)), \frown \frac{\xi}{2}$.

Ergo per 10, 12. erit mom. ♀ − mom. ♄ $\overset{(13)}{\sqcap}$ $\frac{((x))((\upsilon^2))}{2}$ $\boxed{-\frac{\xi((\upsilon^2))}{2}}$, $-\frac{y^2\xi}{2}$ $\boxed{+\frac{((\upsilon^2))\xi}{2}}$.

Ergo denique per 8, erit $\int \overline{y^2\beta} - 2\int \overline{yx\gamma}$ $\overset{(14)}{\sqcap}$ $((x\upsilon^2)) - y^2\xi$. Ut ante. Nulla ergo differentia in calculo producitur.

Interea haec computationis repetitio ad ejus comprobationem utilis fuit. Et apparet etiam, ad demonstranda Theoremata fundamentalia, quale hoc est, solere non solo calculo rem transigi, sed ipsum etiam situm venire in ratiocinationem. Quemadmodum apparet hoc loco resolutione ipsius ☉ in ♀ et ☿. et ipsius ☽ in ♄ et ☿ opus fuisse.

Loco aequationis 14 etiam poterit scribi et eodem modo demonstrari 15. Quod quo modo enuntiam debeat sic patere: tantum scilicet enim semper γ ponetur in locum β vel contra. DC, sive ξ in locum $((B))((C))$ vel υ itemque $((D))((C))$ vel x in locum BC vel y. Et intra vincula x pro y vel contra. Tunc enim eadem quae ante ratiocinatio est. Et fiet: $\int \overline{x^2\gamma} - 2\int \overline{yx\beta}$ $\overset{[(15)]}{\sqcap}$ $y\xi^2 - ((x^2\upsilon))$.

Notanda haec substitutio, seu s i m i l i t u d o rerum, non pendens a situ, sed a ratione. Ut similia sunt, in quibus eadem agendi ratio est. Notabile etiam ex his habemus theorema, quando $\int \overline{x^2\gamma} \underset{\sqcap}{\sqcap} 2\int \overline{yx\beta}$ etiam $y\xi^2 \underset{\sqcap}{\sqcap} ((x^2\upsilon))$. Eodemque modo in caeteris casibus enuntiari potest T h e o r e m a d e t e r m i n a t o r i u m. Quale in appropinquationibus magnos usus habere potest. Ex Aequationibus Tetragonisticis solent confici theoremata determinatoria, quia in illis plerumque non sunt quantitates negativae.

---

18 *Dazu am Rande:* N o v u s c h a r a c t e r $\sqcap\sqcap$

21 theorema *L ändert Hrsg.*

---

23 N o v u s c h a r a c t e r : Leibniz verwendet die Zeichen $\sqcap$ für „größer“ und $\sqcap$ für „kleiner“ bereits seit Sommer 1674; vgl. z. B. VII, 1 N. 47_{10} Teil 3 S. 313 f.

Ubi obiter noto, quemadmodum Geometra propositiones alias Problemata alias Theoremata alias Lemmata, etc. appellat ita posse Analyticum distinguere propositiones Tetragonisticas a rectilinearibus; item determinationes ab Aequationibus et Analogiis; et Appropinquationes a constructionibus. Sunt et problemata irregularia, sunt Diophantea, sunt negativae propositiones.

Nota hinc casus ille particularis poterit inveniri, quo $y\xi^2 - ((x^2 \cup)) \sqcap 0$. Adeoque fiet perfecte $\int \overline{x^2\gamma} \sqcap 2 \int \overline{yx\beta}$. Quod po⟨teri⟩t servire ad inveniendas partium quadraturas.

1–5 *Dazu am Rande:* Propositionum nomina

1 qvemadmodum *(1)* Theorema Determina *(2)* Geometra *L* 2 appellant *L ändert Hrsg.* 3 et Analogiis *erg. L*

56. CURVA ELLIPSEOS VEL HYPERBOLAE

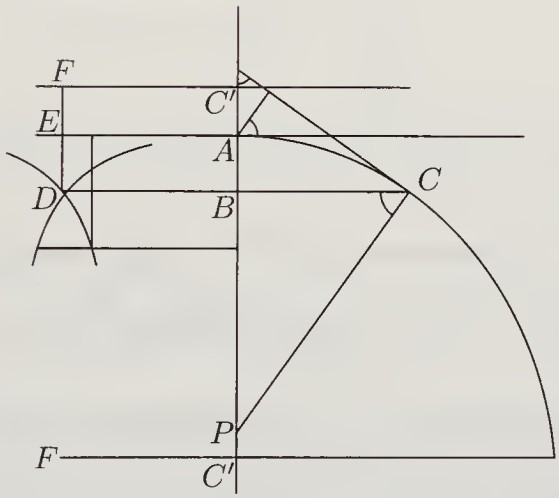
[22. – 31.] Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 150–151. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 151. Auf Bl. 150 N. 55.
Cc 2, Nr. 1166

Datierungsgründe: N. 56 ist nach dem auf den 22. Dezember 1675 datierten Stück N. 55 auf den Bogen geschrieben.

Xb. 1675.

Curva Ellips. vel Hyp. Item de A n a l y t i c a q u a d r a t u r a r u m.
C e n t r o agitationis. Progressionibus Indicum. Figuris s y g n o t i s.
Nova methodus determinandi L o c a.



[*Fig. 1*]

$AB \sqcap x$. Erit $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \sqcap BC$ Aequatio generalis figurae Conicae ad axem relatae. CP perpendicularis ad Curvam, $BP \sqcap a \mp \frac{a}{q}x$. $CP \sqcap \sqrt{a^2 \mp \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2. + 2a\ x \mp \frac{a}{q}x^2}$ $\frac{BC}{CP} \sqcap \frac{a}{z}$. Erit $z \sqcap a \sqrt{\frac{a^2}{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + 1 \mp \frac{a}{q}}$ $\sqcap \frac{CPa}{BC}$ Elementum curvae Conicae. Mo-

8–11 Xb. 1675. Curva *(1)* Coni *(2)* Ellips. ... L o c a *erg. L*

17 *Fig. 1*: Die möglichst getreu wiedergegebene Vorlage entspricht den Angaben des nicht fehlerfreien Textes nur ungefähr. Leibniz verwendet die Punktbezeichnung C sowohl für den Endpunkt der Ordinate wie für das Zentrum der Kurve. Zur besseren Unterscheidung wird Letzteres mit C' wiedergegeben.

mentum curvae ex axe $\frac{CPa}{BC} \frown BC \sqcap CPa$. Quaeratur et ipsius Spatii quadratura. Ipsae BD repraesentent ipsas z et AE ipsi erit asymptotos. Fiat $\dagger 2qx + x^2 + q^2 \sqcap y^2$, sive $\ddagger x \ddagger q \sqcap y$. Ergo $\dagger 2qx + x^2 \sqcap y^2 - q^2$ et multiplicando per $\dagger \frac{a}{q}$ fiet $2ax \dagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap \dagger \frac{a}{q}y^2 \dagger aq$. Adeoque ponendo C'. centrum, et $AC' \sqcap q$. Rectam transeuntem per C'. axi normalem vocabimus axem conjugatum. Et sumtis $C'B \sqcap y$. fiet $DB \sqcap z \sqcap a \sqrt{\frac{a^2}{\dagger \frac{a}{q}y^2 \dagger aq} + 1} \dagger \frac{a}{q}$.

Porro omnium DB, momentum ex $C'F$ habebitur, si habeatur momentum omnium FD ex eodem, quod habebitur habitis omnibus y^2. Jam $z^2 - a^2 \sqcap \frac{a^4}{\dagger \frac{a}{q}y^2 \dagger aq}$ et $\dagger \odot \underbrace{\frac{a}{q}y^2 \dagger \frac{a^3}{q}}_{\odot} \odot aq \sqcap a^4$ et $\frac{a^4 \dagger \odot aq}{\dagger \odot \frac{a}{q}} \sqcap y^2$ seu $y^2 \sqcap \frac{\cancel{a^4} \dagger aqz^2 \dagger a^3q \cancel{-a^4}}{\dagger \frac{a}{q}z^2 \dagger \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}}$. Quod momentum ex quadratura Circuli Hyperbolaeve haberi, constat. Et patebit aliquod momentum Curvae Ellipticae pendere ex Circuli, aliud ex Hyperbolae quadratura.

In Circulo $\dagger \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$ se tollunt. In Ellipsi fit denominator: $-\frac{a}{q}z^2 + \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$. Quod si ergo q sit minor quam a. fiet denominator $-\frac{a}{q}z^2 - \ldots$ et ita pendebit dimensio omnium y^2 ex Circulo. Sin $\frac{a^3}{q} \sqcap \frac{a^4}{q^2}$ seu $1 \sqcap \frac{a}{q}$. seu $q \sqcap a$, tunc erit $\frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$ quantitas affirmativa; et denominator erit $-\frac{a}{q}z^2 + \ldots$ et pendebit summa omnium y^2 ex quad. Hyp.

Pro Hyperbola erit denominator $+\frac{a}{q}z^2 - \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$. Quae pendet necessario ex Hyperbola. Ergo momentum curvae Hyperbolicae ex axe dato pariter et conjugato semper non nisi ex ipsa Quad. Hyp. pendet.

Si momentum curvae Ellipticae vel Hyperbolicae ad huc ex vertice aut alio axe invenire possemus, haberemus curvam Ellipseos vel Hyperbolae.

1 $\sqcap$ CPa. | qvae datur *ändert Hrsg.* | et *L*

$z \sqcap \frac{\sqrt{a^2, + 1 \frown \overline{2ax \mp \frac{a}{q}x^2},, \frown 2a \mp \frac{a}{q}x}}{2a \mp \frac{a}{q}x}$. Ejus momentum ex $2a \mp \frac{a}{q}x$. erit $\sqrt{\frac{a^2, +1 \mp \frac{a}{q} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2, \frown 2a \mp \frac{a}{q}x}{x}} \sqcap v$. Cujus figurae postremae omnium $\int v$ si haberi posset dimensio, haberetur curva. Repraesentent jam DB ipsas v. Habetur ante omnia eorum momentum ex AP axe quia $v^2 \sqcap \frac{a^2 \frown 2a \mp \frac{a}{q}x}{x} + \frac{}{2a \mp \frac{a}{q}x}\boxed{2}$. quae pendent ex quad. Hyp. et $v \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{x} \frac{+1}{\mp \frac{a}{q}} \frown \frac{}{2a \mp \frac{a}{q}x}\boxed{2}}$. vel pro $2a \mp \frac{a}{q}x$ ponendo φ, fiet: $x \sqcap \mp \frac{q\varphi}{a} \mp 2q$ et fiet: $v \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{\mp \frac{q\varphi}{a} \mp 2q} \frac{+1}{\mp \frac{a}{q}}} \frown \varphi^2$. Ponatur $v \sqcap \varphi \sqrt{\left\{ \mp \frac{1}{\frac{a}{q}} + \psi \right.}$, fiet: $\boxed{\mp \frac{1}{\frac{a}{q}} \varphi^2} + 2\varphi\psi \sqrt{\mp \frac{1}{\frac{a}{q}} +}$ $\psi^2 \sqcap \frac{a^2}{\mp \frac{q\varphi}{a} \mp 2q} \boxed{\mp \frac{+1}{\frac{a}{q}} \varphi^2}$, et fiet $\mp 2\not{\psi}\frac{q}{a}\sqrt{\mp \frac{1}{\frac{a}{q}} \varphi^2 \mp 4q\not{\psi}} \sqrt{\left\{ \mp \frac{1}{\frac{a}{q}} \right.} \varphi \sqcap \frac{a^2}{\psi} \mp 2q\psi^{\not 2}$. Redibimus ad valde similem priori, v ad x referenti, aequationem. Ubi venit in mentem n o v a a d q u a d r a t u r a s i n v e s t i g a n d a s v i a , calculo qvod⟨am⟩modo mirabiliter detorto.

4 $v^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite fehlt vor dem zweiten Term der Faktor $1 \mp \frac{a}{q}$, der im folgenden Wurzelausdruck für v wieder auftritt. Dort fehlt der Faktor $2a \mp \frac{a}{q}x$ bei $\frac{a^2}{x}$. Leibniz rechnet zunächst konsequent weiter, und der Fehler wirkt sich ab der Substitution mit ψ vorerst nicht weiter aus. In S. 416 Z. 29 verwendet Leibniz wieder die fehlerhafte Gleichung für v^2.

Nimirum ponatur summa ipsarum v, quaelibet, seu relatio spatii ipsarum v, ad rectangulum circumscriptum ponatur aequalis cuidam quantitati incognitae; ergo eadem ratione habebitur et summa omnium φ, prodibit enim similis expressio. At ex data summa ipsarum v habetur summa ipsarum φ aliunde, vel contra. Ergo prodibit aequatio, quae dabit ipsam illam relationem spatii ad rectangulum circumscriptum. Cum est constans. Hac methodo inveniri poterunt quadraturae analytice aut demonstrari potest, eas fieri non posse, seu non esse rationes constantes. Modo scilicet data aliqua figura ostendi possit, eam dari, ex data alterius figurae ejusdem cum ipsa naturae, portione. Hac methodo fieri poterit etiam, ut figurarum quae totae sunt immensurabiles mensurentur certae portiones; re scilicet ita artificiose directa, ut reducantur ad portionum ipsis aequalium aut proportionalium quadraturas, tunc enim habebitur aequatio, et invenietur incognita, etsi non sit constans ratio spatii ad rectangulum circumscriptum. Et videndum an non hac ratione aliqua Circuli et Hyperbolae portio mensurari aliquando absolute possit.

Re recte inspecta apparebit paraboleides et Hyperboloeides hoc modo fuisse mensuratas dum scilicet inventum est ipsis proportionales ad ipsarummet quadraturas requiri, unde venitur ad aequationem, quae in eo casu simplicissima. Nec dubitandum veniri ad compositiores. Nimirum enumerandum quibus modis figurae ex figuris deducuntur, et inter varios modos Analyticae apparebunt viae, quibus duae figurae ex duobus capitibus sibi σύγνωτοι ostendantur. Imo et forte ex tribus pluribusque. Et quid si ex infinitis? Certe si ex infinitis hinc via patebit forte describendi aliam curvam, secundum quam appareat illa variatio, qua mutatur relatio Spatii quaesiti ad rectangulum circumscriptum. Eaque ratione pervenietur ad relationem partium curvae inter se. Quae jam habetur in Circulo et Hyperbola. Quodsi habetur adhuc unius portionis quadratura, habebitur quadratura omnium; per relationem, talis qualis esse potest. Id ergo circa circulum superest tentandum, ut et circa Hyperbolam, an non alicujus ejus portionis quadraturam ostendi bis possit alteram ex altera pendere.

His calculis inprimis apta Centrobaryca. Variis enim artibus adhuc intentatis hic uti poterimus: ut non tantum habebimus summam omnium v^2, sed et summam omnium φ^2, nempe $\square \overline{2a \dotplus \frac{a}{q}x}$ quae $\sqcap v^2$ (ex parab.) $-\frac{a^2 2a}{x} \dotplus \frac{a^2 a}{q}$. Itaque datur momentum hoc

3 enim *(1)* eadem curva *(2)* similis *L* 18 qvibus *(1)* una fig *(2)* duae *L* 28 f. omnium *(1)* x^2, nempe fiet *(a)* $x^2 \sqcap$ *(b)* $\frac{a^2}{q^2}x^2 \sqcap$ *(2)* | φ^2 *erg. Hrsg.* |, nempe *L*

ex data quadratura quae est datae reciproca, nam pro x substituendus foret valor purus per v.

Et summa omnium φ^2, quae dat aliud rursus momentum dabitur ex Triangulo, rectangulo, figura data, parabola[,] quadratura Hyperbolae.

Figura quaelibet cum ejus reciproca semper hanc habet relationem, quod mensurari potest spatium ex earum ductu factu[m].

Videndum an postea tale spatium alia ratione utiliter resolvere liceat.

Si figurae reciprocae ordinatae imponantur ordinatarum datae extremis, momentum earum hoc modo positarum semper poterit haberi.

Idem est momentum in eodem plano, seu ungula semiquadrantalis, quod ductus Trianguli in figuram.

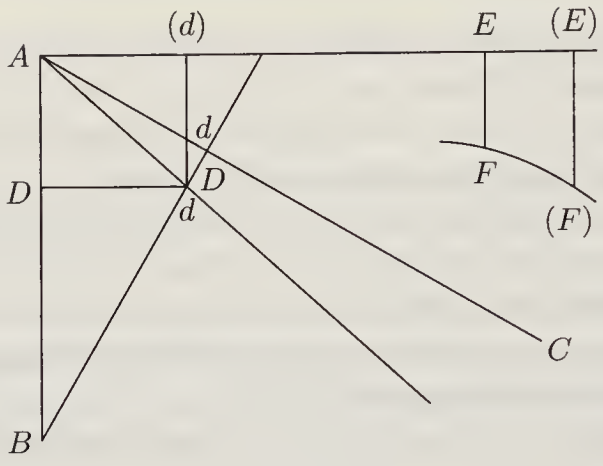
Ut ex tribus momentis datis haberi potest centrum gravitatis; ope summae quadratorum ita ex tribus ictuum viribus datis, haberi poterit centrum agitationis, ope summae Cuborum. Quae omnia utilia ad figurae dimensionem. Poterunt Similia excogitari centra, altiora.

Quemadmodum invenire possumus duos locos ad lineam rectam, quorum intersectione invenitur centrum gravitatis[,] ita videndum an non possint inveniri loca ad Curvas. Seu an non artificio aliquo ostendi possit, centrum gravitatis, etsi ignotum nobis, cadere tamen necessario in aliquam lineam curvam.

Notabile est, si aliquando non quidem inveniantur duo momenta ex duobus axibus, absolute, sed tantum ratio eorum inter se habebitur linea recta in quam cadit centrum gravitatis; ut sit momentum unum m, alterum M. Sit id cujus momentum quaeritur q. erit $\frac{m}{q}$, distantia una $\sqcap$ d. $\frac{M}{q}$. distantia altera $\sqcap$ D. et ponatur cognita $\frac{m}{M} \sqcap r$. Ratio, fiet $\frac{d}{D} \sqcap \frac{\frac{m}{q}}{\frac{M}{q}} \sqcap \frac{m}{M} \sqcap r$. et $D \sqcap \frac{d}{r}$.

Ergo si ponantur AB, AC. axes debet locus punctorum dD inveniri talis, ut inde ductae ordinatae in ADB, AdC, nempe DD, dd habeant rationem datam, qui locus, ut constat, est recta. Hinc jam tandem nova aperit sese consideratio, qua possit pervenire ad

1 qvadraturae *L ändert Hrsg.* 2–5 per v. | Et ... Hyperbolae *erg.* | *(1)* zy $\sqcap$ a^2 $\frac{a}{z} \sqcap \frac{y}{a}$ *(2)* Figura *L* 12 ex *(1)* centro gravitatis duci potest *(2)* tribus *L*



[*Fig. 2*]

casus quo locus punctorum Dd sit curva. Ponatur M non ut hic $\sqcap \frac{m}{r}$ sed alia aequatione ex data m haberi posse, seu esse $M(\sqcap \sqrt[\cdot\cdot]{\cdot m^{\cdot} + : m^{\cdot\cdot}}$ etc.) $\sqcap m$ etc. fiet $\frac{d}{D} \sqcap \frac{m}{m \text{ etc.}}$. Ex ipsa autem sit $m \sqcap AE$, vel $A(E)$ quaelibet, et $EF \sqcap M$. Dabitur utique curva $F(F)$ exprimens relationem momentorum. Quodsi ergo angulus CAB rectus tunc locus punctorum dD erit curva proportionalis priori, id est, in qua ordinatae pariter et abscissae sint proportione auctae vel diminutae. Hoc enim tantum colligi poterit, quae sit curva ista, sed nondum poterit describi, etsi describi queas ipsi proportionalis. Nec dubitandum idem fore, etiam cum angulus non rectus. Itaque nondum locum descriptibilem obtinuimus. Quodsi jam adhuc semel obtineamus relationem inter duo momenta duasque distantias tunc demum habebimus locum descriptibilem; Rursus enim infinitas habebimus curvas proportionales quae satisfacient, quarum cum prioribus infinitis intersectiones, dabunt infinita puncta, in quorum aliquo esse potest centrum gravitatis.

Ergo nunc primum habebimus locum. Ergo opus est adhuc alia duorum momentorum relatione, ut rursus novus habeatur locus. Cujus cum priore intersectione solvatur quaestio. Invenietur data nova duorum momentorum relatione plus quam opus est. Nimirum hoc modo trium locorum intersectione dabitur punctum Tertiae cui in infinitis

---

5 *Dazu am Rande:* In figuris ubi relatio portionum datur, ut in Circulo, et Hyperbola, ista utilia esse possunt. ⟨Et⟩ poterint fingi casus ubi veniatur ad portiones v. g. circulares, ubi angulorum sive arcuum relatio Geometrice haberi potest.

14 *Dazu am Rande:* Loci T e t r a g o n i s t i c i

curvae proportionales, aut cum unis aut cum alteris prioribus intersectionem formantes, tria dabunt loca. Hinc si dentur tria momenta inter se relata habebitur jam solutio, credo, absoluta. Pro combinationibus enim duo habebuntur loca. Si duorum momentorum nota sit summa vel differentia, Nihilo minus opus erit combinationibus tribus. Quandocunque nota relatio inter ipsam quantitatem quaesitam, q. et ejusmodi momenta, tunc relatio inter D et d absolute habebitur.

Nota si angulus non rectus, solvatur illud problema simpliciter; locum invenire, talem ut $D\_\_dD, d\_\_dD$ relationem inter se habeant datam, quod semper fieri potest. Huic loco tantum proportionales infiniti adscribentur. Sunt haec pulcherrima et plane nova. Si plura dantur ejusmodi momenta, postea elegantes invenientur aequationes tetragonisticae quadraturae hactenus inventae tantum inveniendo figurae alicujus relationem ad seipsum vel ex ea pendentis. Ita enim ventum ad aequationem. Videndum ergo quomodo ex data figura duci possint aliae, una methodo, ex eadem eaedem alia methodo; modo caveantur identica.

Ubi varias figuras habebimus digeremus in progressiones Wallisiano more. Aliquando intersectione duarum progressionum inveniri poterit incognita, et veniri ad aequationem, et fingi possunt casus. Inprimis tunc cum si non ipsa figura, saltem ei sygnotos in alia est progressione.

4 erit *(1)* pluribus *(a)* com *(b)* momentis *(2)* combinationibus L 5 inter *(1)* curvam *(2)* ipsam L

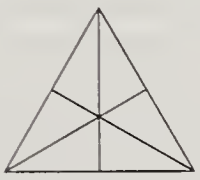
15 Wallisiano more: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478).

57. DE PROBLEMATIBUS IRREGULARIBUS

[November 1675 – Januar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 X 8 Bl. 1. 1 Ausschnitt von 20 x max. 16 cm. In der linken oberen Ecke fehlt ein Streifen von max. 10 x 1,2 cm. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1 v° leer. Cc 2, Nr. 1555

Datierungsgründe: Leibniz bezieht sich im vorliegenden Stück auf ein Gespräch mit O. Romer, wie aus seinem Brief an Chr. Huygens vom 27. Januar/6. Februar 1691 hervorgeht (s. III, 5 N. 6 S. 48). Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Februar 1676 nachgewiesen. Zu den Belegstücken gehört ein Exzerpt aus einem Manuskript Romers über Zahnräder, dat. Dezember 1675 (Cc 2, Nr. 1187; Druck in Reihe VIII). Irreguläre Probleme (vgl. S. 421 Z. 3) erwähnt Leibniz wiederholt im November u. Dezember 1675 (N. 50, 51_2, 55; VII, 1 N. 85_1). Das Hebelgesetz wird auch in der Gesprächsaufzeichnung N. 62 diskutiert, dort mit Verweis auf den Beweis von Guldin (s. S. 436 Z. 1–6). N. 57 dürfte also vor N. 62 entstanden sein.



[*Fig. 1*]

Mons. Romer cherche de demonstrer les principes mechaniques, d'une maniere singuliere. Il demonstre rigoureusement le theoreme d'Archimede: que les forces des corps pesans sont reciproques aux distances: mais dans des cas particuliers, lors que les corps sont tenues de la progression geometrique double: par le moyen du parallelogramme, ou quarré, où le centre de gravité tombe dans la moitié du quarré; et quand ils sont triples par le moyen du Triangle Equilatere, où le centre de gravité tombe sur un tiers de la hauteur, c'est à dire dans le milieu. Donc s'il pourroit demonstrer que quelque raison donnée que ce soit, comme 7. à 8. se peut exprimer par deux nombres dont l'un est pris de la progression geometrique double, l'autre de la progression geometrique triple, en sorte que ces deux nombres soient en raison donnée, ou au moins moins differente de la donnée qu'aucune donnée; sa demonstration seroit rendue generale. Soit la raison donnée $\frac{a}{b}$. Soit l'exposant de la puissance ou du terme de la progression geometrique double, y, et de la triple v, et soit

16 le *(1)* principe *(2)* theoreme *L* 26 exponant *L ändert Hrsg.*

16 theoreme: ARCHIMEDES, *De aequiponderantibus* I. prop. VI u. VII. 19 *Fig. 1*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

la difference e. Il faut que $\underline{e}$ soit moindre que la donnée c. Ainsi il faut que $\dagger\frac{a}{b}\dagger\frac{2^y}{3^v} \sqcap c$ ou $\sqcap c-d$ vel contra $(\dagger)\frac{a}{b}(\dagger)\frac{3^\omega}{2^x} \sqcap c-f$.

Haec problemata sunt ex illorum numero, quae irregularia appello; ipsi sufficeret, etsi non inveniri possent tales termini, tamen ostendi eos esse. Auferatur fractio ex aequationibus, et pro $\frac{a}{b}$ ponatur g. Fiet $\dagger g3^v \dagger 2^y \sqcap c3^v - d3^v$. ubi v. et y. et d. sunt arbitrariae, nisi quod d. minor quam c. Si quaeramus valorem ipsius d. erit: $d \sqcap c \dagger \frac{2^y}{3^v} \dagger g$.

$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$
etc.	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	etc.
etc.	etc.	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{2}$
$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	etc.	etc.

etc.

Nimirum serie fractionum quantum satis est continuata quaeritur an non tandem aliquando ad fractionem perveniatur a data, $\frac{a}{b}$ minus differentem quantitate data. Patet

1 difference *(1)* donnée e. je dis qve *(2)* e. *L* 5 fiet † *(1)* (2^x)g *(2)* g2^x † 3^ω ⊓ c2^x – f2^x *(3)* | g2^v† *(a)* 3^x *(b)* 3^y ⊓ c2^v – d2^v *ändert Hrsg.* |. ubi *(aa)* tantum observandum est *(bb)* x. *(cc)* v. *L* 7 f. †g. *(1)* Et qvoniam in ratione qvalibet ut $\frac{a}{b}$. licet *(2)* $\frac{2}{3}\ \frac{4}{9}$ *(3)* $\frac{16}{27}\ \frac{4}{9}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{1}\frac{2}{3}\frac{9}{4}\frac{27}{16}$ *(4)* $\frac{8}{27}$ *L*

8–12 Leibniz gibt in der ersten Zeile der Tabelle die Werte von $\frac{2^y}{3^v}$ für $y = v$. Die folgenden Zeilen, die er schematisch durch Wiederholen und Verschieben der Zahlenfolgen von Zählern und Nennern bildet, entsprechen aber nur noch abschnittsweise der Form $\frac{2^y}{3^v}$.

hoc exemplo quam necesse sit summas aut differentias rationum explicare per summas aut differentias fractionum, neque enim te aliter hic explices, cum dicitur quaeri rationem a data differentem quantitate, minore quam sit alia ratio data. Quae locutio in demonstrandis Tetragonisticis saepe occurrit. Sed hoc obiter.

Ut ad ipsum problema redeamus, si non differentia minor data, sed simpliciter aequalitas quaereretur, et ita deberent esse $y.$ et $v.$ rationales, non esset problema in nostra potestate. Sed quoniam sufficit differentia minor aliqua data, ausim sperare solvi posse. Sed eum in finem videndum an non aliquando Geometria Hyperbolica ex data Hyp. Quadratura tale quiddam praebeat. Ut si sit: $a^y \sqcap$ datae $b.$ poterit haberi $y.$ per quadraturam Hyperbolae. Nota, quod loco $\frac{2^y}{3^v}$, scribi potest: $\frac{2^v}{3^v} \frown 2^z \sqcap \dagger d \dagger c + g$ ponendo $v + z \sqcap y.$ Ergo $\frac{2}{3}^{\cdot v} \sqcap \frac{\dagger d \dagger c + g}{2^z}$. Quae aequatio est ad quendam locum, sive curvam transcendentem cujus tangentes inservire poterunt fortasse.

Ope Methodi Mercatoris et meae, habebimus valorem ipsius v, ex sumta $z.$ pro arbitrio, ubi tantum $z.$ sumenda erit pro numero integro quolibet, tali tamen, ut $g.$ etiam sumta pro arbitrio, et prout res postulat, ipsa quantitas v, numero integro cuidam fiat valde propinqua.

10 $\frown 2^z \sqcap$ *(1)* datae qvantitati $\dagger$h *(2)* $\dagger$d *L*
c

13 Methodi: Leibniz betrachtet die in N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV–XVII, S. 28–33 [Marg.] dargestellte Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division als Umkehrung der von ihm in der *Accessio ad arithmeticam infinitorum*, III, 1 N. 2 S. 4 f., bewiesenen Regel für die Summierung abnehmender geometrischer Folgen; vgl. VII, 3 N. 38_2 S. 386.

58. CURVARUM DIMENSIO

2. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 284. Ausschnitt von max. 12 x 11 cm, Ränder ungleichmäßig. Am linken Rand von Bl. 284 r° abgeschnittene Wörter und Silben von Leibniz' Hand ergänzt. Textfolge Bl. 284 v°, 284 r°.
Cc 2, Nr. 1250, 1252

2 Januar. 1676

Curvarum dimensio ex Tang. invers.

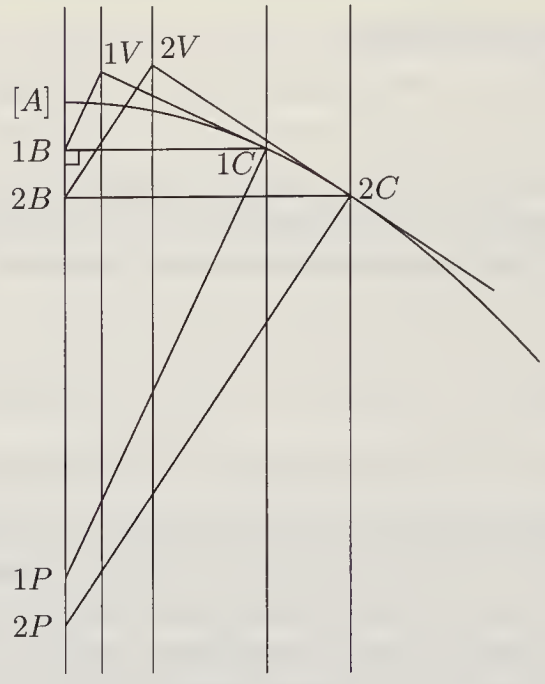
Tangens curvae trunci superficiei cylindricae in rectum expansi generaliter sic habetur, sit basis superficiei cylindricae, curva $A1C$ quae seminormaliter abscissa sit, ea in rectum extensa, et plano curvae applicata, ita ut $A1C$ arcus extendatur in $A1N$ rectam, erit curva $A1L$ terminus superficiei cylindricae expansae. Jam quaeritur ejus tangens $1L1M$. Ad punctum $1C$ baseos superficiei cylindricae, ducatur tangens, $1C1V$. Cui occurrat perpendiculariter $1B1V$ et $1C1V$ transferatur in $1N1M$, juncta $1L1M$ tanget.

Hinc ex data $A1L$ curva invenire curvam A1C. sic inquiretur.

Triangulum $1B1V1C$ situ et magnitudine datur, ut et triangulum $2B2V2C$. excepto hoc uno, quod non constat quam alte locari debeat, itaque ad curvam ejusmodi tentando inveniendam, opus foret sursum deorsumque movere, tale triangulum saltem imaginatione, idemque in singulis separatim esset faciendum, sed ea lege, ut continuata $1C1V$ semper cadat extra ⟨cae⟩tera C. vel ut addita ad triangulum firmum mobile recta $1P1C$ parallela ipsi $1B1V$, sit semper $1P1C$ minima earum quae a puncto $1P$ ad curvam duci possunt. Hoc vel tentando facere difficillimum unde proponi posset quaestio mechanica elegans, ad ex. darem alicui centum ejusmodi triangula longitudinis determinatae, BC,

7 2 Ianuar. 1676 *erg. L* 8 Curvarum ... invers. *erg. L* 14 juncta *(1)* 1C1M *(2)* 1L1M *L*

9–14 Tangens ... tanget: Die zugehörige Figur fehlt. Da die Höhe des Zylinderhufs in $1C$ gleich der Abzisse AB gewählt ist, ist nicht $1C1V$, sondern der Tangentenabschnitt zwischen $1C$ und der Ordinatenachse in $A1N$ abzutragen, um die Tangente von $A1L$ in $1L$ zu bestimmen. Die folgende Überlegung müsste entsprechend modifiziert werden.



[*Fig. 1*]

BV, CV. firma et rigida. Ex lineis $1B1C, 2B2C$. exeant asseres perpendiculariter in altum ad planum paginae.

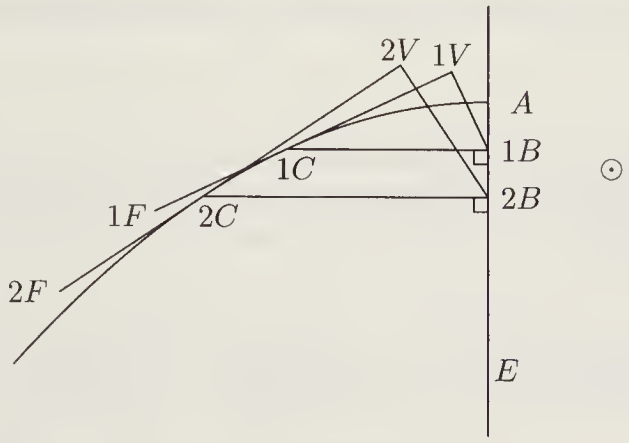
Mirabilis quaestio Mechanica.

Data sint aliquot, ut 100 Triangula rectangula inaequalia rigida BVC, ita ut BC earum basis fluere possit secundum AE regulam firmam, servato semper normali angulo CBA. Ponantur latera punctis B, opposita VC. indefinite producta in F. Ponamus semper unam lineam rigidam VF, alia esse altiorem, ut productae se nuspiam impediant. Super lineis BC insistant perpendiculariter ad planum hujus paginae asseres rigidi, triangula in eam ab invicem distantiam locanda sunt, ut id possibile sit, seu ut ipsae VF non occurrant asseribus, quae impediant. Mirum est ordinem Triangulorum non dare distantiam, et id fore difficile. Potest aliquis incipere a primis ordine; hinc recta AE omnes non

3 *Darunter:* verte signo ⊙ ubi plenius:

5 rectangula inaeqvalia *erg. L* 11 f. non | dari *ändert Hrsg.* | distantiam *L*

1 *Fig. 1*: Ein zwischen $1P1C$ und $2P2C$ verlaufender Schrägstrich wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 2*]

capiet, si male collocat. Problema reducitur ad hanc quaestionem Geometricam, invenire curvam, in qua si BC ordinatae, sint CV tangentes. Opus esset ista elaborari, saltem ex materia aliqua chartacea sive facili.

2 f. invenire *(1)* puncta *(2)* curvam L

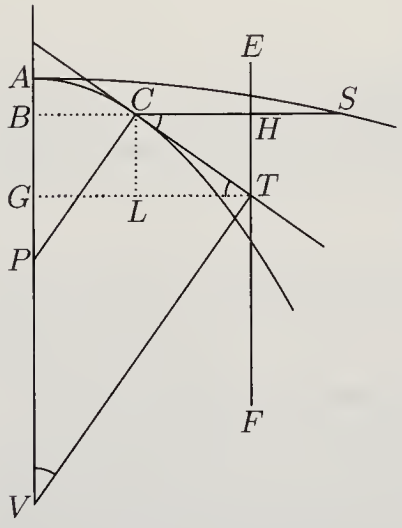
59. TETRAGONISTICA EX TRIANGULO CHARACTERISTICO

2. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 356. 1 Ausschnitt von max. 25,1 x 9,0 cm. Am linken Rand schräge Schnittkante. 1 S. auf Bl. 356 r°. Bl. 356 v° leer.
Cc 2, Nr. 1251

2. Jan. 1676

Tetragonist. ex Triang. characterist.



[*Fig. 1*]

AC Curva. *BC* ordinata, *CP* perpendicularis ad axem. *EF* recta interminata parallela *AB* axi. Producatur tangens *CT* dum huic rectae occurrat in *T*. Ex *T* demittatur perpendicularis *TG* in axem; et *GV* applicentur in *BS* ut ibi transeat curva *AS*. Ajo figuram *ABSA* aequari rectangulo *GT*. in *BC*. seu habetur summa omnium *GV*. Jam etiam habetur summa omnium *BP*. Ergo et horum differentia summa omnium †*GV* ∔ *BP*. Hinc modus ducendi tangentes ad figuras quae a me vocantur summatrices. Sit *AC* curva Logarithmica, (etsi alterius plane formae esse debeat;) erit *AS* curva Hyperbolica; seu *GV* applicata Hyperbolae, cujus abscissa *AB*. Sit ergo punctum in Logarithmica datum *C*, ad quod debet duci tangens *CT*. id est, debet duci recta *CT*, ad ipsam *EF* constantem talis, ut *TG* ex occursus puncto demissa ipsam *GV* faciat esse datam scilicet *BS*. quae data est. Ergo tangentium curvae Logarithmicae inventio redit ad hoc problema: Datis duabus rectis *AV*. *EF* interminatis parallelis et puncto *C*[,] ex hoc puncto

6 2. Ian. 1676 *erg. L* 7 Tetragonist. ... characterist. *erg. L* 8 |2 Ian. 1676 *erg., streicht Hrsg.*| AC Curva *L*

20 *Fig. 1*: Leibniz gibt in der Figur die aus der gegebenen Kurve *AC* konstruierte, durch *S* laufende Kurve weder im Krümmungsverhalten noch im Verlauf durch den Punkt *A* korrekt wieder. Eine gestrichene und teilweise überschriebene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht abgedruckt.

C unam rectarum interminatarum AV ducere rectam CT talem, ut si ex puncto occursus T duae ducantur rectae ad alteram interminatarum AV, una TG perpendicularis utrique interminatarum, altera TV perpendicularis ductae perpendicularis $CT_{[,]}$ sit GV data.

Datis positione rectis AV, EF parallelis$_{[,]}$ ex puncto C, ducere ad unam parallelarum rectam CT talem, ut ductis TG perpendiculari ad AV et EF parallelas, et TV perpendiculari ad ipsam CT ductam, occurrentibus parallelarum alteri in G. et V. fiat GV data. Sit $CB \sqcap b$. $GT \sqcap g$. $CH \sqcap h \sqcap \dagger b \dagger g$. $GV \sqcap v$. datae, quaeritur $CL \sqcap BG, \sqcap HT$. ut inveniatur punctum T. Quod statim ita fiet: $\bigtriangledown^{\text{la}}$ $\overset{\smile}{VGT}$ et $\overset{\smile}{TLC}$ similia. Ergo $\dfrac{HT}{CH \sqcap \dagger b \dagger g} \sqcap \dfrac{GT \sqcap g}{GV \sqcap v}$. Ergo $HT \sqcap \dfrac{\dagger bg \dagger g^2}{v}$. Jam in Hyp. si $AB \sqcap x$. erit $BS \sqcap GV \sqcap v \sqcap \dfrac{g^2}{x}$ et fiet $\dfrac{HT}{x} \sqcap \dfrac{\dagger b \dagger g}{g}$ seu erit HT ad AB ut CH ad GT. Eadem pro aliis summatricibus, sumendo tantum ordinatam summatae pro v.

1 C *(1)* alterutram *(2)* unam rectarum | AV *erg.* | *(a)* ducere *(b)* interminatarum ducere *L ändert Hrsg.* 4 f. ducere | *(1)* | ad *streicht Hrsg.* | alteram *(2)* ad unam parallelarum *erg.* | rectam *L*

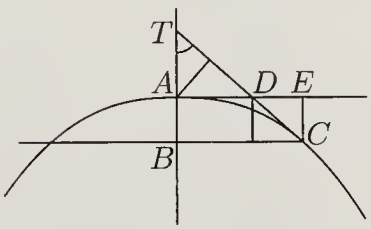
60. AEQUATIONES TETRAGONISTICAE PER CALCULUM DIFFERENTIALEM

Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 324. Ca 9/10 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 324 r°. Bl. 324 v° leer. Am oberen Rand algebraische Rechnung ohne direkten Bezug zum Haupttext (= S. 431 Z. 6 f.). Bl. 324 bildete ursprünglich den oberen Teil der linken Hälfte eines Bogens 2°; die anderen Teile des Bogens (abzüglich eines schmalen Streifens) sind N. 61 sowie VII, 1 N. 20 und VII, 1 N. 21.
Cc 2, Nr. 1290

Janvier 1676

Aequationes tetragonisticae
per calculum differentialem



[*Fig. 1*]

Sit BT portio axis inter tangentem et ordinatam t, ⊓ bx^z, et AD ⊓ d. Erit $\frac{d}{y}$ ⊓ $\frac{bx^z}{bx^z - x}$ ⊓ $\frac{bx^{z-1}}{bx^{z-1} - 1}$. et d ⊓ $y\frac{bx^{z-1}}{bx^{z-1} - 1}$ ⊓ $y + \frac{y}{bx^{z-1} - 1}$.

x^2 ⊓ $b + cy + dy^2 + ey^3$ etc., unde $2xt$ ⊓ $cy + 2dy^2 + 3ey^3$ etc. et t ⊓ $\frac{cy + 2dy^2 + 3ey^3 \text{ etc.}}{[2]\sqrt{b + cy + dy^2 + ey^3 \text{ [etc.]}}}$.

$b + cx + dx^2 + ex^3$ [etc.] ⊓ y^2. Ergo $ct + 2dxt + 3ex^2[t]$ [etc.] ⊓ $2y^2$, et fiet: t ⊓ $\frac{2b + 2cx + 2dx^2 + 2ex^3 \text{ etc.}}{c + 2dx + 3ex^2 \text{ etc.}}$. Ergo quando potentia aliqua ipsius ordinatae rationaliter haberi potest ipsa t est rationalis, modo absint rectangula incognita.

11 f. Aeqvationes ... differentialem *erg. L* 15 f. $+\frac{y}{bx^{z-1} - 1}$. *(1)* x^2 ⊓ *(2)* y^2 ⊓ b+ *(a)* cx^2 *(b)* $cx + dx^2$+ *(aa)* d *(bb)* ex^3 etc, fiet: 2yt *(3)* sit AB ⊓ 1 *(4)* x^2 ⊓ *L*

14 $\frac{d}{y}$ ⊓ $\frac{bx^z}{bx^z - x}$: Richtig wäre $\frac{d}{y} = \frac{bx^z - x}{bx^z}$. Leibniz setzt in S. 429 Z. 1 noch einmal mit dem korrekten Ausdruck an.

Jam $\frac{d}{y} \sqcap \frac{t-x}{t} \sqcap 1-\frac{x}{t}$ seu $d \sqcap y-\frac{x}{t}y$. Eruntque $DE \sqcap \frac{xy}{t}$. DE eandem potentiam habebunt rationalem quam habent y. Verbi gratia si y est radix quadratica, erit: $DE^2 \sqcap \frac{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}, x^2}{\frac{2b+2cx+2dx^2+2ex^3 \text{ etc.}}{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}}$ sive $DE^2 \sqcap \frac{cx^2+2dx^3+3ex^4 \text{ etc.}}{2}$. Unde patet generalius posse enuntiari, et posito $b+cx+dx^2+ex^3$ etc. $\sqcap y^z$ fore $DE^z \sqcap \frac{x^z}{z} \frown 0b+1c+2dx+3ex^2$ etc. At $\int \overline{DE} \sqcap \int \overline{xdy}$ ut ex alibi a me demonstratis constat, quaeramus ergo dy. per x. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\beta}$. At $t \sqcap \frac{zy^z}{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}$ et $\omega \sqcap \frac{\beta z y^{z-1}}{c+2dx+3ex^2 \text{ etc.}} \sqcap dy$. Jam $\int \omega$ semper haberi potest, $\sqcap y$. Ergo explicando ω et y, habebimus theorema sequens Arithmeticae infinitorum promotae, sane memorabile et mirum

$$\int \frac{dx \; z \; \overline{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}}{\sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}, \frown 0b+1c+2dx+3ex^2 \text{ etc.}}$$
$$\sqcap \sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}} \sqcap \int \overline{\omega} \sqcap \int \overline{dy}.$$

Item $\int DE + \int y \sqcap yx$. Unde theorema Arithmeticae infinitorum:

---

9 *Am Rande:* $\frac{y}{\sqrt[3]{y}} \sqcap \sqrt[3]{y^2}$

1 $\frac{\text{xy}}{\text{t}}$. *(1)* eruntqve DE ra *(2)* | et *gestr.* | DE | habebunt *streicht Hrsg.* | eandem *L* 11 Unde *(1)* regu *(2)* theorema *L*

---

2 erit: In der anschließenden Gleichung müsste die rechte Seite $\frac{(b+cx+dx^2+ex^3+\cdots)^2x^2}{\left(\frac{2b+2cx+2dx^2+2ex^3+\cdots}{c+2dx+3ex^2+\cdots}\right)^2}$ lauten. Leibniz rechnet mit dem falschen Ausdruck und dem daraus in Z. 4 f. fehlerhaft abgeleiteten Wert für DE^z konsequent bis S. 430 Z. 1 f. weiter. 5 alibi: N. 22 S. 186 Z. 17 f. 6 $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\beta}$: Richtig wäre $\frac{t}{y} = \frac{\beta}{\omega}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis S. 430 Z. 2.

$$\int \overline{\sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}} + \frac{x}{\sqrt[z]{z}} \overline{\sqrt[z]{0b+1c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}}$$
$$\text{☽} \qquad\qquad \odot$$
$$\sqcap\ x \overline{\sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ [etc.]}}}.$$

Ex hoc posteriore theoremate habemus id commodi, ut semper summam omnium ⊙ possimus reducere ad summam omnium ☽ quae utique simplicior est.

Si sit $x^z \sqcap b+cy+dy^2$ etc. erit $t \sqcap \frac{0b+cy+2dy^2 \text{ etc.}}{zx^{z-1}}$ vel $t \sqcap \frac{0b+cy+2dy^2 \text{ [etc.]}}{zx^z \frown \sqrt[z]{x}}$.

Jam $\int \overline{tdy} \sqcap \int \overline{ydx}$.

Sit aequatio: $xb+cxy+dxy^2$ etc. $\sqcap e+fy+gy^2$ etc. Ponamus:

$$tb+cty+dty^2 \text{ etc.} \sqcap e0+fy+2gy^2 \text{ etc.}, \quad -cxy-2dxy^2 \text{ etc.}$$

et

$$t \sqcap \frac{e0+fy+2gy^2 \text{ [etc.]}}{b+cy+dy^2 \text{ [etc.]}}, -\frac{cy-2dy^2 \text{ [etc.]}}{b+cy+dy^2 \text{ etc.}} \frown \frac{e+fy+gy^2 \text{ [etc.]}}{b+cy+dy^2 \text{ etc.}},$$

quorum in dy summa $\sqcap \int \overline{dx \frown y}$. Si ad summam tdy addatur summa xdy, habebitur area productae quantitatis. Et $\int \overline{t+x}$ semper haberi potest. Et hoc loco:

$$\int \frac{0e+1fy+2gy^2 \text{ [etc.]}, \frown b+cy+dy^2 \text{ [etc.]},, -0b-cy-2dy^2 \text{ [etc.]}, \frown e+fy+gy^2 \text{ [etc.]},, +e+fy+gy^2 \text{ [etc.]}, \frown b+cy+dy^2 \text{ [etc.]}}{\boxed{2}b+cy+dy^2 \text{ [etc.]}}$$
$$\sqcap \frac{e+fy+gy^2 \text{ [etc.]}, \frown b+cy+dy^2 \text{ [etc.]}, \frown y}{b+cy+dy^2 \text{ [etc.]}}.$$

Si $b+cx+dx^2+ex^3$ etc. $\sqcap y^z$. erit $t \sqcap \frac{zy^z}{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}$. Jam $p \sqcap \frac{y^2}{t}$. Ergo $p \sqcap \frac{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}{zy^{z-2}}$. Et quia semper $\int p \sqcap \frac{y^2}{2}$ fiet $\left[\int\right] \frac{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}{z\sqrt[z]{\boxed{2}\overline{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}}} \sqcap$

---

1 f. *Dazu am Rande:* $\int \overline{\sqrt[z]{y}}$ invenitur ex $\int \overline{x\sqrt[z]{dy}}$ vel contra.

4 redicere *L ändert Hrsg.* 17 *(1)* $\int \overline{\text{y}}$ *(2)* $\int \sqrt{\text{y}}$ in *(3)* $\int \overline{\sqrt{\text{y}}}$ invenitur | ex dato *streicht Hrsg.* | $\int \overline{\text{xd}}$ *(4)* $\int \overline{\sqrt[z]{\text{y}}}$ *L*

---

5 vel $t \sqcap$: Im Nenner der rechten Seite der Gleichung müsste $zx^z x^{-1}$ stehen. Leibniz unterläuft in Z. 15 f. ein ähnlicher Fehler, den er allerdings sofort richtigstellt. 12 loco: Auf der rechten Seite der anschließenden Gleichung müsste es $\frac{(e+fy+gy^2+\cdots)y}{b+cy+dy^2+\cdots}$ heißen.

$\frac{1}{2}\sqrt[z]{\boxed{2}\overline{b+cx+dx^2+ex^3\,[\text{etc.}]}}$.

Imo cavendum ab errore[:]

$$\int p \sqcap \int \frac{c+2dx+3ex^2\,\text{etc.} \frown \sqrt[z]{\boxed{2}\overline{b+cx+dx^2+ex^3\,[\text{etc.}]}}}{z\,\overline{b+cx+dx^2+ex^3\,[\text{etc.}]}}$$
$$\sqcap \frac{1}{2}\sqrt[z]{\boxed{2}\overline{b+cx+dx^2+ex^3\,[\text{etc.}]}}.$$

[*Rechnung ohne direkten Bezug zum Haupttext*] 5

$\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}.\ \sqcap\ y+\sqrt{x}.$ Ergo $b+\sqrt{c} \sqcap \frac{y^3 + 3y^2\sqrt{x}}{3xy \quad x} \sqcap b+\sqrt{c}.$ Ergo $9y^4x+6y^2x^2+x^3 \sqcap c.$

et $x \sqcap \frac{b-y^3}{3y}$.

5 Die Rechnung algebraischen Inhalts wurde vermutlich vor dem Haupttext der Aufzeichnung am oberen Rand des Blattes notiert. 6 $\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}.\ \sqcap\ y+\sqrt{x}$: vgl. die Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus von ca Oktober 1675, VII, 2 N. 54 S. 712.

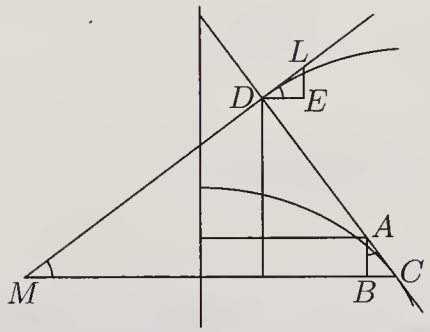
61. THEOREMA TETRAGONISTICUM MEMORABILE EX NATURA EVOLUTIONIS

Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 136. 1 Streifen von max. 39,1 x 3,4 cm mit Mittelfalz. Unregelmäßige Schnittkanten. 7 Z. Haupttext auf Bl. 136 v° (links vom Falz), Datum und Überschrift auf Bl. 136 r° (links vom Falz). Bl. 136 bildete ursprünglich den unteren Teil (abzüglich eines schmalen Streifens von max. 18,9 x 4,2 cm am unteren Rand) eines Bogens 2°; die anderen Teile sind N. 60 sowie VII, 1 N. 20 und VII, 1 N. 21.
Cc 2, Nr. 1286

Januar. 1676.

Theorema tetragonisticum memorabile ex natura evolutionis qua multae quadraturae revocantur ad dimensionem curvae unius, et ita a se invicem pendent.



[*Fig. 1*]

Sit curva evolvenda AC evolutione descripta DL. Triangulum characteristicum illius ABC, hujus DEL. anguli BAC, et EDL aequales. Tangens evolutione descriptae, LD producatur donec cuidam MBC. ordinatae ad curvam occurrat in M. Erit $\bigtriangledown MDC$ simile $\bigtriangledown^{lo}$ ABC, ergo DC, ad $MC \sqcap BC$ ad AC seu DC in $AC \sqcap MC$ in BC. Jam DC in AC. semper haberi possunt ex data curva,

---

11–13 *Daneben:* Adde nova de via Centri gravitatis.

14 *Darüber:* NB. NB.

12 multae *erg. L* 12f. ad *(1)* dimensiones curvarum, et a *(2)* dimensionem *L*

---

22 *Fig. 1*: Eine durch Zerschneiden ungültig gemachte Vorstufe zur Figur (zum Teil auf N. 60) wird nicht wiedergegeben. 23 nova ... gravitatis: N. 77.

nam si imponantur curvae, et postea in rectum extendantur terminabuntur ad lineam rectam. Ergo semper habebuntur omnes MC ad basin. Ubi jam illud praeclarum hinc sequitur, quaecunque et quomodocunque ducantur parallelae istae semper fore summas hoc modo sumtas aequales inter se. Quod sine exemplo.

62. DE PROGRESSIONIBUS ET FIGURA SEGMENTORUM. DE AEQUILIBRIO PONDERUM. DE LUNULA. DE CONCHOIDE

[Januar 1676]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 XIII 2 b Bl. 108 bis 109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 1 S. auf Bl. 108 v° gegenläufig zum Text auf Bl. 109 r°, Fig. 3c, 3d und 4 quer. Auf dem Rest des Bogens N. 63 und 64, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1675 bis Februar 1676 belegt. Das in Teil 2 von Tschirnhaus diskutierte Hebelgesetz ist auch Thema in N. 57, dort jedoch noch ohne den Hinweis auf den Beweis in Guldins *Centrobaryca*. N. 62 dürfte demnach nach N. 57 entstanden sein. N. 62 wurde vermutlich als erstes auf dem Bogen notiert, N. 63 ist vor N. 64 geschrieben. Die in N. 64 angekündigte Mitteilung der Quadraturmethode von Bertet für die Reziproken der Parabeln (Antiparabeln) hat Leibniz am 9. Februar 1676 erhalten (III, 1 N. 76). Mit der Quadratur der Reziproken der Parabeln befasst Leibniz sich in N. 65, dat. Januar 1676, das kurz nach N. 64 entstanden sein dürfte.

[*Teil 1*]

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{x^3}{xx-aa}\left(x+\frac{aa}{x}+\frac{a^4}{x^3}+\frac{a^6}{x^5}\right.$$

$$\begin{array}{l} x^3 + aax + \frac{a^4}{x} \\ - aax - \frac{a^4}{x} \end{array}$$

$$\frac{x}{1-y}\ \Big|\quad xy \not\sim \frac{aa}{x}$$

$$y \not\sim \frac{aa}{xx}$$

$$\frac{a}{1-y}\ \Big|\quad a+b \qquad ay \not\sim b$$

$$y \not\sim \frac{b}{a}$$

20 $+\mathrm{aax}+\mathrm{a}^4\mathrm{x}$ *T ändert Hrsg.* 21 $-\mathrm{aax}-\mathrm{a}^4\mathrm{x}$ *T ändert Hrsg.*

$$\frac{a}{1-\frac{b}{a}} \qquad \frac{\frac{a}{1} \quad \frac{a-b}{a}}{\frac{aa}{a-b}} \qquad \frac{\frac{xx}{} \quad \frac{x-\frac{aa}{x}}{\frac{xx-aa}{x}}}{\frac{x^3}{xx-aa}}$$

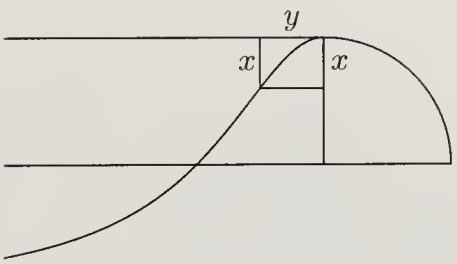
2+2

1+1+1+1

$$\frac{1}{1-1} \not\sim \qquad \frac{1}{2-1} \not\sim \qquad \frac{2}{4-2}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \qquad \frac{1}{3-2} \not\sim$$

$$\frac{4}{2-2}$$



[*Fig. 1, Tschirnhaus*]

[*Tschirnhaus*]

$$x \not\sim \frac{2ayy}{aa+yy}$$

$$\frac{\cancel{2ayy}}{yy+aa} \left(2a - \frac{2a^3}{yy} + \frac{2a^5}{y^4} \right.$$

[*Leibniz*]

$$\frac{a^5}{y^4+a^4} \sqcap x$$

---

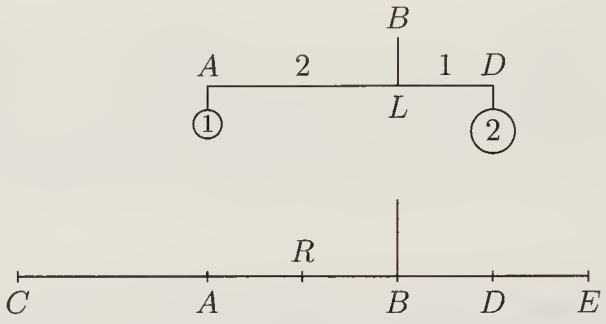
4 f. *Nebenbetrachtung:* 1+1+1 0 ⟨1⟩

$$\frac{1}{1-1}$$

9 *Darunter, Leibniz:* 0 4

[*Teil 2*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 2*]

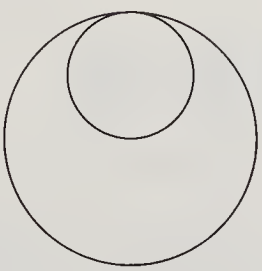
$RA \dashv\vdash RD \dashv EB \dashv\vdash BC$

$\wp$ 1 pond: $\wp$ 2 pond:

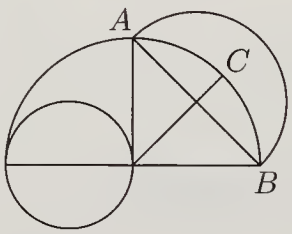
$DB \dashv\vdash BA$

[*Teil 3*]

[*Tschirnhaus oder Leibniz*]



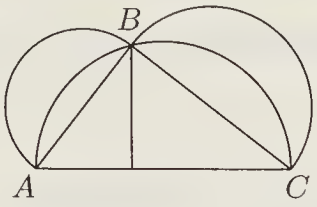
[*Fig. 3a*]



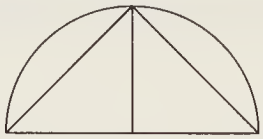
[*Fig. 3b, Tschirnhaus*]

3 *Innerhalb der Figur, Leibniz:* Guldinus demonstrat facile, quod pondera distantiis reciproce proportionalia in aequilibrio.

3 *Fig. 2*: vgl. E. W. v. Tschirnhaus, *Medicina mentis*, 1687, S. 106–108. 10 demonstrat: s. P. Guldin, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. 1, S. 33–35.



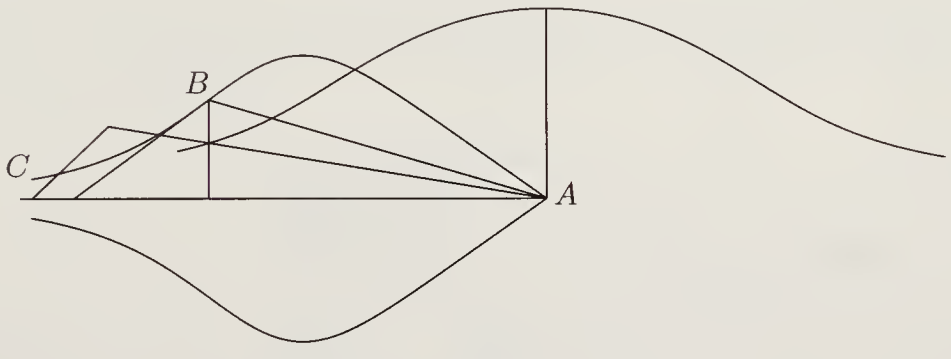
[*Fig. 3c, Tschirnhaus*]



[*Fig. 3d*]

[*Teil 4*]

[*Tschirnhaus und Leibniz*]

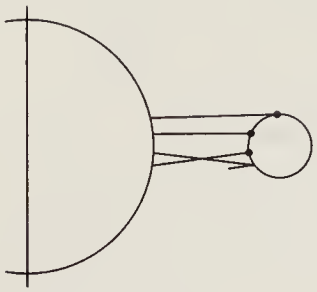


[*Fig. 4*]

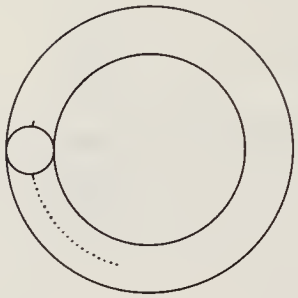
4 *Schräg innerhalb der Figur, Leibniz:* Curva Slusii ubi tangentium ejus methodus.

1 *Fig. 3c, Fig. 3d*: Die beiden Figuren sind quer zum Text und den vorhergehenden Figuren notiert. 4 *Fig. 4*: Die Figur verläuft quer. Die Punktbezeichnung B stammt von Tschirnhaus, die übrigen Punktbezeichnungen sind von Leibniz rechtläufig eingetragen. 5 Slusii: s. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 117–130 als Anwendung der Tangentenmethode, dargestellt in *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

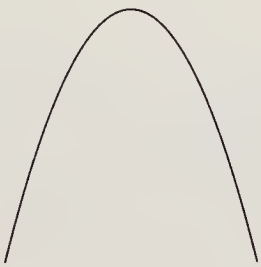
[*Figuren ohne eindeutigen Bezug, Tschirnhaus oder Leibniz*]



[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

2f. *Fig. 5 ... Fig. 7*: Fig. 5 und 7 durchdringen einander (Entstehungsreihenfolge nicht zu ermitteln) und stehen am linken Rand oberhalb der querlaufenden Fig. 4. Fig. 6 befindet sich am rechten Rand oberhalb von Teil 2.

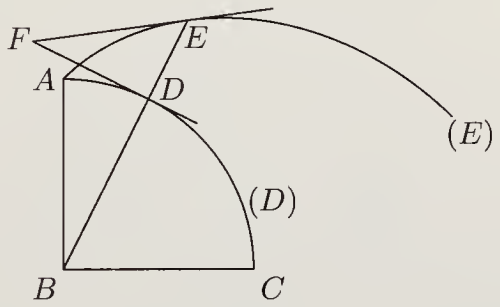
63. DE LA BEAUTÉ DES THÉORÈMES

[Januar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 b Bl. 108–109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 12 Z. auf Bl. 109 v°. Auf dem Rest des Bogens N. 62 u. 64, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 1118

Datierungsgründe: s. N. 62.

Les theoremes ne sont pas intelligibles que par leurs signes ou caracteres. Les images sont une espece des caracteres. Quand les caracteres peuvent estre semblables aux choses, tant mieux. La beauté des theoremes consiste dans le bel arrangement de leur caracteres. J'en donneray un exemple[:]



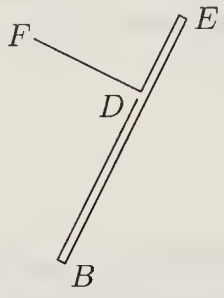
[*Fig. 1*]

Le Pere Berthet s'est imaginé une ligne $AE(E)$, dont la nature est telle. Soit ADC arc de cercle, dont le centre B. Prolonguons le rayon BD, jusque en E, jusque à ce que DE soit égale à l'arc AD. Faisant la mesme chose en tout autre point de l'arc comme (D) et nous aurons la courbe $AE(E)$. J'ay trouvé un Theoreme joli, pour donner les tangentes de cette Courbe; Du point donné E, de la courbe, menez une droite au centre du cercle generateur, qui coupera sa circonference en D, menez la touchante du cercle

16 AC *L ändert Hrsg.*

14 Berthet: vgl. die Erl. zu N. 45 S. 317 Z. 7. 17 J'ay trouvé: vgl. *a. a. O.* die Erl. zu S. 318 Z. 6.

DF, prolonguée du costé d'A, jusque à ce que FD soit à DE, comme EB à BD, et joignant FE ce sera la touchante. Cela sert aussi à retenir, car on ne quitte pas la plume, et cette proposition a quelque chose de continu, comme il paroist par les traits que j'ay adjoutez:



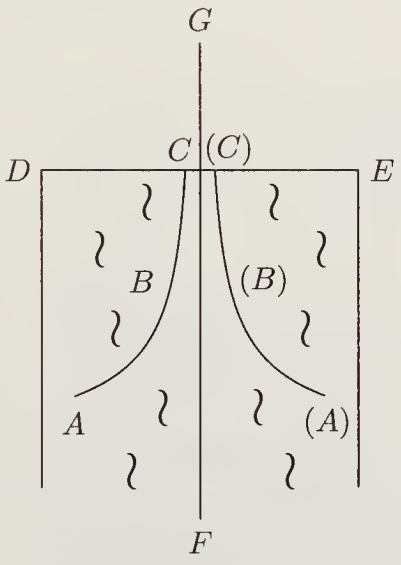
[*Fig. 2*]

64. L'ANTIPARABOLE DE BERTET

[Januar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 b Bl. 108–109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 12 Z. auf Bl. 109 v°. Auf dem Rest des Bogens N. 62 u. 63, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 1114 A

Datierungsgründe: s. N. 62.



[*Fig. 1*]

Le P. Berthet me donnera sa demonstration pour faire voir quelle est la ligne ABC. ou $(A)(B)(C)$ quand l'eau passe par un canal estroit $C(C)$ d'un bouchon DE. Il y a une partie de l'eau qui va viste, et une autre qui a peu de mouvement, separées par la ligne ABC, *vel* (ABC) dont les ordonnées sont reciproques à celles de la Parabole sur l'axe, c'estadire en raison soubsdoublée reciproque. C'est pourquoy le pere Berthet l'appelle *Antiparabolam*. Son Asymptote est FG, qui passe entre [les] deux. Le pere Fabri

15 deux. *(1)* Mons. l'Abbé *(2)* je viens un matin à Mons. l'Abbé *(3)* Le *L*

13 reciproques: vgl. N. 65 sowie *LQK* S. 53. 16 Mons. l'Abbé: nicht ermittelt.

touche cela dans un de ses dialogues, cela donna occasion au pere Berthet, d'en chercher la quadrature. Et n'ayant jamais entendu parlé de Mons. Wallis, il prit une assez belle voye, coupant l'axe, ou icy l'asymptote en parties proportionnelles, ou Geometriques, il demonstra par là la quadrature de toutes ces courbes. Il me le fera voir plus particulierement.

3 belle | voix *ändert Hrsg.* | *(1)* inscribant *(2)* coupant *L* 4 demonstra *(1)* qve ces parties sont *(2)* par *L*

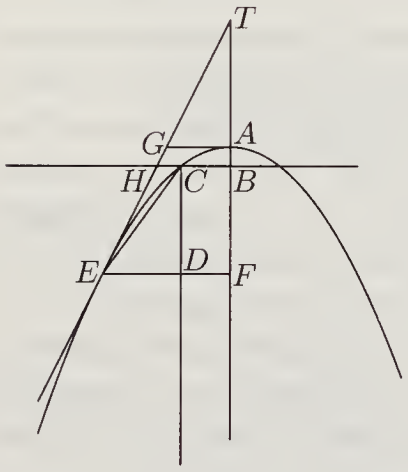
1 dialogues: Bertets Überlegungen wurden vermutlich veranlasst durch H. FABRI, *Dialogi physici*, [Tl 1], 1665, S. 126–130, und sind dargestellt in H. FABRI, *Dialogi physici*, [Tl 2], 1669, S. 427 f.
2 Wallis: Leibniz bezieht sich auf die Quadratur der höheren Hyperbeln in J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 76 f. bzw. *Mechanica* 1670–1671, S. 165–189 (*WO* I S. 408 f. bzw. 679–693); vgl. auch den Briefwechsel zwischen Bertet und Wallis vom Dezember 1671, gedr. in J. WALLIS, *A Treatise of Algebra*, 1685, S. 355–362 (*WO* II S. 410–417). 4 fera voir: Bertet legte Leibniz seine Methode am 9. Februar 1676 dar; s. III, 1 N. 76.

65. SUMMA RECIPROCORUM PARABOLAE
Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 318. 1 Ausschnitt von max. 19,4 x 6,0 cm. 1 S. auf Bl. 318 r°. Bl. 318 v° leer. Bl. 318 bildete ursprünglich den oberen Teil eines vollständigen Bl. 2° (zusammen mit N. 66 und VII, 1 N. 22).
Cc 2, Nr. 1284

Januar. 1676

Summa Reciprocorum parabolae



[*Fig. 1*]

$AB \sqcap b$. $CB \sqcap c$. $AF \sqcap x$. $EF \sqcap \sqrt{2ax}$. $CD \sqcap z$. Ergo $AF \sqcap x \sqcap z+b$. Ergo $EF \sqcap \sqrt{2az+2ab}$ et $ED \sqcap \sqrt{2az+2ab}-c$. $AG \sqcap \frac{EF}{2}$. $AT \sqcap x$. $TB \sqcap x+b \sqcap z+2b$. $\frac{TB}{TA} \sqcap \frac{HB}{AG}$ et $HB \sqcap \frac{z+2b, \widehat{\ } \sqrt{2az+2ab}}{z+b} \sqcap \frac{\overline{z+2b}\sqrt{2a}}{\sqrt{z+b}}$ sive $HB \sqcap \sqrt{2az+2ab}+\frac{b\sqrt{2a}}{\sqrt{z+b}}$ et $HC \sqcap \sqrt{2az+2ab}+\frac{b\sqrt{2a}}{\sqrt{z+b}}-c$. Quorum datur summa, aequatur enim illa duplo segmento CEC. Datur ergo et summa omnium $\frac{1}{\sqrt{z+b}}$ seu reciprocorum parabolae, quod tamen dudum notum. Datur et omnes $\frac{z}{\sqrt{z+b}}$ vel omnes $\frac{x-b}{\sqrt{x}} \sqcap \sqrt{x}-\frac{b}{\sqrt{x}}$.

7 Januar. 1676 *erg. L* 8 Summa ... parabolae *erg. L*

8 Summa ... parabolae: vgl. N. 64 sowie *LQK* S. 53. 12 $HB \sqcap$: Auf der rechten Seite fehlt im Nenner ein Faktor 2. Leibniz rechnet konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

66. DE PERPENDICULARIBUS ET TANGENTIBUS CURVARUM

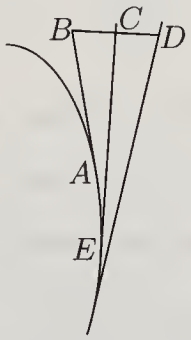
Januar 1676

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 93. 1 Ausschnitt von max. 19,0 x 8,3 cm. 1 S. auf Bl. 93 r°. Bl. 93 v° leer. Bl. 93 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines vollständigen Bl. 2° (zusammen mit N. 65 und VII, 1 N. 22).
Cc 2, Nr. 1285

Januar. 1676.

Datae curvae perpendiculares ita producere ut fiant alterius curvae perpendiculares, videtur ad calculum ducere qui non sit in potestate seu tetragonisticum, sed aliunde scimus quomodo id fieri queat, et ita solvetur hoc modo calculus tetragonisticus ille. Eodem modo ita ducere perpendiculares ut fiant alterius curvae tangentes seu minimae quae ad eam ex dato puncto duci possint.

Datas tangentes ita producere ut fiant alterius curvae perpendiculares ducit ad calculum tetragonisticum. Is perinde ac prior vane iniri poterit, tum summam ineundo elementorum curvae, tum etiam ducendo ex unius tangentis AB extremo B, perpendiculares ad EC, BCD, tertiae tangenti occurrentem in D, et ex D faciendo idem quod ex B, pro sequentibus tangentibus.



[*Fig. 1*]

Nota hac methodo inveniuntur ejusmodi curvae quaesitae, cujus puncta C. sed mechanice, ita ut polygonum inveniatur ei valde vicinum, etsi non ullum ejus verum punctum, ut in quadratrice.

Non possunt omnes tangentes unius curvae esse et tangentes alterius curvae, quia non se possunt plus semel secare rectae.

7 Januar. 1676. *erg. L* 15 AB *erg. L* 15 f. extremo | A *ändert Hrsg.*|, perpendiculares *L* 16 in | B *ändert Hrsg.*|, et *L* 17 ex | A *ändert Hrsg.*|, pro *L* 19 ut *(1)* curva inveniatur *(2)* polygonum *L*

12 minimae: Leibniz meint vermutlich maximae; vgl. jedoch die Erl. zu S. 449 Z. 20–23.

67. TANGENTIUM CALCULUS

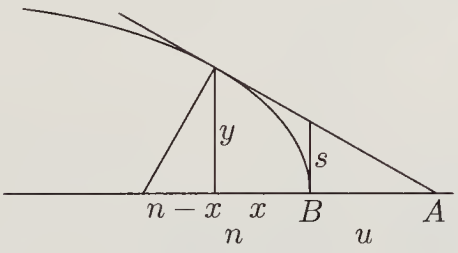
[8. – 29.] Februar 1676

Die Gesprächsaufzeichnung N. 67_1 und die Aufzeichnung von Leibniz N. 67_2 stehen in engem inhaltlichem und äußerem Zusammenhang. Die beiden Blätter bildeten ursprünglich ein vollständiges Blatt 2°, auf dessen Vorder- und Rückseite Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs Notizen schrieben. Zuerst entstanden sind auf der Vorderseite Aufzeichnungen zur harmonischen und zur arithmetischen Reihe (VII, 3 N. 55), die auf Februar 1676 datiert sind und Bezug nehmen auf VII, 3 N. 54 vom 8. Februar 1676. Darunter und auf der Rückseite ist N. 67_1 notiert. Leibniz hat dann auf dem unteren, frei gebliebenen Viertel der Vorderseite die Überlegungen zur Tangentenrechnung vertieft und schließlich abgetrennt (N. 67_2).

67_1. NOTAE

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 253. Ca 3/4 Bl. 2°. Figur und 5 Zeilen am unteren Rand von Bl. 253 r° und ca 1/2 S. auf Bl. 253 v°. Auf dem Rest von Bl. 253 r° VII, 3 N. 55.
Cc 2, Nr. 1334 tlw., 00

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

$$x^3 \quad \wp\, y^3 + fyy + gy + h$$

$$u \quad \wp\, \frac{1y^3 + 2fyy + 3gy}{h + 2gy + 3fyy}$$

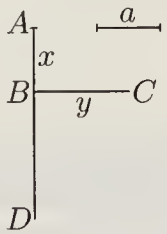
$$x^3 \quad + pxx \quad + qx \quad + r \quad \wp\ 0$$

$$\cancel{+1} \qquad \cancel{0 \quad -1}$$

10 6 3 1

---

18 $u \wp \dfrac{1y^3 + 2fyy + 3gy}{h + 2gy + 3fyy}$: Falls die Rollen von x und y nicht nur in der Kurvengleichung Z. 17, sondern auch in Fig. 1 vertauscht wären, müsste sich nach Tschirnhaus' Tangentenregel für den Subtangentenabschnitt u der Ausdruck $\dfrac{3h + 2gy + fy^2}{g + 2fy + 3y^2}$ ergeben; andernfalls wäre $u = \dfrac{3h + 2gy + fy^2}{3(y^3 + fy^2 + gy + h)^{\frac{2}{3}}}$ das korrekte Resultat. Vgl. Erl. zu N. 49 S. 347 Z. 13.



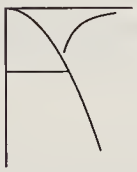
$x \mathrel{\wp} y$

$xx \mathrel{\wp} ay$ $\qquad$ $xx \mathrel{\wp} ay + yy$

$xx \mathrel{\wp} ay - yy$

$xx \mathrel{\wp} aa - ay$

[*Fig. 2*]



$x^3 \mathrel{\wp} ayy$ $\qquad$ $x^4 \mathrel{\wp} ay^3$

$x^3 \mathrel{\wp} aay$ $\qquad$ $x^4 \mathrel{\wp} aayy$

$x^4 \mathrel{\wp} a^3y$

[*Fig. 3*]

[*Leibniz*]

$$x^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + l \sqcap 0$$

$$x^3 \boxed{\begin{array}{l} + by \\ + e \end{array}} x^2 \boxed{\begin{array}{l} + cy^2 \\ + fy \\ + h \end{array}} x \boxed{\begin{array}{l} + dy^3 \\ + gy^2 \\ + ky \\ + l \end{array}} \sqcap 0$$

---

2 *Über* $xx \mathrel{\wp} ay + yy$: $\quad a + y$ $\qquad$ *Darüber, am oberen Papierrand:* $a \langle - \rangle y$

$a - y$

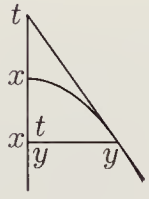
5 *Oberhalb der Figur, gestrichen:* $\overset{b}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}$

7 *Links neben* $x^4 \mathrel{\wp} aayy$: $\quad xx \mathrel{\wp} ay$

67_2. TANGENTIUM CALCULUS

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 391. Ca 1/4 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 391 r°. Bl. 391 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Tangentium calculus



[*Fig. 4*]

$$y^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f \sqcap 0$$

$$\begin{array}{llll} 2y^2 & + \; bx\,y \sqcap & -2cxt - & d\,t. \\ & [+] \;\; e\,. & & -\,by\,. \end{array}$$

Erit $cx^2 \sqcap cx \dfrac{\odot}{\begin{array}{c}-2y^2 - bty - dt \\ -\,e\,.\end{array}} \smile \dfrac{☽}{by + 2ct} \sqcap \underbrace{-bxy - dx}_{♀x} \underbrace{-ey - f - y^2}_{-☿}$. Erit $\dfrac{c \odot x}{☽} \sqcap$ $♀x - ☿$. et $\dfrac{☿☽}{♀ - c\odot} \sqcap x \sqcap \dfrac{\odot}{☽}$ et fiet denique: $☿☽^2 \sqcap ♀\odot - c\odot^2$.

$$\begin{array}{rrrrrr} ☽^2 \sqcap & & b^2\,y^2 + & 4bct\,y + & 4c^2t^2 & \\ ☿ \sqcap & - & y^2 - & e\,y - & f & \\ \hline & - & b^2 f\,y^2 - & 4bctf\,y - & 4c^2t^2 f & \\ & - \; b^2 e\,y^3 - & 4bcte\,.. & - \; 4c^2t^2 e\,. & & \\ - \; b^2 y^4 - & 4bct\,... & - \; 4c^2t^2 e\,.. & & & \end{array} \Bigg\} \sqcap ☿☽^2.$$

5 Tangentium calculus *erg. L* 10 $☿☽^2$ *(1)* $\sqcap ♀\odot -$ *(2)* $+ ♀\odot +$ *(3)* $\sqcap ♀\odot - c\odot^2 \mid \sqcap 0$ *streicht Hrsg.* | *L*

---

10 $\dfrac{☿☽}{♀ - c\odot} \sqcap x$: Richtig wäre $\dfrac{☿☽}{♀☽ - c\odot} \sqcap x$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die anschließenden Rechnungen.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
+\odot\sqcap & - & 2\,y^2 & - & bt\,y & - & dt \\
 & & & - & e\,. & & \\
\text{♀}\sqcap & & & - & b\,y & - & d \\
\hline
 & + & 2d\,y^2 & + & 2btd\,y & + & d^2t \\
 & & & + & ed\,. & & \\
\odot\text{♀}\sqcap & & & & & & \\
 & + & 2by^3 & + & b^2t\,.. & \boxed{+\ btd}\,. & \\
 & & & + & be\,.. & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\odot^2\sqcap & 4y^4 & + & 4bt\,y^3 & + & 4dt\,y^2 & + & 2bt^2d\,y & +d^2t^2 \\
 & & + & 4e\,... & + & b^2t^2\,.. & + & 2edt\,. & \\
 & & & & + & 2bte\,.. & & & \\
 & & & & + & e^2\,.. & & &
\end{array}
$$

Ergo pro $\text{♀}\odot - c\odot^2 - \text{☿}\,☽^2 \sqcap 0$. fiet:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
0\sqcap & + & b^2\,y^4 & + & b^2e\,y^3 & + & b^2f^2\,y^2 & + & 4bctf\,y & + & 4c^2t^2f \\
 & - & 4c\,. & + & 4bct\,. & + & 2\,\textcircled{4}\,bcte\,. & + & 4c^2t^2e\,. & - & cd^2t^2 \\
 & & & - & 4cbt\,. & + & 4c^2t^2e\,. & - & 2cbt^2d\,. & + & d^2t \\
 & & & - & 4ce\,. & - & 4dtc\,. & - & 2cedt\,. & & \\
 & & & + & 2b\,. & - & b^2t^2c\,. & + & 2btd\,. & & \\
 & & & & & \boxed{-\ 2btec}\,. & & - & ed\,. & & \\
 & & & & & - & e^2c\,. & & & & \\
 & & & & & + & 2d\,. & & & & \\
 & & & & & + & b^2t\,. & & & & \\
 & & & & & + & be\,. & & & &
\end{array}
$$

Ut calculus facilior pro altioribus continuetur; datam aequationem prius explicando ita formemus, ut altissimo (uno demto) ex ipsius y termini tollantur, et facilius veniemus ad progressionem eamque simpliciorem.

68. DE TANGENTIBUS ET SPECIATIM FIGURARUM SIMPLICIUM [Februar – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 17 Bl. 1–6. 3 Bog. 2°. Ca 11 1/4 S. Bogenmarkierungen (2) – (4). Bogen mit Markierung (1) nicht gefunden. Auf Bl. 2 v° u. 3 r° spätere Zusätze. — Auf dem unteren Drittel von Bl. 6 r° Aufzeichnungen und Rechnungen zur arithmetischen Kreisquadratur (Cc 2, Nr. 1488 tlw.; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1488 tlw.

Datierungsgründe: Die Untersuchungen N. 68 u. 69 sind vermutlich kurz nacheinander entstanden, N. 69 setzt Überlegungen von N. 68 fort (vgl. die Erl. zu S. 453 Z. 2 u. S. 472 Z. 22). Das Wasserzeichen der ersten beiden Bögen von N. 68 ist mehrfach für Februar 1676 belegt, das des dritten Bogens von März bis August 1676, das von N. 69 von Januar bis August 1676. Die beiden Texte stehen in Zusammenhang mit der Ausarbeitung der Abhandlung zur Kreisquadratur und sind teilweise inhaltlich in diese eingegangen (vgl. *LQK* prop. XV S. 49–58), N. 68 ist von Leibniz aber als selbstständige Studie mit eigener Überschrift konzipiert worden. Die Untersuchung ist vor der Fassung Cc 2, Nr. 1233 C der Kreisquadratur anzusetzen, wie sich z. B. an der Verwendung des Satzes von Ricci erkennen lässt: Leibniz notiert ihn am Ende von N. 68, in Cc 2, Nr. 1233 C (vgl. LH 35 II 1 Bl. 154) ist der Satz bereits in den Text integriert und ersetzt teilweise Leibniz' vorhergehende Überlegungen. Das Wasserzeichen des Papiers von Cc 2, Nr. 1233 C ist für den 8. Juni 1676 belegt, N. 68 u. 69 dürften daher zwischen Februar und Juni 1676 entstanden sein.

De Tangentibus et speciatim figurarum simplicium

T a n g e n t e m ad curvam ducit, qui a puncto dato m a x i m a m ad curvam ducit; et contra.

P e r p e n d i c u l a r e m ad curvam ducit, qui a puncto dato m i n i m a m ad curvam ducit, et contra.

---

20 *Über* m a x i m a m : Error.

19 et speciatim *erg. L* 20 | F i g u r a m s i m p l i c e m voco *(1)* qvae *(2)* cum natura curvae eius *(a)* una *(b)* aeqvatione duorum terminorum exprimi potest. *gestr.* | T a n g e n t e m *L*

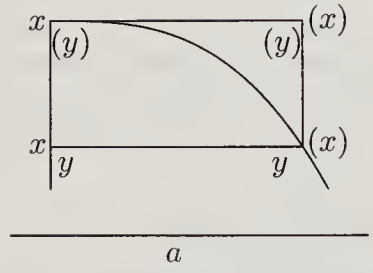
20–23 T a n g e n t e m ... contra: Die Behauptungen sind i. Allg. nicht richtig. Leibniz bemerkt den Irrtum in der ersten Aussage später und markiert die Stelle mit Error, verbessert aber nicht im Text. Vgl. dazu die Diskussion um die Fermatsche Tangentenmethode in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178).

Tangentem seu Maximam ducere est rectam ducere quae curvam tangit. Perpendicularem seu Minimam ducere, est Circulum describere qui curvam tangit. Quaerendum est eodem modo quale problema solvere sit, Parabolam describere, quae curvam tangat, aut Hyperbolam et ita porro.

Interea illud patet si rectam invenerimus quae curvam datam tangat, tunc facile aliam quoque curvam notarum tangentium describemus quae curvam datam tangat. Et vicissim, si Curva notarum tangentium, datam curvam tangens habeatur, etiam recta datam curvam tangens facile habebitur, quia recta quae duarum curvarum, se tangentium unam in puncto contactus tangit, etiam alteram tanget. Hoc jam usui erit ad figurarum tangentes gradatim inveniendas, ac progressiones obtinendas, dum scilicet inferior superiori auxilio esse potest. Hujus Specimen in Figuris Simplicibus tentemus.

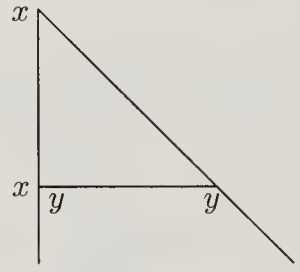
F i g u r a m S i m p l i c e m voco, cujus curvae natura aequatione duorum terminorum exhiberi potest.

(1)



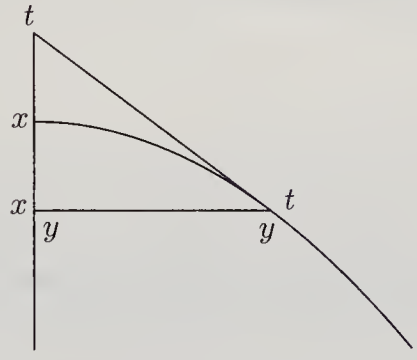
[*Fig. 1*]

(2)

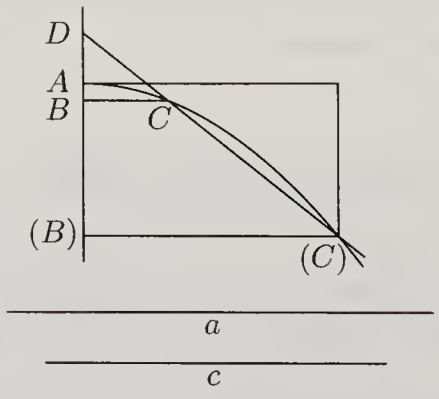


[*Fig. 2*]

(3)



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

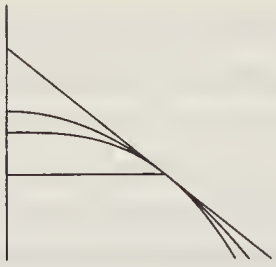
1 seu Maximam *erg. L* 1 f. Perpendicularem *(1)* Curvae *(2)* seu *L* 6 f. notorum *L ändert Hrsg. zweimal* 9 usui *(1)* potest | esse *erg.* | *(2)* erit *L*

Ut $a^z x^v \sqcap y^{z+v}$ vel $a^{z+v} \sqcap x^z y^v$. fig. 1. Simplicissima omnium Curvarum Simplicium est r e c t a , quae est tangens sibi ipsi. Ejus aequatio $y \sqcap x$. fig. 2. Proxima est p a r a b o l a , cujus aequatio esto $ax \sqcap y^2$. Et quaeritur tangens t. fig. 3. Quam ut quaeramus ponamus in fig. 4 Verticem parabolae esse A. Axem $AB(B)$. Curvam $AC(C)$. quam recta $DC(C)$ in duobus punctis $C.(C)$. secat. Sit AB vel $A(B) \sqcap x$. BC, vel $(B)(C) \sqcap y$. $AD \sqcap b$. Parameter Parabolae, a. Et ratio DB ad BC sit quae c ad a. Habebimus aequationes duas. Unam: $y^2 \sqcap ax$. ad Parabolam; alteram vero $\overline{b+x}\,\frac{a}{c} \sqcap y$ ad lineam rectam. Unde pro x in posteriore substituendo ejus valorem e priore, fiet: $ab+y^2 \sqcap cy$. et quaeritur y omnium possibilium maxima. Scribamus $y^2 - cy + \frac{c^2}{4} \sqcap \frac{c^2}{4} - ab$. et pro $\dagger y \ddagger \frac{c}{2}$ ponamus ω, fiet $\omega^2 \sqcap \frac{c^2}{4} - ab$ et $\omega \sqcap \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \sqcap \dagger y \ddagger \frac{c}{2}$ et $y \sqcap \frac{c}{2} \dagger \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \sqcap \frac{c}{2} \ddagger \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab}$. Ergo $\sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \sqcap 0$. Ergo $c \sqcap 2y$. et $b \sqcap \frac{c^2}{4a} \sqcap \frac{4y^2}{4a} \sqcap \frac{y^2}{a} \sqcap x$. Ergo $b \sqcap x$. seu $AD \sqcap AB$. Notabilis haec via qua se natura ex calculo expedit. Si quaesivissemus tollere y. habuissemus $x^2 + 2bx + b^2 \sqcap \frac{c^2}{a^2} \not\sqcap x$. Fiet eodem modo: $b \sqcap x$.

Sit alia Curva Parabola scilicet cubica, $a^2 x \sqcap y^3$, quam tangat Parabola $ax + ad \sqcap \langle c \rangle y^2$. Fiet: $y^2 \sqcap x + d \sqcap \frac{ac}{y}$. Et quia $b \sqcap x + d$ [*bricht ab*]

10 − ab *(1)* Qvae ut sit omnium possi *(2)* et *L* 11 f. AD ⊓ AB. | *(1)* Memorabili *(2)* Notabilis ... expedit *erg.* | *(a)* Sit alia curva, Parabola scilicet cubica, $a^2x \sqcap y^3$. Qvam tangat *(aa)* $bx \sqcap y^2$ *(bb)* $bx + c \sqcap y^2$ *(b)* Si *L* 14 f. ax+ *(1)* ab ⊓ *(a)* y^2 fiet: $y^2 \sqcap x + b \sqcap$ *(aa)* $\frac{a^2}{x}$ *(bb)* $\frac{a^2}{y} \sqcap x^2 + bx \sqcap a^2$ *(b)* $\langle c \rangle y^2$ fiet: $y^2 \sqcap x + b \sqcap \frac{ac}{y} \sqcap x^2 + bx \sqcap a^2 c$ *(aa)* Qvae cum [uti supra $\overline{b+x}\frac{a}{c} \sqcap y \sqcap$ *(bb)* | Et *streicht Hrsg.* | *(aaa)* $\overline{x + \langle d \rangle}\frac{a}{c}$ *(bbb)* $\overline{b+z}\frac{a}{c} \sqcap y$. *(ccc)* rec *(ddd)* | recta *streicht Hrsg.* | $\overline{\overline{b + \frac{a^2 + xa}{e}}\,\frac{a}{}}$ *(cc)* et qvia $b \sqcap x$. et $c \sqcap 2y$. fiet: $\not 2xa \sqcap \not 2y^2$ *(2)* ad $\sqcap \langle c \rangle y^2$ *L*

14 tangat Parabola: Der Ansatz ist verfehlt. Leibniz bemerkt dies nach mehreren Rechenversuchen, die er nur unvollständig durchführt, und setzt im folgenden Absatz neu an.



[*Fig. 5*]

Video jam rectius sic assurgi: Aequatio ad rectam $y \sqcap \frac{a}{b}x$. Aequatio ad Parabolam $y^2 \sqcap x + c$. Ergo $x + c \sqcap \frac{a^2}{b^2}x^2$. sive: $a^2x^2 \sqcap b^2x + b^2c$. Et $x^2 - \frac{b^2x}{a} + \frac{b^4}{4a^2} \sqcap \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2c}{a}$. Erit $\frac{b^4}{4} + b^2c \sqcap 0$. seu $x \sqcap \frac{b^2}{2a^2}$ et $c \sqcap -\frac{b^2}{4a}$ et $x + c \sqcap \omega$ fiet $\frac{b^2}{2a^2} \sqcap \omega$ et $-\frac{b^2}{4a}$, sive $c \sqcap -\frac{\omega}{2}$.

Aequatio ad Parabolam cubicam erit: $\frac{y^3}{a^2} \sqcap x + e$. sive $y^2 \sqcap \frac{a^2}{y}\overline{x+e} \sqcap x + c$. et quia $y \sqcap \frac{a}{b}x$. erit $b\overline{x+e} \sqcap x^2 + cx$. Adeoque $x \sqcap c - \frac{b}{2}$ et $c^2 - 2bc + b^2$, $+be \sqcap 0$ vel $x \sqcap \frac{2c-b}{2}$. et $x^2 - \frac{3}{4}c^2 + be \sqcap 0$. Jam $c \sqcap -\frac{b^2}{4a}$. Ergo $x \sqcap c - \frac{b}{2} \sqcap -\frac{b^2}{4a} - \frac{b}{2} \sqcap \frac{+b^2+2ab}{-4a}$

$\overline{2c-2xe}$

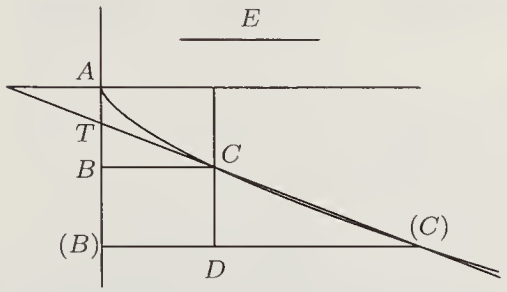
et $\frac{b^3 + 4b^2a + 4a^2b}{-16a^2} \sqcap e$. et $+4ab^2 + 8a^2b + b^3 + 4b^2a + 4a^2b + 16a^2\omega \sqcap 0$.

2 y ⊓ *(1)* $\frac{b}{a}$x. Aeqvatio ad Parabolam ⊓ y^2 ⊓ $\frac{b}{a}x + \frac{b}{a}c$ | Jam hoc *erg.*| ⊓ *(a)* $\frac{b^2}{x^2}$ *(b)* $\frac{b}{a^2}x$. *(aa)* sive *(bb)* Ergo *(aaa)* $a^2x + a^2c \sqcap bx^2$ *(bbb)* $\frac{a^2x + a^2c}{b} \sqcap x^2$ *(2)* $\frac{a}{b}$x *L* 6 $+be \sqcap 0$. *(1)* et a *(2)* Nondum satis bene incepisse videor, ad continuandam in infinitum progressionem Video tamen qvomodo sit incipiendum, scilicet $y \sqcap \frac{a}{b}x$. *(a)* Explicet *(b)* In reliqvis omittatur d. f. etc. *(aa)* $\overline{x+e}\langle\!-\!\rangle$ *(bb)* $x + e \sqcap (\omega)$ Ergo $c - \frac{b}{2} - \frac{c^2}{b} + 2c - b \sqcap (\omega)$ *(3)* vel *L*

$\overline{\frac{b^2}{4}}$ $\overline{\frac{b^2}{2}}$

6 erit: Auf der linken Seite der folgenden Gleichung fehlt der Faktor a. Weitere Unstimmigkeiten beeinträchtigen die Rechnung bis S. 453 Z. 1.

$b^3 \boxed{+4b^2a} \boxed{+4a^2b} \sqcap -16a^2e \sqcap b^3 \boxed{+4b^2a} \boxed{+4a^2b} + 4ab^2 + 8a^2b + 16a^2\omega$. Sed haec diligentius alias, aperto jam aditu. Credo enim hac arte veram et generalem tangentium progressionem posse detegi.



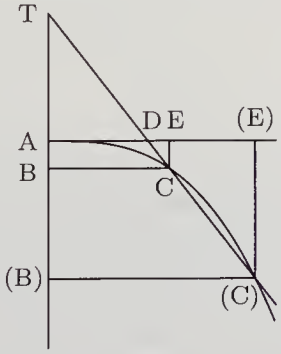
[*Fig. 6*]

Sit Curva cujus natura $\frac{y^z}{a^{z-1}} \sqcap x$. $AB \sqcap y$. $BC \sqcap x$. TC tangens. Calculus haec docet: $zt, y^{z-1} \sqcap x, a^{z-1}$ et $t \sqcap \frac{xa^{z-1}}{z, y^{z-1}} \sqcap \frac{\frac{y^z}{a^{z-1}} \frown a^{z-1}}{z, y^{z-1}}$. Ergo $t \sqcap \frac{y}{z}$.

Demonstrare ita quaeramus: Ostendendum est si sit $AT \sqcap \frac{AB}{z}$. totam $TC(C)$ cadere extra curvam, $AC(C)$ quam supponimus ad easdem partes cavam.

Cadat si fieri potest intra curvam, eamque secet in duobus punctis C. (C) ex quibus demittantur rectae $CB, (C)(B)$ in axem et sit $B(B) \sqcap \omega$. $AB \sqcap y$. Erit $A(B) \sqcap y + \omega$ et ex natura curvae $(B)(C) \sqcap \frac{y^z + \frac{z}{1}y^{z-1}\omega + \frac{z, z-1}{1,2}y^{z-2}\omega^2 \text{ etc.}}{a^{z-1}}$. Unde auferendo $BC \sqcap (B)D$. restabit $\frac{\frac{z}{1}y^{z-1}\omega + \frac{z, z-1}{1,2}y^{z-2}\omega^2 \text{ etc.}}{a^{z-1}} \sqcap D(C)$. et erit

3–5 detegi. *(1)* ⟨paribus⟩ moneo eandem *(2)* Sit *(a)* aeqvatio *(b)* Curva cuius natura *(aa)* $a^z x^v \sqcap y^{z+v}$ *(bb)* a *(cc)*



$\frac{y^z}{a^{z-1}} \sqcap x$ *(aaa)* AB ⊓ x. BC ⊓ y *(aaaa)* Dem *(bbbb)* Demonstrandum est | esse *erg.* | TB ⊓ zx DE *(bbb)* AB ⊓ y *L*

2 alias: s. u. S. 471 Z. 14 – S. 472 Z. 22 sowie N. 69 S. 481 Z. 6–21. 9 *Fig. 6*: Eine weitere gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

$$\frac{D(C)}{\omega} \sqcap \frac{\frac{z}{1}y^{z-1} + \frac{z, z-1}{1,2}y^{z-2}\omega \text{ etc.}}{a^{z-1}} \sqcap \frac{(B)(C)}{T(B)}$$

id est ex hypothesi $\frac{z, y^{z-1}}{a^{z-1}}$. Quod est absurdum.

Potentiae a Binomio aut residuo quocunque proxima a summa dignitas alterutrius nominis multipla est sub potentiae exponente.

Sit C aequalis $A \pm B$. erit C^2 idem quod $A^2 \pm 2AB + B^2$
C^3 $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
C^4 $A^4 \pm 4A^3B$ etc.

Ubi patet in A^2 et $2AB$ reperiri 2. in A^3 et $3A^2B$ reperiri 3, et ita in caeteris.

Si curva detur ejus naturae, ut ordinatae in axem ad angulos rectos demissae sint inter se in ratione partium Directricis inde a vertice abscissarum, multiplicata secundum numerum exponentem quemcunque, et inde a vertice versus ordinatam in Directrice sumatur portio abscissae quam numerus exponens indicat, recta jungens hujus portionis extremum quod versus ordinatam cadit, et punctum curvae ex quo ordinata ducta est, curvam tanget.

Sit curva proposita $AC(C)$. cujus vertex A. punctum aliquod C. vel (C) ex quo in Directricem $AB(B)$ demittatur ordinata perpendicularis BC vel $(B)(C)$, sintque ordinatae BC et $(B)(C)$ inter se in multiplicata, exempli causa duplicata, triplicata aliave

---

1 f. *Am Rande:* Ergo nota obiter absurdum sive impossibile esse, ut $\frac{\frac{z, z-1}{1,2}y^{z-2}\omega}{a^{z-1}} + \frac{z, z-1, z-2}{1,2,3}\frac{y^{z-3}\omega^2}{a^{z-1}}$ etc. sint $\sqcap 0$.

4 f. exponente. *(1)* A + B. *(2)* Sit C aeqvalis A *(a)* + *(b)* plus vel minus B. erit qvadratum a C aeqvale qvadrato ab A, plus | vel minus *erg.* | duplo A in B plus qvadrato a B. Et Cubus a C aeqvalis Cubo ab A, plus triplo qvadrato A in B plus triplo A in B qvadratum plus B *(aa)* cubus *(bb)* cubo. Et qvadrato-qvadratum a C, aeqvale qvadratoqvadrato ab A, plus qvadruplo cubo *(aaa)* a B *(bbb)* ab A in B, etc. Patet ergo *(3)* A *(4)* Sit *L* 8 f. caeteris. *(1)* Si a binomii potentia *(a)* alterius *(b)* nominis alterutrius sum *(2)* | Membra omnia potentiae a binomio *streicht Hrsg.* | exceptis duabus summis partium potentiis *(3)* | Si potentia *streicht Hrsg.* | *(4)* Sit *(5)* Si *L* 9 in ... demissae *erg. L* 11 f. in *(1)* axe *(2)* Directrice *(a)* t⟨e⟩rtia absci *(b)* sumatur *L* 15 ACC. *L ändert Hrsg.* 15 vel (C) *erg. L* 15 f. in *(1)* Axem *(2)* Directricem *L* 16 BC, *(1)* sint *(2)* sit aliud punctum (C) ex qvo *(3)* vel *L*

ratione ipsarum AB, $A(B)$ a directrice inde a vertice per ordinatas abscissarum. Sumatur AT inde a vertice in directrice versus ordinatam BC, ita, ut sit AT portio dimidia, tertiave, aut alia, (secundum numerum scilicet qui rationis multiplicationem exponit), abscissae AB. Dico quod juncta TC. curvam tanget.

Secet si fieri potest in duobus punctis, $C.(C)$. ducanturque duae ordinatae, CB, $(C)(B)$. Quarum differentia sit $D(C)$ et abscissarum differentia $B(B)$ vel CD. Erit ex hypothesi posita parametro E, seu unitate E. ipsa $(B)(C)$ potentia ipsius, $AB+B(B)$ id est ipsius $A(B)$ et erit BC potentia ipsius AB. Exempli causa si potentia sit Quadratum [vel cubus], erit BC Quadratum [Cubus] ab AB et erit $B(C)$ idem quod Quad. ab AB plus dupla AB in $B(B)$ plus quad. $B(B)$ [Cub. ab AB plus triplum Quad. AB in $B(B)$ plus AB in triplum Quadr. $B(B)$, plus Cubus $B(B)$] et erit differentia ipsarum $(B)(C)$ et BC nempe $D(C)$ differentia dictarum potentiarum, nempe $2AB$ in $B(B)$ plus Quad. $B(B)$ [3 Quad. AB in $B(B)+AB$ in 3 Quad. $B(B)$ + cub. $B(B)$]. Adeoque $(C)D$, erit ad $B(B)$ vel ad DC, ut $2AB$ in $B(B)$ plus Quad. $B(B)$ [3 Quad. AB in $B(B)$, $+AB$ in 3 Quad. $B(B)$ + Cub. $B(B)$] ad $B(B)$, id est ablata communi altitudine $B(B)$ ut $2AB$ plus $B(B)$ [3 Quad. $AB+AB$ in $3B(B)$ + Quad. $B(B)$] ad unitatem seu parametrum E. Adeoque erit ratio $(C)D$ ad DC, sive CB ad BT major quam dupla AB [3^{plum} Quadr. AB] ad E. Eodemque modo si ordinatae quartam potentiam abscissarum, quam quadrato-quadraticam vocant, exprimerent, foret ratio CB. ad BT major quam 4^{pli} Cub. ab AB, ratio ad E. Et ita porro in infinitum, ut ex Tabula Potentiarum Binominalium constat, quae ut ab aliis demonstratum ita procedit:

3 scilicet *(1)* exponentem r *(2)* qvi *L* 7 hypothesi | posita ... ipsa *erg.* | *(1)* BD *(2)* (B)(C) *(a)* ad | ipsam *erg.* | BC, ut potentia ipsius, AB + B(B) id est ipsius A(B) ad potentiam ipsius AB et differentia earum erit *(aa)* ut *(bb)* ad ipsas ut differentia harum potentiarum *(b)* potentia *L* 8 et | erit *erg.* AB *ändert Hrsg.* | potentia ipsius AB. | vel qvod idem est *streicht Hrsg.* D(C) *gestr.* | exempli *L* 8 sit *(1)* cubus ut, $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ *(2)* Qvadratum *L* 9 Qvadratum *erg. L* 9f. idem ... qvad. B(B) *erg. L* 11 B(B)] *(1)* ad Cubum *(a)* | ab *erg.* | ⟨A⟩ *(b)* a B *(c)* ab AB *(2)* et *(a)* differentia ipsarum (B)(C) et BC nempe D(C) | erit *erg.* | ad ipsas ut differentia *(aa)* harum *(bb)* supra *(cc)* dictarum potentiarum nempe ut 3 Qvad. AB in B(B) + AB in 3 Qvad B(B) + cub. B(B) ad ipsas potentias. Porro | ista *erg.* | differentia potentiarum abscissis est ad *(aaa)* ipsas *(bbb)* ipsam abscissarum differentiam BB u *(b)* erit *L* 13 B(B)] *(1)* Et qvoniam potentiae omnes per lineas designari possunt, constante qvadam *(a)* curva *(b)* recta, nempe curvae parametro *(2)* Adeoqve *L* 14 2AB ... Qvad. B(B) *erg. L* 21–456,1 procedit: *(1)* C ⊓ A + B. C^2 ⊓ $A^2+2AB+B^2$ C^3 ⊓ A^3+3A *(2)* A(B) ⊓ AB+ *(3)* x *(4)* f ⊓ *L*

9–456,14 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

$$f \sqcap g + h$$
$$f^2 \sqcap g^2 + 2gh + h^2$$
$$f^3 \sqcap g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3$$
$$f^4 \sqcap g^4 + 4g^3h + 6g^2h^2 + 4gh^3 + h^4$$
$$f^5 \sqcap g^5 + 5g^4h + 10g^3h^2 + 10g^2h^3 + 5gh^4 + h^5$$

Ubi patet generaliter, si a potentia ipsius f, sive $g + h$, id est in nostro casu a potentia ipsius $A(B)$ sive ipsius $AB + B(B)$, id est ab ipsa f^2, vel f^3, etc. sive a recta $(B)(C)$; auferatur alterius nominis, g, id est rectae AB, potentia similis seu recta BC, verbi gratia si a f^2 id est $g^2 + 2gh + h^2$, auferatur g^2; residuum $D(C)$, sive $2gh + h^2$ [$3g^2h$ + etc. vel $4g^3h$ + etc.] majorem rationem habiturum ad h sive ad $B(B)$, id est BC ad BT, quam $2g$ [$3g^2$ vel $4g^3$] sive $2AB$ [3^{plum} Quad. AB, vel quadrupl. Cub. AB], sive ut potentia proxime inferior ea quam ordinatae exprimunt, per exponentem potentiae ordinatarum multiplicata, ad unitatem seu Parametrum E.

At vero ex constructione AB ad BT est ut 2 [vel 3. vel 4. etc.] numerus scilicet rationis Multiplicationem exponens, ad 1, et BC est ad AB, ut Potentia ad Latus, seu ut potentia proxime inferior ad unitatem vel parametrum. Ergo BC est ad BT in composita ratione potentiae proxime inferioris ad Unitatem, et exponentis potentiae propositae ad unitatem; id est, erit ratio BC ad BT, quae potentiae proxime inferioris per propositae exponentem multiplicatae, ad Unitatem. Sed eam paulo ante majorem esse conclusimus. Erit ergo eadem ratio eidem, simul major et eadem, quod est absurdum, adeoque, impossibile est TC, curvam propositam secare, Tangit ergo. Quod Erat Demonstrandum.

Poterit Lemma ostendi: Si a Potentia Binomii auferatur potentia similis alterutrius nominis, ratio residui ad reliquum nomen major erit ratione potentiae proxime inferioris per propositae potentiae exponentem multiplicatae, ad Unitatem.

L a t u s l i n e a e voco, lineam, quae est prima mediarum proportionalium inter duas alias lineas, quarum una est pro Unitate assumta, altera P o t e n t i a appellatur.

6 si *(1)* a potentia ipsius f, potentia similis ipsius *(a)* ips *(b)* id est *(c)* sive g + h, id est in nostro casu ipsius A(B) sive | ipsius *erg.* | AB + B(B), potentia | similis *erg.* | alterius nominis, g, | sive AB *erg.* | *(aa)* rat *(bb)* residui adimatur, residui rationem *(2)* a recta (B)(C) *(3)* | a *gestr., erg. Hrsg.* | potentia *L* 7 + B(B) *(1)* id est a recta (B)(C) *(2)* id est *(a)* a recta *(b)* ab *L* 10 etc.] | id est BC ad BT *erg. u. gestr.* | majorem *L* 10 sive ... BT *erg. L* 11 $4g^3$ *(1)* ad unitatem], sive qvam *(2)*] sive *L* 12 f. proxime ... multiplicata, *erg. L* 24 f. Unitatem. *(1)* Potentia est linea inter qvam et aliam lineam pro unitate assumtam, alia rursus linea, qvae Latus est qvotcunqve mediarum proportionalium prima. *(2)* L a t u s *L*

Aliter: Potentiae sunt lineae quae sunt in Multiplicata ratione aliarum Linearum. L a t e r a quae sunt in Submultiplicata.

Si unitate assumta, Quantitates numeris (integris vel fractis rationalibus vel surdis) exprimantur, sitque numerus unius lineae quantitatem exprimens, potestas numeri alterius lineae quantitatem exprimentis, illa Linea, P o t e n t i a appellabitur, haec L a t u s. Ita si Linea una sit bipedalis altera tripedalis, tertia quadrupedalis quarta pedum novem, erit quadrupedalis vel novempedalis Potentia Quadratica ipsius bipedalis vel tripedalis; eruntque quadrupedalis et novempedalis inter se in duplicata ratione, seu ut quadrata bipedalis et tripedalis. Sed haec patet fieri non posse, nisi certa quaedam quantitas, ut pes, hoc loco, pro unitate sive mensura assumta sit.

Videndum an possimus etiam demonstrare tangentes, tunc cum utraque incognita assurgit ad potentiam: $x^z \sqcap y^{z+v}$. Fiet $ztx^{z-1} \sqcap \overline{z+v}y^{z+v}$ et $t \sqcap \frac{\overline{z+v}y^{z+v}}{z, x^{z-1}} \sqcap \frac{\overline{z+v}x^z}{z, x^{z-1}} \sqcap \frac{\overline{z+v}x}{z}$. Ponatur $z \sqcap 2$. et $v \sqcap 1$. Fiet $x^2a \sqcap y^3$. Pro x ponatur $x+\omega$. et pro y fiat $y+\lambda$. Fiet: $a\overline{x^2+2x\omega+\omega^2} \sqcap y^3+3y^2\lambda+3y\lambda^2+\lambda^3$. Unde $2x\omega a+\omega^2 a \sqcap 3y^2\lambda+3y\lambda^2+\lambda^3$, erit $\frac{\lambda}{\omega} \sqcap \frac{2xa}{3y^2} \sqcap \frac{y}{t}$. Ergo $\frac{3y^3}{2xa} \sqcap t$. sive $\frac{3x^2a}{2xa} \sqcap \frac{3}{2}x \sqcap t$. At $\frac{2xa+\omega a}{3y^2+3y\lambda+\lambda^2}$ alia est quam $\frac{2xa}{3y^2}$.

11–459,4 *Spätere Nebenbetrachtungen und Zusätze:*

13–16 $\frac{y}{a} \sqcap \frac{xx}{yy}$. $\frac{\lambda}{a} \sqcap \frac{2x\omega}{3yy}$. $\frac{y+\lambda}{a} \sqcap \frac{3xx+2x\omega}{[3]yy} \sqcap \boxed{2}\frac{x+\omega}{y+\lambda}$.

$\frac{y}{a} \sqcap \frac{xx}{yy}$. *Daneben, gestrichen:* $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{3y^2\lambda}{2xaa}$. *Nicht gestrichen:* Ergo $\frac{y+\omega}{a} \sqcap \frac{xx}{yy} + \frac{3yy\lambda}{2xaa} \sqcap \frac{2x^3aa+3y^4\lambda}{2}$ [*bricht ab*]

2 f. Submultiplicata. *(1)* Melius *(2)* Aliter P o t e n t i a est Linea, cuius qvantitas numero expressa, *(a)* alterius lin *(b)* est, qvi *(3)* Si *L* 15 $\frac{\lambda}{\omega} \sqcap$ *(1)* $\frac{3y^2}{2xa} \sqcap \frac{y}{t}$. | $\frac{3y}{2xa} \sqcap \frac{1}{t}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\frac{2xa}{3y^2}$ *L*

Videndum an res sic probari possit: $ax^2 + 2xa\omega + \omega^2 a \sqcap y^3 + 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3$. Auferantur hinc ax^2, illinc y^3, aequalia ex natura curvae, item hinc $2xa\omega$, hinc $3y^2\lambda$, ex constructione, erunt $\omega^2 a \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3$ seu $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{3y+\lambda}{a}$. At eadem $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{9y^4}{4x^2a^2}$. Ergo $\frac{9y^4}{4x^2a^2} \sqcap \frac{3y+\lambda}{\not a}$. Ergo $\frac{9y^4}{4x^2a^2} \sqcap \frac{3y}{a}$ et $\frac{3y^3}{4x^2a} \sqcap \frac{1}{1}$. seu $3y^3 \sqcap 4x^2a$. At $3y^3 \sqcap 3yx^2a$. Ergo $3x^2a \sqcap 4x^2a$, quod est absurdum.

Sumamus aliud exemplum. Sit natura curvae: $a^2x^3 \sqcap y^5$. Fiet:

$$\boxed{a^2x^3}\boxed{+3a^2x^2\omega} + 3a^2x\omega^2 + a^2\omega^3 \sqcap \boxed{y^5}\boxed{+5y^4\lambda} + 10y^3\lambda^2 + 10y^2\lambda^3 + 5y\lambda^4 + \lambda^5$$

Et auferendo hinc a^2x^3, illinc y^5 ex natura curvae, item hinc $3a^2x^2\omega$, illinc $5y^4\lambda$ ex

---

1–459,4 Hic tandem inventa demonstratio pulcherrima.

$\frac{(x)-x}{(y)-y} \sqcap \frac{3yy}{2xa}$. Jam $yy \sqcap \frac{ax^2}{y}$. Ergo $\frac{(x)-x}{(y)-y} \sqcap \frac{3x}{2y} \sqcap \frac{3(x)}{2(y)}$. Ergo $\frac{(x)}{x} \sqcap \frac{(y)}{y}$ seu $(x)y \sqcap x(y)$. et $2(x)y-2xy \sqcap 3x(y)-3xy$ seu $2(x)y+xy \sqcap 3x(y)$. Est autem $2(x)y \sqcap 2x(y)$. Ergo auferendo utrobique fiet: $xy \sqcap x(y)$ seu fiet $y \sqcap (y)$. Q. E. D.

Similiter $\frac{(x)-x}{(y)-y} \sqcap \frac{5y^4}{2xa^3}$. $y^4 \sqcap \frac{a^3x^2}{y}$. Ergo $\frac{(x)-x}{(y)-y} \sqcap \frac{5x}{2y} \sqcap \frac{5(x)}{2(y)}$. Ergo $\frac{x}{y} \sqcap \frac{(x)}{(y)}$. $2(x)y - 2xy \sqcap 5x(y) - 5xy$. Jam $(x)y \sqcap x(y)$. Ergo fiet $3xy \sqcap 3x(y)$. Ergo $y \sqcap (y)$. Q. E. D. *Darunter, gestrichen:* Imitatione hujus innumerae aliae impossibilitates poterunt ex tangentibus duci, et forte omnes propositiones impossibiles e x t a n g e n t i b u s habent originem suam, itaque si generaliter ista ad tangentes applicemus, generales sane miras aequationum impossibilium formas habebimus ex tangentibus inquam, id est maximis et minimis.

Dazu: NB. NB. Pulcherrime. *Darunter:* Non fido.

6–459,4 *Nebenbetrachtung, teilweise gestrichen:*

Nicht gestrichen: $a^2x \sqcap y^3$. *Gestrichen:* $a^2x+\omega a^2 \sqcap y^3+3y^2\lambda+3y\lambda^2+\lambda^3$. $\frac{3y^2}{a^2} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \sqcap \frac{y}{t}$.

---

20 Non fido: Die Bemerkung beruht vermutlich auf dem späteren Zusatz zu S. 461 Z. 8 – S. 462 Z. 4, in dem ein falscher Wert für d^2 verwendet wird. 22 $\frac{3y^2}{a^2}$: Richtig wäre $\frac{a^2}{3y^2} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \sqcap \frac{y}{t}$. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit und streicht die Rechnung.

constructione, quia $\frac{\omega}{\lambda} \sqcap \frac{5y^4}{3a^2x^2}$. et $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{25y^8}{9a^4x^4} \sqcap \frac{10y^3+10y^2\lambda+5y\lambda^2+\lambda^3}{3a^2x+a^2\omega}$. Ergo $\frac{25y^8}{9a^4x^4} \sqcap \frac{10y^3}{3a^2x+a^2\omega}$. seu $\frac{5y^5}{9a^4x^4} \sqcap \frac{2}{3a^2x+a^2\omega}$. et $\frac{3a^2x+a^2\omega}{2} \sqcap \frac{9a^4x^4}{5y^5}$ seu $\frac{3x+\omega}{3x} \sqcap \frac{6a^2x^3}{5y^5} \sqcap 1+\frac{1x^3[a^2]}{5y^5}$. Ergo $\frac{3x+\omega}{3x}$ seu $1+\frac{\omega}{3x} \sqcap 1+\frac{1x^3a^2}{5y^5}$ et $\frac{\omega}{x} \sqcap \frac{3x^2[a^2]}{5y^4} \frown \frac{x}{y} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \frown \frac{x}{y}$. Ergo $\omega^2 y \sqcap \lambda x^2$. Sed nondum hoc satisfacit.

Generale hoc Lemma demonstrandum est:

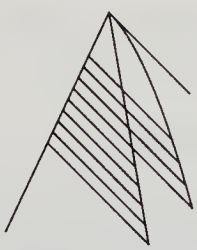
Si duae potentiae diversi utcunque gradus, a duobus binomiis utcunque diversis factae habeant duos altiores terminos alicujus nominis unius potentiae, aequales duobus altioribus terminis alicujus nominis alterius potentiae, altissimum altissimo, proximum proximo: Ipsas potentias aequales esse impossibile est.

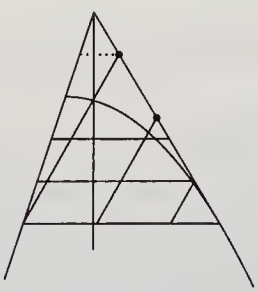
$a+b$	$c+d$
$a^2+2ab+b^2$	$c^2+2cd+d^2$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$
$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	$c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+d^4$

---

10 *Nebenbetrachtung, gestrichen:* $a^3 \sqcap c^2$. $3a^2b \sqcap 2cd$. $a+b \sqcap c+d$. $a^2 \sqcap \frac{2cd}{3b} \sqcap \frac{c^2}{a}$. Ergo $\frac{2d}{3b} \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $a \sqcap \frac{3bc}{2d}$. Generalius: $a^z \sqcap c^\omega$. $z, a^{z-1}b \sqcap \omega, c^{\omega-1}d$. $a+b \sqcap c+d$. $a^{z-1} \sqcap \frac{\omega, c^{\omega-1}, d}{zb} \sqcap \frac{c^\omega}{a}$. Ergo fiet: $\omega ad \sqcap zbc$. Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{\omega a}{zc}$. At idem $\frac{b}{d} \sqcap \frac{\omega, c^{\omega-1}}{z, a^{z-1}} \sqcap \frac{\omega a}{zc}$. Redibit aequatio prima.

Darunter zwei gestrichene Figuren außerhalb des Textzusammenhangs, tlw. vom Text überschrieben:





7 duos *(1)* maximos termi *(2)* altissimos terminos unius nominis unius potentiae, aeqvales duobus altissimis terminis *(a)* alterius *(b)* unius *(3)* altiores *L*

Si $a^3 \sqcap c^2$ erit $c \sqcap a$.

Si $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \sqcap c^2 + 2cd + d^2$ erit $c + d \sqcap a + b$.

$c \sqcap a + e$. $c + d \sqcap a + b + f$. Ergo $\not{a} + e + d \sqcap \not{a} + b + f$. et $d \sqcap b + f - e$.

$a^3 \sqcap c^4$. Ergo $a \sqcap c$. $a^2b \sqcap c^3d$. Ergo $c \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$. Ergo $a \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$. Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{c^2}{a}$. Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{c}{a}$.

$\frac{b}{d} \sqcap \frac{4c^3}{3a^2}$. Ergo $\frac{4c^3}{3a^2} \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $4c^2 \sqcap 3a$.

$a^4 \sqcap c^2$. $4a^3b \sqcap 2cd$ seu $\frac{4}{2}a^3b \sqcap \not{2}cd$. $a^4 + \frac{4}{2}a^3b \sqcap c\overline{c+d}$.

$a^z \left(+\frac{z}{1}\right) a^{z-1}, b^1 \left(+\frac{z, z-1}{1, 2}\right) a^{z-2}, b^2$ etc.

$c^v + \left(\frac{v}{1}\right) c^{v-1}, d + \left(\frac{v, v-1}{1, 2}\right) c^{v-2}d^2$ [etc.]

Sit $a^z \sqcap c^v$. Jam $\frac{a^z}{a} \sqcap a^{z-1}$ et $\frac{c^v}{c} \sqcap c^{v-1}$. Jam $\frac{z}{v} \sqcap \frac{c^{v-1}d}{a^{z-1}b} \sqcap \frac{c^v \frac{d}{c}}{a^z \frac{b}{a}}$ id est omissis $\frac{c^v}{a^z}$ aequalibus: $\frac{z}{v} \sqcap \frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$ sive $\frac{z}{v} \sqcap \frac{ad}{bc}$. Est autem $z \sqcap v$. Ergo $c \sqcap a$ et $c+d \sqcap a+b$. $a \sqcap c$. Ergo $c + d \sqcap c + b$. Ergo $d \sqcap b$. Ergo $\frac{d}{a} \sqcap \frac{b}{c}$. seu $cd \sqcap ab$. At $ad \sqcap bc$. Ergo $cd + ad \sqcap ab + bc$.

Satis video theorematis demonstrationem analytice quaerendam, idque procedendo ordine, analytica demonstratio per calculum ad novum denique nos ducet theorema, et

10 $\sqcap$ a^{z-1} *(1)* | Ergo *streicht Hrsg.*| *(2)* et *L* 11 $\sqcap \frac{ad}{bc}$. *(1)* $\frac{a^z}{\frac{z}{1}a^{z-1}} \sqcap \frac{c^v}{\frac{v}{1}c^{v-1}}$ Ergo $\frac{a}{z} \sqcap \frac{c}{v}$ et $\frac{z}{v} \sqcap \frac{a}{c}$. Ergo $\frac{a}{c} \sqcap \frac{ad}{bc}$. Ergo $\frac{d}{b} \sqcap 1$. seu $d \sqcap b$. Ergo $c^2 + 2cb + b^2 \sqcap a^3$ *(2)* Est *L*

4 Ergo $a \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$: Die Folgerung ist nicht zulässig und beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 6.

11 f. Ergo $c + d \sqcap c + b$: Die Folgerung ist nicht zulässig und beeinträchtigt die Rechnung bis zum Ende der Zeile.

ita non dubitem ad simplicissimam demonstrandi rationem nos denique perventuros.

Videndum ergo, quomodo ad hanc demonstrationem generaliter pertingere liceat, eundo per exempla particularia simpliciora.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \sqcap c^2 + 2cd + d^2$. $a^3 \sqcap c^2$. et $3a^2b \sqcap 2cd$. Unde $3ab^2 + b^3 \sqcap d^2$. Ex duabus posterioribus aequationibus: $\frac{a^3}{3a^2b} \sqcap \frac{c^2}{2cd}$. sive $\frac{a}{3b} \sqcap \frac{c}{2d}$. et $a \sqcap \frac{3bc}{2d}$. et $a^2 \sqcap \frac{9b^2c^2}{4d^2} \sqcap \frac{2cd}{3b}$ sive $27b^3c^{\not 2} \sqcap 8\not{c}d^3$. et $c \sqcap \frac{8d^3}{27b^3}$ adeoque c ad 1. in triplicata ratione $2d$ ad $3b$.

$d \sqcap \frac{3a^2b}{2c}$. et $c \sqcap \frac{3a^2b}{2d} \sqcap \frac{8d^3}{27b^3}$. Erit $16d^4 \sqcap 81b^4a^2$.

$\frac{a}{3b} \sqcap \frac{c}{2d}$. Ergo $c \sqcap \frac{2ad}{3b}$. et $c \sqcap \frac{3a^2b}{2d}$. Ergo $4\not{c}d^2 \sqcap 9a^{\not 2}b^2$. seu $4d^2 \sqcap 9b^2a$ adeoque $\frac{a}{1} \sqcap \frac{4d^2}{9b^2}$. et $\frac{c}{1} \sqcap \frac{8d^3}{27b^3}$.

8–462,4 *Nebenbetrachtung:* Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{2c}{3a}$ seu $d \sqcap \frac{3a}{2c}b$.

Nebenbetrachtung auf der vorhergehenden Seite, gestrichen:

$a^3 + a^2b \quad + 2a^2b, \sqcap c + d \frown c \; + cd$

$\underbrace{a+b}_{c+d} \frown a^2$

$a^3 \frown c + d + 2b \sqcap a, c + d + b, \not{c}$. Ergo $\frac{c+d+2b}{c+d+b} \sqcap \frac{a}{c} \sqcap \frac{2d}{3b}$.

$\bigwedge$
$c^{\not 2}$

Späterer Zusatz: $\boxed{a^3 + 3a^2b} + 3ab^2 + b^3 \sqcap \boxed{c^2 + 2cd} + d^2 \sqcap \frac{9aabb}{4cc \sqcap 4a^3} \sqcap \frac{9bb}{4a}$. Ergo $12aa\not{b}\not{b} + 4ab^{\not 3} \sqcap 9$. Ergo res non est impossibilis.

4 Unde ... d^2 *erg. L*

---

5 duabus posterioribus: Gemeint sind die zwei Gleichungen vor der letzten, die Leibniz später ergänzte. 11 $\frac{b}{d} \sqcap \frac{2c}{3a}$: Richtig wäre entweder $\frac{b}{d} = \frac{2c}{3a^2}$ oder $\frac{b}{d} = \frac{2a}{3c}$. Der falsche Wert beeinträchtigt die weitere Nebenbetrachtung und den späteren Zusatz.

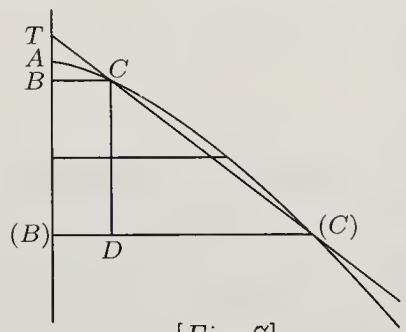
Sit $a \sqcap 4$. $c \sqcap 8$. Erit $4^3 \sqcap 8^2$ seu $64 \sqcap 64$. et $\textcircled{3}16a^2b \sqcap \textcircled{2}c8d$. Ergo $d \sqcap \frac{\textcircled{3}16a^2b}{\textcircled{2}8c}$ et $d \sqcap 3b$. et b. ponere possumus $\sqcap 1$. Ergo $a \sqcap \frac{4d^2}{9b^2}$, id est $\frac{\textcircled{4}9d^2}{\textcircled{9}b^2} \sqcap 4$. et $c \sqcap \frac{\textcircled{8}27d^3}{\textcircled{27}1} \sqcap 8$. Jam in locum ipsarum a. et c. in reliqua aequatione substituendo valorem, fiet: $\frac{3,4d^2}{9b^2}, b^2 + b^3 \sqcap d^2$ seu $4d^2 + 3b^3 \sqcap 3d^2$. seu $d^2 + 3b^3 \sqcap 0$. absurdum.

Si sit generaliter:

$$\overbrace{a^z}^{/}\overbrace{+\frac{z}{1}a^{z-1}b^1}^{//} + \frac{z, z-1}{1,2}a^{z-2}b^2 + \frac{z, z-1, z-2}{1,2,3}a^{z-3}b^3 \text{ etc.}$$

$$\sqcap \quad \overbrace{c^v}^{/}\overbrace{+\frac{v}{1}c^{v-1}d^1}^{//} + \frac{v, v-1}{1,2}c^{v-2}d^2 \text{ etc.}$$

$a^z \sqcap c^v$. $za^{z-1}b \sqcap vc^{v-1}d^1$. Adeoque $\frac{a^z}{za^{z-1}b}$ seu $\frac{a}{zb}, \sqcap \frac{c^v}{vc^{v-1}d}$ seu $\frac{c}{vd}$ seu $\frac{a}{c} \sqcap \frac{zb}{vd}$.



[*Fig. 7*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $B(B) \sqcap \omega$. $D(C) \sqcap \lambda$. $A(B) \sqcap x + \omega$. $(B)(C) \sqcap y + \lambda$. $TB \sqcap t$. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda}$. seu $t \sqcap \frac{\omega y}{\lambda}$.

$ax^2 \sqcap y^3$. $a\overbrace{x^2}^{/}\overbrace{+2x\omega}^{//} + \omega^2 \sqcap \overbrace{y^3}^{/}\overbrace{+3y^2\lambda}^{//} + 3y\lambda^2 + \lambda^3$. $\frac{\omega}{\lambda} \sqcap \frac{3y^2}{2x} \sqcap \frac{t}{y}$. Ergo $\frac{3y^3}{2x} \sqcap t$ seu $t \sqcap \frac{3x}{2}$. $\frac{\omega}{\lambda} \sqcap \frac{3x}{2y}$. $\omega \sqcap \frac{3x\lambda}{2y}$. $\frac{9x^2\lambda^2}{4y^2} \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3$. et pro x^2 ponendo y^3, fiet $\frac{9y}{4} \sqcap 3y + \lambda$. seu $3y \sqcap 4y$. Quod est absurdum.

Sit $x^3 \sqcap y^5$. Fiet: $\overbrace{x^3}^{/}\overbrace{+3x^2\omega}^{//} + 3x\omega^2 + \omega^3 \sqcap \overbrace{y^5}^{/}\overbrace{+5y^4\lambda}^{//} + 10y^3\lambda^2 + 10y^2\lambda^3 + 5y\lambda^4 +$

---

1 f. *Am Rande:* $b \sqcap 1$. $a \sqcap 4$. $c \sqcap 8$. $d \sqcap 3$.

14 fiet *(1)* $\frac{9y^2\lambda^2}{4} \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3$. seu $3y \sqcap 4\lambda$ *(2)* $\frac{9y}{4}$ *L*

λ^5. $\frac{3x^2}{5y^4} \sqcap \frac{\lambda}{\omega}$. seu $\sqcap \frac{y}{t}$. Ergo $5y^5 \sqcap 3tx^2$. $\frac{5x}{3} \sqcap t$. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda}$. Ergo $\frac{5x}{3y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda}$. et $\omega \sqcap \frac{5x\lambda}{3y}$.

$\wedge$
x^3

Sit aequatio quaecunque

$$x^3 + bx^2 + cx + d \sqcap y^2 + ey + f.$$

Pro x ponatur $x + \omega$, pro $y, y + \lambda$, fiet

pro x^3	$x^3 + 3x^2\omega +$	$3x\omega^2 + \omega^3$	$y^2 + 2y\lambda$	$+ \lambda^2$	pro y^2
bx^2	$+ 1x^2b +$	$2x\omega b$	$+ 1ye$	$+ \lambda e$	... ey
cx		$+ 1xc$		$+ f$	
d		$+ \omega c$			
		$+ d$			

$\sqcap$

Unde patet regulam Slusii tam esse facilem demonstratu, quam Methodum Fermatii de maximis et Minimis, imo ex ea statim resultare, cum absunt Asymptoti.

$$x^3 + bx^2 + cx + d + ey + fy^2 + my^3 + \underbrace{gyx + hy^2x + lyx^2} \sqcap 0.$$

Pro x, sit $x + \omega$. pro y sit $y + \lambda$. Fiet

$1x^3$	bx^2	cx	d	ey	fy^2	my^3	xy	$\frown$	hy	$h\lambda$	gyx
$3x^2\omega$	$\cdot 2x\omega$	$\cdot\omega$		$\cdot\lambda$	$\cdot 2y\lambda$	$\cdot\ 3y^2\lambda$	$x\lambda$		lx	$l\omega$	$gy\omega$
$3x\omega^2$	$\cdot 1\omega^2$				$\cdot 1\lambda^2$	$\cdot\ 3y\lambda^2$	$y\omega$		g		$gx\lambda$
$1\omega^3$						$\cdot\ \lambda^3$	$\lambda\omega$				$g\lambda\omega$

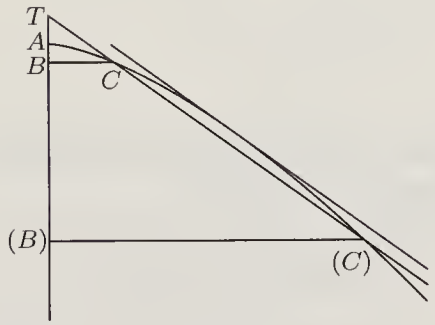
ny^3x py^2x^2 $qyx^3 \sqcap py^2x^2 + yx \frown ny^2.$ [*bricht ab*]
qx^2

1 $\sqcap \frac{\lambda}{\omega}$. *(1)* seu $\omega \sqcap \frac{y}{t}$. Ergo $5y^5 \sqcap 3x^2t$. et $t \sqcap \frac{5x}{3}$. et $\omega \sqcap$ *(2)* seu *L* 1 f. $\omega \sqcap \frac{5x\lambda}{3y}$ *(1)* | et *streicht Hrsg.* | $\frac{3x^2}{5y^4} \sqcap \frac{\lambda}{5x\lambda}$ *(2)* Sit *L* 13 my^3 | *(1)* yx. *(2)* hyz *(3)* yx $\frown$ hy. *streicht Hrsg.* | *(4)* gxy hx *(5)* xy *L*

9 regulam Slusii: vgl. *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143 bis 47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 9 Methodum Fermatii: Fermats Tangentenmethode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. HERIGONE, *Cursus mathematicus*, Bd 6, 1644, S. 59–69 und in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659 [Marg.], *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). Vgl. auch die Erl. zu S. 465 Z. 5 f.

Nimirum omnes formae, in quibus yx, redibunt ad:

$yx \frown$.	$y^2x^2 \frown$.	$y^3x^3 \frown$.
y	y	y
x	x	x
y^2	y^2	y^2
x^2	x^2	x^2
etc.	etc.	etc.



[*Fig. 8*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $x^2 \sqcap y^3$. $BT \sqcap t \sqcap \frac{3\xi}{2}$. $TA \sqcap \tau$. constans. $\frac{x+\tau}{y \sqcap BC} \sqcap \frac{\frac{3\xi}{2}}{\upsilon \sqcap \sqrt[3]{\xi^2}}$ seu $\frac{x^3+3x^2\tau+3x\tau^2+\tau^3}{y^3 \sqcap x^2} \sqcap \frac{27\xi^3}{8\xi^2} \sqcap \frac{27\xi}{8}$.

Sit aequatio $y \sqcap x^3$, constat esse $t \sqcap \frac{x}{3}$. Nam $3x^2t \sqcap y \sqcap x^3$. Et si $t \sqcap 3x^3$, fiet $t \sqcap 3y$.

Sit jam aequatio $y^2 \sqcap x^3$. Sumatur alia curva $y + b \sqcap x^3$. Unde uno in alterius locum substituto, fiet $y^2 - y - b \sqcap 0$. Cujus aequationis tantum maxima opus est quae dudum nota.

Sit alia $x^3 \sqcap y^2$. Sumatur $y^2 \sqcap x + c$. Fiet: $x^3 \sqcap x + c$. Ubi cum c possit sumi pro arbitrio, utique sic sumi potest, ut dividi possit aequatio per $x^2 - 2dx + d^2$ et hac methodo facile perveniri potest ad tangentes singulari via.

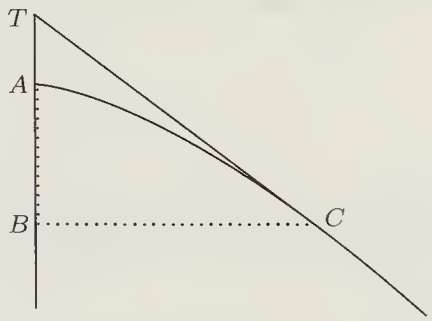
Tentemus et hoc: Ad curvam datae naturae et verticis, earum quas simplices voco ducenda ex puncto in axe dato T. maxima TC. Quaeritur ipsa AB, vel BC. Sit $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. et $x^2 \sqcap y^3$. $TA \sqcap \theta$. $AB \sqcap x$. $TB \sqcap x + \theta$. $BC \sqcap y$. $TC \sqcap x^2 + 2\theta x + \theta^2 + y^2 \sqcap TC \sqcap z$. Erit z. omnium possibilium maxima.

Redeamus ad methodum Fermatii de maximis et minimis.

Si TC tangit curvam, idem est ac si secet ita ut ipsa $C(C)$ intervallum punctorum intersectionis vel ipsi respondens in axe $B(B)$ sit minor quantitate qualibet

8 f. BT $\sqcap$ t $\sqcap$ *(1)* $\frac{3x}{2}$ $\sqcap$ $\frac{3y\sqrt{y}}{2}$ *(a)* $\sqcap$ *(b)* | seu *streicht Hrsg.* | $t^2 \sqcap \surd$ *(2)* $\frac{3\xi}{2}$ *(a)* TB $\sqcap$ $\frac{3\xi}{2}$ *(b)* TA *L*

23 methodum Fermatii: s. o. Erl. zu S. 463 Z. 9.



[*Fig. 9*]

assignabili. Hinc enim facile demonstratur revera tangere; nam si non tanget secabit in duobus punctis assignabilis intervalli contra hypothesin. Unde Methodum Fermatii de Maximis et Minimis, possumus habere pro demonstrata, quanquam et ab aliis dudum veterum more rigorose demonstrata sit, unde non est cur actum agam, praesertim cum nihil hoc propositione dicturus sim quod non inter Geometras constet.

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \sqcap c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$. $a^4 \sqcap c^3$. $4a^3b \sqcap 3c^2d$. Ergo $a^3 \sqcap \frac{c^3}{a} \sqcap \frac{3c^2d}{4b}$. Ergo $a \sqcap \frac{4cb}{3d}$. et $a^3 \sqcap \frac{64c^3b^3}{81d^3} \sqcap \frac{3c^2d}{4b}$. et erit $c \sqcap \frac{243d^4}{256b^4}$. Quem valorem inserendo valori ipsius a fiet: $a \sqcap \frac{81d^3}{64b^4}$.

$a^2 + 2ab + b^2 \sqcap c + d$. $a^2 \sqcap c$. $2ab \sqcap d$. $a \sqcap \frac{d}{2b}$. $a \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $\boxed{a \sqcap \frac{2cb}{d}}$. et $a \sqcap \frac{d}{2b}$. Ergo $\boxed{c \sqcap \frac{d^2}{4b^2}}$.

---

13 f. *Nebenbetrachtung:* $b \sqcap \frac{d}{2a}$ et $b^2 \sqcap \frac{d^2}{4c}$.

$2cb \smile d$

1 assignabili. *(1)* Nam hinc facile demonstratur tangere; nam si secare ponatur in duobus punctis assignabilis intervalli, ostenderem statim intervallum horum duorum punctorum revera assignato esse maius. Adeoqve hypothesis foret absurda, adeoqve non secaret, sed tangeret. Hoc ita *(2)* Hinc *L*
9 f. constet *(1)*: *(a)* $y^2 \sqcap$ *(b)* | $x^2 \sqcap y^3$ *streicht Hrsg.* | *(2)* a^4 *L*

---

5 f. ab aliis: Leibniz bezieht sich vermutlich auf Chr. HUYGENS, *Demonstratio regulae de maximis et minimis* u. *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, 1667 (Ms., gedr. in *Ouvrages*, S. 326 bis 330 u. 330–335; *HO* XX S. 229–241 u. 243–255). 11 $\frac{64c^3b^3}{81d^3}$: Im Nenner müsste $27d^3$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter bis Z. 12.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \sqcap c+d.\ a^3 \sqcap c.\ 3a^2b \sqcap d.$ Erit $a^2 \sqcap \frac{d}{3b}.$ et $a^2 \sqcap \frac{c}{a}.$ Ergo $\boxed{a \sqcap \frac{3bc}{d}}$ et $a^2 \sqcap \frac{9b^2c^2}{d^2} \sqcap \frac{d}{3b}.$ Erit $\boxed{c^2 \sqcap \frac{d^3}{27b^3}}.$

Si $a^4 \sqcap c.$ et $4a^3b \sqcap d.$ erit $\boxed{a \sqcap \frac{4bc}{d}}$ et $\boxed{c^3 \sqcap \frac{d^4}{256b^4}}$ et ita porro. Ergo generaliter $a \sqcap z\frac{bc}{d}.$ et $c^{z-1} \sqcap \frac{d}{zb}^{\frown z}$ posito $a^z \sqcap c$ et $z, a^{z-1}, b \sqcap d.$

Jam altius: $a^z \overset{(1)}{\sqcap} c^\omega$ et $z, a^{z-1}, b \overset{(2)}{\sqcap} \omega, c^{\omega-1}, d.$ Unde $\frac{b}{d} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{\omega, c^{\omega-1}}{z, a^{z-1}}.$ Jam ex 1. erit $\frac{a^{z-1}}{a} \overset{(4)}{\sqcap} \frac{c^{\omega-1}}{c}.$ seu $\frac{a^{z-1}}{c^{\omega-1}} \overset{(5)}{\sqcap} \frac{a}{c}.$ Rursus ex 2, erit $\frac{a^{z-1}}{c^{\omega-1}} \overset{(6)}{\sqcap} \frac{\omega d}{zb}.$ Ergo ex 5 et 6 fiet $\frac{a}{c} \overset{(7)}{\sqcap} \frac{\omega d}{zb}.$ Ergo $c \overset{(8)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d}.$ et $c^\omega \overset{(9)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d}^{\frown\omega}.$ Unde juncta 1. fiet: $\frac{zb}{\omega d}^{\frown\omega} \sqcap a^{z-1}$ et quia praeterea:

$$a^z + \frac{z}{1}, a^{z-1}, b^1 + \frac{z, z-1}{1,2}, a^{z-2}, b^2 + \frac{z, z-1, z-2}{1,2,3}, a^{z-3}, b^3 \text{ etc.} \sqcap$$
$$c^\omega + \frac{\omega}{1}, c^{\omega-1}, d^1 + \frac{\omega, \omega-1}{1,2}, c^{\omega-2}, d^2 \text{ etc.}$$

Sed ut hujus probetur impossibilitas ex datis exprimendum in characteribus esse z majorem quam ω.

$$y^3 + 3y^2\beta + 3y\beta^2 + \beta^3 \sqcap x^2 + 2x\lambda + \lambda^2$$
$$y^4 + 4y^3\beta + 6y^2\beta^2 + 4y\beta^3 + \beta^4 \sqcap x^3 + 3x^2\lambda + 3x\lambda^2 + \lambda^3$$

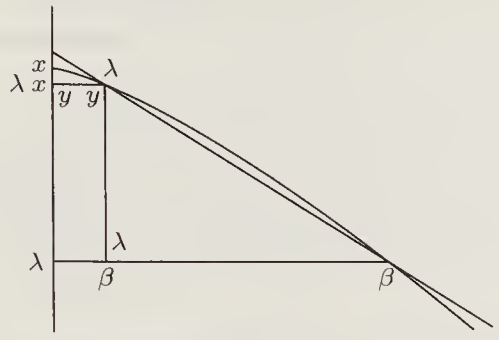
Si sit in nostra potestate facere β et λ tam parvas quam volumus, etiam differentiam rationis β ad λ. a ratione $3y^2$ ad $2x$. vel $4y^3$ ad $3x^2$ etc. licebit facere quantalibet parvitatis.

$$\boxed{y^4}\boxed{+4y^3\beta} + 6y^2\beta^2 + 4y\beta^3 + \beta^4 \sqcap \boxed{x^3}\boxed{+3x^2\lambda} + 3x\lambda^2 + \lambda^3.$$

15 f. volumus, *(1)* | erit *streicht Hrsg.* | tanto minor *(2)* etiam *(a)* ratio *(d)* differentiam *L* 16 $4y^3$ ad | 2x *ändert Hrsg.* | etc. *L*

---

4 $c^{z-1} \sqcap \frac{d}{zb}^{\frown z}$: Leibniz verwendet bis Z. 7 einen seinem Multiplikationssymbol $\frown$ ähnlichen Bogen, um Potenzen von Brüchen darzustellen. 5 f. ex 1. erit: Die Gleichung (4) ist fehlerhaft aus (1) abgeleitet und beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Rechnung bis Z. 7.



[*Fig. 10*]

Optimum erit demonstrationis causa sic procedere. Est $y^4 \sqcap x^3$. et $y^4+4y^3\beta+6y^2\beta^2+4y\beta^3+\beta^4 \sqcap x^3+3x^2\lambda+3x\lambda^2+\lambda^3$. Delendo hinc y^4, illinc x^3, fiet $\frac{\beta}{\lambda} \sqcap \frac{3x^2 \mid +3x\lambda+\lambda^2}{4y^3 \mid +6y^2\beta+4y\beta^2+\beta^3}$. Si $\frac{\beta}{\lambda} \sqcap \frac{3x^2}{4y^3} \sqcap \frac{3x^2 \mid +3x\lambda+\lambda^2}{4y^3 \mid +6y^2\beta+4y\beta^2+\beta^3}$. [erit] $\lambda \sqcap \frac{4y^3\beta}{3x^2}$. Unde $\frac{3x^2}{4y^3} \sqcap \frac{\frac{3x4y^3\beta}{3x^2}+\frac{16y^6\beta^2}{9x^4}}{6y^2\beta+4y\beta^2+\beta^3}$. Aliter $\frac{\beta}{\lambda} \sqcap \frac{3x+\lambda, 4y^3}{6y^2+4y\beta+\beta^2, 3x^2} \sqcap \frac{3x^2}{4y^3}$.

Si in figura quadam ordinatarum inter se ratio sit in ratione multiplicata abscissarum iis respondentium erit intervallum tangentis ab ordinata in axe sumtum, ad abscissam, ut numerator logarithmi sive exponentis secundum quem multiplicata est ratio ad denominatorem.

Ut si sit figura $A(B)(C)C$. Axis $AB(B)$ seu recta ad quam ex quovis curvae puncto $C, (C)$ perpendicularis $BC, (B)(C)$ quae o r d i n a t a vocatur demittenda est. Abscissa

---

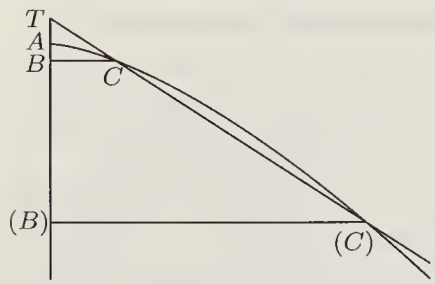
2–7 *Nebenbetrachtungen:* $y^4 \sqcap x^3$. $\frac{\beta}{\lambda} \sqcap \frac{3x^2}{4y^3} \sqcap \frac{y}{t}$. Ergo $t \sqcap \frac{4x}{3}$.

$\bigwedge$

$\frac{x^3}{y}$

$\frac{a}{b} \sqcap \frac{a+c}{b+d}$. Ergo $ba+da \sqcap ba+cb$. Ergo $da \sqcap cb$. Ergo $\frac{c}{d} \sqcap \frac{a}{b}$.

7f. $\sqcap \frac{3x^2}{4y^3}$. *(1)* Si *(a)* abscissae et ordinatae *(b)* Ordinatae cuiusdam Figurae sint inter se in Multiplicata *(aa)* ratione *(bb)* qvadam ratione *(cc)* aut submultiplicata, directa aut reciproca ratione *(2)* Sit *(3)* Si *L* 8 ratio *(1)*, et abscissarum iis respondentium | inter se ratio *streicht Hrsg.* | eiusdem rationis *(2)* sit in rati *(3)* sit ... multiplicata *(a)* (aut submultiplicata directa aut reciproca) sit *(b)* abscissarum *L* 10 ut *(1)* logarithmus *(a)* sive numerus sive rationis multi *(b)* sive exponens secundum qvem multiplicata est ratio ordinatarum, ad logarithmum rationis secundum qvem multiplicata est ratio abscissarum *(2)* numerator *L* 12 Axis *(1)* ad qvem *(2)* seu recta ad qvam ex qvovis curvae puncto perpendicularis demittenda est, AB(B) punctum in eo fixum ipsae per *(3)* AB(B) *L*



[*Fig. 11*]

autem AB. $A(B)$ seu intervallum ordinatae a puncto certo A, sumtum in axe. Tangens CT. occurrens axi in T et TB intervallum tangentis ab ordinata in axe sumtum, et ratio BC ad $(B)(C)$ sit multiplicata rationis AB ad $A(B)$ secundum numerum $\frac{z}{\omega}$. Erit TB ad AB ut ω ad z. Quod ut intelligatur opus est exemplis.

„Si potentiae ordinatarum sint ut potentiae abscissarum respondentium, directae „aut reciprocae erit portio axis inter puncta quibus tangens et ordinata axem secant, „intercepta; ad abscissam, ut exponens potentiae ordinatarum ad exponentem „potentiae abscissarum.

Potentiam vocant numerum multiplicationis alterius in se. D i g n i t a t e m vocant, alicujus quantitatis potentiam aut radicem. Ut Cubus numeri quantitatem AB. in relatione ad quandam unitatem, ut pedem aliamve mensuram exprimentis est ejus dignitas, Radix Cubica ejusdem numeri est etiam ejus dignitas. E x p o n e n s s e u L o g a r i t h m u s Cubi est 3. Logarithmus seu exponens radicis Cubicae est $\frac{1}{3}$. Unde si exponens dignitatis sit 1. tunc ipse numerus sibi ipsi dignitas erit. Ut si numerus sit x. exponens z, erit dignitas x^z. Adeoque si z sit 1. vel 3. vel $\frac{1}{3}$. tunc x^z, dignitas, erit x vel x^3 vel ($x^{\frac{1}{3}}$ id est) $\sqrt[3]{x}$ et si sit exponens, $-z$ sive negativus, tunc posito z, esse 1. vel 3. vel $\frac{1}{3}$. erit dignitas reciproca priorum, nempe x^{-z} erit vel $\frac{1}{x}$ vel $\frac{1}{x^3}$ vel $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

5 secundum *(1)* rationem *(2)* numerum *L* 6 ut *(1)* | z *streicht Hrsg.* | ad | ω *streicht Hrsg.* | *(2)* ω *L* 6 f. exemplis. | Ponamus *(1)* Cubos | seu *(a)* potentiam, cuius *(b)* potentias, qvarum exponens z *erg.* | ipsorum BC, (B)(C) esse inter se, ut rectas AB, A(B) sive *(2)* potentias qvarum exponens *streicht Hrsg.* | *L* 8 Si *(1)* potentiae ordinatarum sint ut potentiae abscissarum erit intervallum tangentis ab ordinata sumtum *(2)* dignitates *(a)* qv *(b)* qvaedam ordinatarum sint ut dignitates *(3)* potentiae *L* 10 exponens *(1)* potentiae ordinatarum ad exponentem potentiae *(2)* ex *(3)* dignitatem ordinatarum ad exponentem dignitatis *(4)* potentiae *L* 11 f. abscissarum. *(1)* Ut si sint Cubi *(2)* | Potentiam ... se *erg.* | D i g n i t a t e m *L* 13 Cubus *(1)* a AB, est et eius dignitas, Per cubum autem *(2)* numeri *L*

12 f. D i g n i t a t e m vocant: z. B. M. Ricci, *Exercitatio geometrica*, 1668, def. 1, S. 1 [Marg.] u. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 101-116 [Marg.]; vgl. VII, 4 N. 3_2 S. 52.

Quae omnia ex eo patent, quod Logarithmorum subtractio significat divisionem numerorum, et divisio Logarithmorum extractionem radicum numerorum.

Si ratio ordinatarum sit multiplicata rationis abscissarum secundum numerum $\frac{z}{\omega}$. portio axis intercepta inter tangentem et ordinatam, erit ad abscissam seu portionem axis inter verticem et ordinatam ut ω ad z.

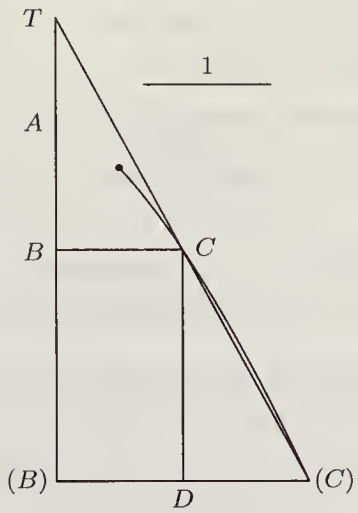
Sint exempli causa quadrata ordinatarum $BC_{[,]}(B)(C)$ ut cubi abscissarum AB, $A(B)$. Ergo ipsae ordinatae erunt ut radices quadraticae cuborum abscissis. Radicis autem quadraticae exponens est $\frac{1}{2}$. Cubi exponens est 3. Ergo radicis quadraticae ex cubo exponens est $\frac{3}{2}$. Erit ergo ratio ordinatarum inter se in ratione abscissarum secundum numerum $\frac{3}{2}$ multiplicata. Hoc posito si sit TB ad abscissam AB, ut 2 ad 3 ducta ordinata BC, ajo junctam TC tangere curvam in C.

Si curva $C(C)$ esset parabola cubica, et ordinatae essent in triplicata abscissarum

---

12–470,7 *Am Rande:* Quae de parabola Cubica diximus ad quadraticam applicare facile est, substituto numero 2. in locum numeri 3. consulto omissimus quam ut quique dicta a nobis suo marte in ea quippe jam cognita experiatur rem facilius intelligat.

2 f. numerorum. *(1)* | Sint linearum BC, (B)(C) dignitates exempli causa cubi *streicht Hrsg.* | *(2)* Si *L* 3 ordinatarum | normalium *erg. u. gestr.* | sit *L* 3 f. secundum *(1)* numerum *(a)* $\frac{\omega}{z}$ *(b)* $\frac{z}{\omega}$ *(2)* numerum $\frac{z}{\omega}$. *(a)* abscissa erit *(b)* portio axis | intercepta *erg., gestr. u. wieder gültig gemacht* | inter *L* 6 causa *(1)* cubi abscissarum *(2)* Cubi ordinatarum BC, (B)(C) ut qvadrata abscissarum AB, A(B) *(a)* exponens *(b)* ideo assumta parametro *(aa)* f erit aeqvatio haec: $fx^2 \sqcap y^3$ *(aaa)* sive *(aaaa)* f ad y in *(bbbb)* $\frac{f}{y} \sqcap \frac{y^2}{x^2}$ *(bbb)* id est rectangulum solidum sub parametro et qvadrato ordinatae aeqvabitur cubo *(aaaa)* ab *(bbbb)* abscissae, vel si mavis, erit $\frac{f}{y} \sqcap \frac{y^2}{x^2}$ id est parameter ad abscissam in *(aaaaa)* duplicat⟨ione⟩ *(bbbbb)* duplicata ra *(bb)* unitate 1 erit aeqvatio haec: $1x^2 \sqcap y^3$ id est *(aaa)* si parameter sit 1 *(bbb)* si parameter sit 1 et qvadratum ordinatae in numeris expressae, aeqvabitur cubo abscissae etiam in numeris expressae. *(aaaa)* qvae aeqvatio etiam *(bbbb)* vel qvod idem est erit $x \sqcap \sqrt[2]{y^3}$ sive | ordinata *erg.* | aeqvabitur radici qvadraticae ex cubo abscissae. est autem ut constat Cubi exponens 3. et radicis qvadraticae $\frac{1}{2}$. *(aaaaa)* num *(bbbbb)* $\sqrt[2]{}$ *(ccccc)* $\sqrt[2]{}$ at *(ddddd)* ideo erit $x \sqcap$ *(aaaaaa)* $y^{\frac{3}{2}}$ *(bbbbbb)* $y^{\frac{3}{2}}$ *(3)* qvadrata *L* 12 essent *(1)* ut Cubi abscissarum *(2)* in *L*



[*Fig. 12a*]

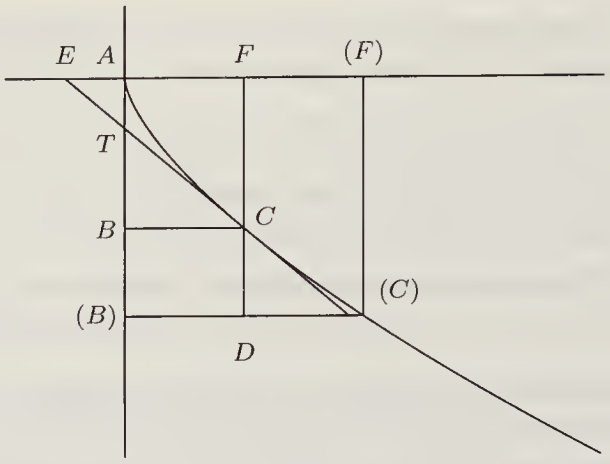


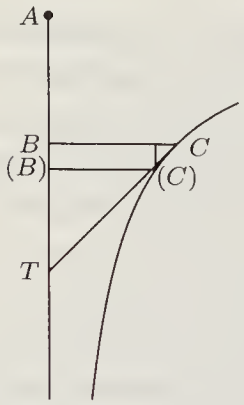
fig. 1.

[*Fig. 12b*]

ratione, seu ut earum Cubi foret ratio ordinatarum multiplicata rationis abscissarum secundum numerum $\frac{3}{1}$ et erit TB ad AB ut 1 ad 3. Contra imo si contingat ordinatas $FC_{[,]}(F)(C)$ esse in submultiplicata ratione abscissarum $AF_{[,]}A(F)$ secundum numerum $\frac{3}{1}$ id est in ratione subtriplicata, tunc dici poterit esse ut eas in multiplicata ratione abscissarum secundum numerum $\frac{1}{3}$. Adeoque si EC tangat, erit EF ad AF ut 3 ad 1, et theorema nostrum eodem modo locum habebit. Et in his quidem exemplis tantum directa ratio fuit, quod si ordinatae sint in reciproca multiplicata aut submultiplicata ratione abscissarum, idem habebit locum. Tantum enim punctum E vel T in axe non versus verticem sed in partes contrarias sumetur. Uti si curva $C(C)$ esset Hyperbola Conica, et A centrum, quod hic ut verticem considero, id est ut initium abscissarum, constat esse BC ad $(B)(C)$ in reciproca ratione AB ad $A(B)$, sive ordinatas esse in ratione reciproca abscissarum secundum numerum $\frac{1}{1}$ multiplicata, ergo ducta tangente CT, quae axi,

7 modo *(1)* accommodabitur *(2)* locum *L*

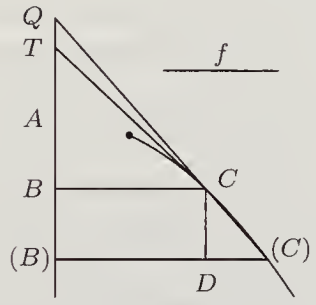
1 *Fig. 12a*: Leibniz hat in den Figuren 12a, 14 u. 15 nachträglich den Bogen AC teilweise gestrichenen. 1 *Fig. 12b*: Eine fragmentarische gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 13*]

(ut hic semper appello rectam cui ordinatae applicantur) id est hoc loco asymptoto Hyperbolae, occurrat in T. erit TB aequalis ipsi AB scilicet puncto T in aversas ab A partes sumto. Quod si sumatur curva cujus ordinatae sint in reciproca ratione ordinatarum Parabolae Conicae ad axem; seu in ratione abscissarum subduplicata reciproca, erit quemadmodum in parabola TB. dupla AB, eo tantum discrimine, quod in parabola ubi ratio est directa TB sumitur a B versus A. Hic vero ubi est reciproca, TB sumitur inde a B. in partes contrarias seu aversas ab A. Exemplis haec necessarium fuit explanare, tametsi enim peritis artis analyticae familiaria sint, aliis tamen non ita expedita videntur.

Nunc ad demonstrationem veniemus, quam in uno alterove exemplo oculis subjectam in omni alio locum habere docebimus.



[*Fig. 14*]

Sit curva $C(C)$ Parabola aliqua ex infinitis exempli causa Cubica, vertex A. abscissa portio scilicet axis initium a puncto fixo seu vertice capiens, AB; ordinata BC. et sint exempli causa quadrata ordinatarum $BC_{[,]}(B)[(C)]$ ut Cubi abscissarum AB, $A(B)$, et sit parameter quaedam forinsecus assumta f, tunc ex natura Parabolae Cubicae, erit rectangulum solidum sub Quadrato a BC. in f. aequale Cubo ab AB. et similiter rectangulum solidum sub Quadrato a $(B)(C)$ in f aequale Cubo ab $A(B)$. Ita enim erit Quadratum BC in f ductum; ad quadratum $(B)(C)$ in f ductum, seu demta communi altitudine, quadratum BC ad quadratum $(B)(C)$, erit ut Cubus AB ad Cubum $A(B)$ quemadmodum Curvae natura postulat. Quod si ad Quadratoquadratum aliasque dimensiones in aliis altiorum graduum Parabolis ascendendum sit, eadem habebunt locum. Re ad numeros revocata nempe hoc loco si certa quadam unitate assumta, ut pede, valor rectarum, $AB.\, A(B).\, BC.\, (B)(C).\, f.$ in numeris ineatur aut initus suppo-

5 Conicae *erg. L* 7 parabola *(1)* T cadit inter A et B *(2)* ubi *L* 12 alterove *erg. L* 13 habere *(1)* evincemus *(2)* docebimus *L* 18 A(B), *(1)* tunc *(2)* appellemus AB vel A(B) *(a)* x et BC vel (B)(C) vocemus y *(b)* y et BC vel (B)(C) vocemus x eri *(3)* et *L* 19 f. Cubicae, *(1)* erit fx^2, rectangulum solidum sub parametro et qvadrato ordinatae, aeqvale ipsi y^3 cubo ab abscissa. *(2)* erit *(a)* f A *(b)* f BC *(c)* f in Qvadr. a BC. aeqvale Cubo AB. et f in Qvadr. *(d)* rectangulum *L* 28 pede, *(1)* valor abscissarum AB in valorem *(2)* valor *L* 28–472,1 ineatur | aut ... supponatur *erg.* |, *(1)* erit *(2)* tunc *L*

natur, tunc numerus ipsius BC, quadratus, ductus in numerum ipsius f, erit aequalis numero ipsius AB. cubato. Quae per numeros expressio (rationales an irrationales nil refert) utique in altioribus quoque dimensionibus habet locum, quia etsi nullum sit spatium quadrato-quadratum, aut surdesolidum, numeri tamen hujusmodi exhiberi possunt. Jam compendii causa AB vocemus y. et BC, x. Erit fx^2 aequal. y^3. Porro differentia duarum abscissarum AB et $A(B)$ sit $B(B)$ quam vocabimus b. et duarum ordinatarum BC et $(B)(C)$ sit $D(C)$, quam vocabimus d. Erit $A(B)$ aequal. $y + b$ et $(B)(C)$ aequal. $x + d$. Adeoque $y^3 + 3y^2b + 3yb^2 + b^3$ aequal. $fx^2 + 2fxd + fd^2$. Porro puncta $B.(B)$ et per consequens $C.(C)$ tam vicina sibi sumi possunt, ut $b.d$ differentiae ordinatarum et abscissarum sint minores proposita quantitate. Et chorda duo curvae puncta connectens, proposita quantitate minor sit, adeoque et juncta $(C)CQ$. axi occurrens in Q. a tangente TC minus differat quam quantitas aliqua proposita, (quippe cum ipsa $QC(C)$ parte sui $C(C)$ minore quam quantitas proposita intra curvam cadat); et denique recta quoque TB a recta QB minus quam assignata quantitas differat. Quod si jam ostendam, puncta $C.(C)$ tam propinqua sumi posse, ut non haec tantum omnia contingant, sed et differentia ipsius QB, adeoque et ipsius TB; a $\frac{3}{2}AB$ minor proposita aliqua quantitate reddatur, sequetur punctis B et (B) adeoque C et (C) coincidentibus, differentiam inter TB, et $\frac{3}{2}AB$ minorem fore quavis assignabili quantitate. Nam punctis non coincidentibus; fieri potest minor assignabili quantitate. Et punctis coincidentibus adhuc minor quam punctis [non] coincidentibus. Quod rigorose ostendi posset ope motus, ubi quid semper accedat continue, utique cum attingit, omnium minimum. Verum cum haec rigorosa opus habeant demonstratione; nunc contenti erimus Quadratura figurarum rationalium directarum.

4 surdesolidum, *(1)* dantur tamen | in *erg.* | numeris *(2)* numeri *L* 8 f. et ... C.(C) *erg. L* 9–11 abscissarum *(1)* fiant *(2)* sint minores *(a)* qvolibet numero proposito *(b)* | qvalibet *gestr.* | proposita qvantitate. *(aa)* adeoqve *(bb)* et segmentum *(cc)* et proinde *(dd)* et ... connectens, | qvalibet *gestr.* | proposita *L* 11 juncta *(1)* C(C)T, axi occurrens in T. *(2)* C(C)Q. *L* 11 a *(1)* qvantitate *(2)* tangente *L* 13 minore *(1)* qvavis qvantitate *(2)* qvam *L* 13 cadat *(1)* .) Qvod si jam ostendam, si puncta C.(C) satis vicina assumantur, etiam illud effici posse, ut TB *(a)* sit minor *(b)* a r *(2)*); et *L* 14 ostendam, *(1)* intervallum *(2)* CC *(2)* puncta *L* 16 minor *(1)* qvavis *(2)* proposita *L* 18 f. coincidentibus; *(1)* poterit fieri minor *(2)* fieri potest | minor *erg. Hrsg.* | assignabili *L* 21 minime *L ändert Hrsg.* 22–473,1 directarum *(1)* Curva *(2)* Figura Analytica *(3)* C u r v a r a t i o n a l i s est, *(a)* cum absci *(b)* cuius *(aa)* ordinata qvaedam *(bb)* axis aliqvis ⟨it⟩ *(cc)* directrix *L*

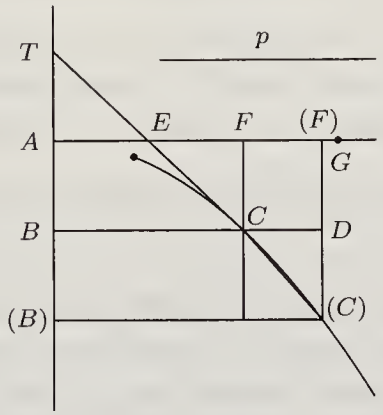
22 demonstratione: vgl. N. 69 S. 481 Z. 6–21.

Curva rationalis est, cujus directrix aliqua ita assumi potest, ut datis abscissis et parametris in numeris rationalibus, etiam ordinatae normales in numeris haberi possunt. Et hoc fit cum valor ordinatae haberi potest pure, sine ulla radicum extractione. Talis curva exempli causa est parabola $DC(C)$ cujus verticem D tangat recta $DB(B)$. Ea si pro directrice sumatur et in eam ordinatae normales demittantur $BC,(B)(C)$ et abscissae sint $DB, D(B)$ erit BC aequal. $\frac{\text{Quad. } DB}{\text{paramet.}}$. Et hoc statim agnosci potest ex aequatione quando scilicet alterutra incognitarum, quae ad aequationem curvae naturam exprimentem serviunt, ad nullam potestatem ascendit, aut si ascendit, deprimi potest. Ut hoc loco si $DB \sqcap y.$ et $BC \sqcap x.$ et parameter parabolae $f.$ erit fy aeq. $x^2.$ adeoque $y \sqcap \frac{x^2}{f}$. Tales sunt omnes curvae, in quibus ordinatae sunt in directa aut reciproca ratione multiplicata aut submultiplicata ordinatarum, quales ex tabula analyticarum simplicium excerpi possunt. Ut quarum aequationes sunt: $x \sqcap y.$ $fx \sqcap y^2.$ $f^2x \sqcap y^3.$ $f^3x \sqcap y^4.$ etc. in quibus ordinatae x sunt in ratione eadem, duplicata, triplicata, quadruplicata etc. abscissarum y. Et ad has eae facile reduci possunt, in quibus ordinatae sunt in ratione subduplicata, subtriplicata, abscissarum x. Nam si sit $y \sqcap \sqrt[2]{fx}$ vel $y \sqcap \sqrt[3]{f^2x}$ vel $y \sqcap \sqrt[4]{f^3x}$ etc. utique tollendo signum radicale, facta utrobique in se ipsum multiplicatione, redibunt aequationes proxime praecedentes; huc pertinent etiam eae in quibus ordinatae sunt in abscissarum ratione multiplicata aut submultiplicata reciproca, ut $x \sqcap \frac{f^2}{y}$ $x \sqcap \frac{f^3}{y^2}$ $x \sqcap \frac{f^4}{y^3}$ etc. vel $y \sqcap \sqrt[2]{\frac{f^3}{x}}$ $y \sqcap \sqrt[3]{\frac{f^4}{x}}$ etc. Praeterea ex his infinitis modis componi possunt aequationes alterutram incognitarum habentes rationalem, ut si $xa^2 + xy^2 \sqcap ay^2$, nam fiet $x \sqcap \frac{ay^2}{a^2+y^2}$. Nam posita parametro a, abscissa y, ordinata x, utique patet parametro et abscissa in numeris data, etiam generaliter x in numeris habitum iri.

2 et parametris *erg. L* 3 f. extractione *(1)* ut si sit aeqvatio *(a)* ay ⊓ x². erit y *(b)* ay aeqval. x² erit y aeqval. $\frac{x^2}{a}$. adeoqve si *(2)* Talis *L* 6 $\frac{\text{Qvad. BC}}{\text{paramet.}}$ *L ändert Hrsg.* 14 facile *erg. L* 18 in *(1)* harum *(2)* abscissarum ratione *(a)* directa *(b)* multiplicata *L* 20 si *(1)* | sit *streicht Hrsg.* | x ⊓ *(a)* $\frac{fx^2}{x^2+a}$ *(b)* $\frac{ax^2}{x^2+y^2}$ *(2)* xa² *L* 21 posita *(1)* diametro *(2)* parametro *L* 22 generaliter *erg. L* 22–474,1 iri. *(1)* Porro *(a)* curva *(b)* rationales curvae hanc habent praerogativam ut qvadra *(2)* Curva Analytica simplex rationalis *(3)* In *L*

In Curva analytica simplice rationali intervallum tangentis ab ordinata sumtum in directrice est ad abscissam ut exponens dignitatis secundum quam sumuntur abscissae ad exponentem dignitatis secundum quam ipsis proportionales sumuntur ordinatae.

Explanandum initio, deinde demonstrandum erit theorema: Generalissima enim vix nisi praemissis exemplis intelliguntur.



[*Fig. 15*]

Sit Curva Analytica Simplex rationalis $C(C)$. Sit AB vel FC x. et AF vel BC ⊓ y. parameter vero p et aequatio naturam curvae explicans (per dicta in definitionibus Curvarum simplicium et rationalium) $p^v x^{z-v}$ ⊓ y^z. Ajo esse EF ad AF ut $z-v$ ad z. et TB ad AB ut z ad $z-v$. Quod theoremati consonat, sit enim exempli causa z ⊓ 2. et v ⊓ 1 fiet $z-v$ ⊓ 1 et aequatio erit px ⊓ y^2 ad parabolam id est erunt diversae x inter se, nempe FC, et $(F)(C)$ ut diversae y^2, seu ut quadrata ab $AF, A(F)$. Ergo exponens secundum quem sumuntur ipsae x. est 1. Sumuntur enim simpliciter nec ad potentiam ullam assurgunt, at exponens dignitatum ipsis x proportionalium ad quas assurgunt y, est hoc loco 2. Ergo si x vel FC sumantur pro ordinatis ad directricem $AF(F)$ et AF seu y pro abscissis, erit EF, intervallum tangentis CE, ab ordinata CF sumtum in directrice $AF(F)$ ad abscissam AF, ut 1. ad 2. Contra si AB vel x sumantur

---

19–475,2 *Nebenbetrachtung:* EF ⊓ $\frac{1}{2}AF$. TB ⊓ $2AB$. Ergo EF ⌢ TB ⊓ $FABC$. Ergo earum ductus in se invicem semper aequatur momento figurae.

1 f. in *(1)* axe *(2)* directrice *(a)* secundum qvam *(b)* est ad abscissam *(aa)* ut *(bb)* reciproce *(cc)* | ut *streicht Hrsg.* | *(aaa)* potentia *(bbb)* | exponens *streicht Hrsg.* | *(aaaa)* ordinatae ad ex *(bbbb)* abscissae ad exponentem ordinatae in aeqva *(dd)* ut *L* 4 f. Explanandum ... theorema: *(1)* Generalia *(2)* Generalissima ... intelliguntur *erg. L* 9 f. rationalium) *(1)* $x^{\langle 1\rangle}$ *(2)* a^z *(3)* $p^{z-1}x^1$ ⊓ y^z. posito z. numero qvocunqve, *(a)* ajo esse *(b)* et *(aa)* $z-v$ *(bb)* differentiam inter z et v unitate ajo esse EF ad AF ut 1. *(4)* $p^v x^{z-v}$ ⊓ y^z. *(a)* erit *(b)* ajo *L* 12 z ⊓ 2. *(1)* fiet $z-1$ ⊓ 1 *(2)* et *L* 13 f. ad parabolam *erg. L* 18 exponens *(1)* | secundum *streicht Hrsg.* | qvem sumuntur *(a)* y *(b)* x *(2)* ad qvem assurg *(3)* dignitatum *L*

pro abscissis[,] BC seu Y. pro ordinatis[,] $AB(B)$ pro directrice[,] TB intervallum tangentis TC, ab ordinata BC sumtum in directrice $AB(B)$ erit ad AB abscissam, ut 2 ad 1. Si $C(C)$ esset parabola Cubica foret $EF \sqcap \frac{1}{3}AF$, et $TB \sqcap 3AB$. Si esset v. major quam z. tunc $z - v$. foret quantitas negativa, et proinde curva erit ex numero reciprocarum, nimirum si sit: $p^v x^{z-v}$ aequ. y^z et v major quam z. idem erit ac: $\frac{p^v}{x^{v-z}}$ aeq. y^z. Ut si $v \sqcap 2$. et $z \sqcap 1$. fiet $p^v x^{z-v} \sqcap y^z$ idem quod $p^2 x^{-1}$ aeq. y^1 sive $\frac{p^2}{x}$ aeq. y. sive p^2 aeq. yx. Posito ergo exempli causa in fig. curva aliqua reciproca $C(C)$, directrice GF, puncto fixo G. Abscissa GF aeq. x. ordinata FC aeq. y. v aeq. 2. et z aeq. 1. Adeoque posito $p^v x^{z-v}$ aeq. y^z idem esse quod p^2 aeq. yx. Quo facto curva $C(C)$ erit Hyperbola, ajo fore (ex theoremate) EF intervallum tangentis CE, ab ordinata FC, in directrice GF sumtum, ad GF abscissam a puncto fixo G incipientem, ut est $z - v$ ad z. id est hoc loco ut $1 - 2$ ad 1. seu ut -1 ad 1. id est GF et FE erunt aequales, tantumque signum negativum denotat FE non versus G ut abscissam GF, sed in contrarias partes fuisse sumendam. Idque etiam in Hyperbola verum esse aliunde constat.

Demonstratio: Sit curva Analytica simplex rationalis $C(C)$. Directrix $AF(F)$. Punctum fixum A. Abscissa ex directrice, a puncto fixo incipiens AF. $A(F)$. Ordinata FC. $(F)(C)$. Sitque $FC,\overline{\overline{z-v}}$ ad $(F)(C),\overline{\overline{z-v}}$; ut $AF,\overline{z}$ ad $A(F),\overline{z}$ dignitates scilicet ordinatarum secundum exponentem $z - v$ sumtae ut dignitates abscissarum secundum exponentem z sumtae et z. atque v, numeri integri et differentia inter z. et v. sit 1. vel si differentia inter z. et v sit major quam 1. modo saltem z sit 1. Alterutrum enim necesse est, ut curva sit rationalis, seu ut alterutra indeterminatarum, abscissa scilicet vel ordinata ad nullam

7 ergo *(1)* | GF *(a)* ⊓ *(b)* aeq. x et FC aeq. y et | posito esse *erg.* | $p^v x^{z-v}$ aeq y^z idem qvod p^2 aeq. yx. *streicht Hrsg.* | *(aa)* erit *(bb)* erit EF ad GF, ut *(2)* exempli *L* 15 C(C). *(1)* directrix AB(B) *(a)* abscissa ab ip *(b)* punctum fixum A. abscissa ex directrice a puncto fixo incipiens AB. *(aa)* ordinata *(bb)* vel A(B), | seu x; *erg. u. gestr.* | ordinata BC vel (B)(C), *(aaa)* y. *(bbb)* Qvod si jam sit qvae *(ccc)* ajo si sit AB^{z-v} ad $A(B)^{z-v}$ ut *(2)* directrix *L* 16 f. FC. | F(C) *ändert Hrsg.* | *(1)* ajo po *(2)* posito *(3)* sitqve *(a)* ut ⟨s⟩ *(b)* $FC,\overline{\overline{z-v}}$ ad $(F)(C),\overline{\overline{z-v}}$; *(aa)* ad *(bb)* ut $AB,\overline{z}$ ad $A(B),\overline{z}$ id est potentiae ipsarum abscissarum *(c)* $FC,\overline{z}$ ad $(F)(C),\overline{z}$ *(d)* $FC,^{z-v}$ ... $A(F),\overline{z}$ *(aa)* potentiae *(bb)* dignitates ipsarum abscissarum secundum exponentem *(cc)* dignitates scilicet *(aaa)* absci⟨ss⟩arum *(bbb)* ordinatarum ad dignitates ordinatarum secundum exponentem z − v sumtae *(ccc)* abscissarum secundum exponentem z sumtae ut dignitates ordinatarum secundum exponentem z − v sumtae *(ddd)* ordinatarum *L*
21 alterutra *(1)* incognitarum *(2)* indeterminatarum *L*

aliam quam simplicem dignitatem assurgat; ac proinde in numeris haberi possit. His positis ajo rectam $EC(C)$ quae curvam in duobus punctis $C.$ $(C).$ secet duci non posse, si sit $CD.$ differentia ordinatarum et curvam in puncto C tangat recta EC, directrici occurrens in $E.$ Ajo EF intervallum tangentis EC ab ordinata FC sumtum in directrice; fore ad AF, abscissam, ut exponens $z - v$ secundum quem sumtae sunt dignitates abscissarum, ad exponentem z secundum quem sumtae sunt dignitates ordinatarum.

Ponatur EF talis assumi qualem diximus esse ad $AF.$ Ostendendum est junctam EC tangere curvam in puncto $C.$ Unde e converso sequetur si EC tangere supponatur, ipsam EF esse qualem diximus, alioquin duae rectae eandem curvam in eodem puncto tangent quod absurdum esse dudum ostensum est. Ex assumta autem EF qualem diximus ductam EC tangere sic ostendemus; ponatur non esse tangens, ergo secabit adhuc alibi ut in $(C).$ Ducatur ex (C) ordinata $(C)(F)$, prior abscissa AF appelletur x posterior vero $A(F)$ sitque F punctum ipsi A vicinius seu inter A et (F) nam eligere possumus, erit $A(F)$ aequal. $x + f.$ posita $F(F)$ earum differentiam, vocari $f.$ ut in figura. Eodem modo ordinata FC posita $y.$ et differentia ejus ab alia $(F)(C)$, nempe $D(C)$ posita $d.$ erit $(F)(C)$ aequal. $y \pm d.$ Ponamus jam differentiam inter z et v ut scilicet valor ordinatae pure et rationaliter haberi possit et sit primum z major quam v, seu $z - v$, sit 1. erit $(F)(C)$ ad FC ut $A(F)^{\frac{z}{-}}$ ad AF^z seu erit y ad $y + d$ ut x^z ad $\overline{x + f}^{,\frac{z}{-}}$, id est erit $y + d$ ad y ut

1–3 possit *(1)*, tunc ajo fore *(2)* et *(3)* His ... punctis *(a)* secet *(b)* C.(C) ... posse, si *(aa)* sit demissa *(bb)* sit ... ordinatarum | ad *ändert Hrsg.* | curvam *L* 5 ut *(1)* exponens secundum qvem *(2)* z⟨−v⟩ *(3)* exponens | z − v *erg.* | secundum ... sunt *(a)* ordin *(b)* abscissae *(c)* dignitates *L* 7 ostendendum | tantum *gestr.* | est *L* 13 sitqve F *(1)* x ± *(a)* b *(b)* f. posita F(F) earum differentiam, *(aa)* f, *(bb)* vocari f. ubi si qvidem A(F) sit major qvam AF | erit A(F) aeqval x + f. *streicht Hrsg.* | Si sit minor erit x − f. Sumamus autem facilitatis causa *(aaa)* calculum *(bbb)* casum priorem, qvoniam omnia eodem modo intelligi possunt in posteriore adeoqve sumamus A(F) aeqval x + f. *(2)* punctum *L* 14 figura. *(1)* Vici *(2)* Eodem modo *(a)* abscissa prio *(b)* ordinata priore appellata *(3)* Eodem *L* 16 jam *(1)* vel z − v esse ⟨1.⟩ vel *(2)* z − v ess *(3)* exponentem | dignitatis *erg.* | ordinatarum | seu z − v *erg.* | esse *(a)* + 1 vel −1 *(b)* ±1 *(4)* differentiam *L* 17 f. possit | et ... qvam v, *(1)* ut ratio sit direct *(2)* seu ... 1. *erg.* | erit *(a)* $FC^{\pm 1}$ ad $(F)(C)^{\pm 1}$ *(b)* FC ad (F)(C) ut AF^z ad $A(F)^{\frac{z}{-}}$ seu ut *(c)* (F)(C) ad FC ut $A(F)^{\frac{z}{-}}$ ad AF^z seu *(aa)* erit *(aaa)* AF^z ad $A(F)^z$ *(bbb)* AF *(bb)* erit *(aaa)* $\langle x^z \rangle$ *(bbb)* $y \pm d$ ad y *(ccc)* y ad *(aaaa)* $y \pm d$ ut x^z ad $\overline{x \pm f}^z$, id est *(aaaaa)* ut

$$\begin{cases} x & \text{ad } x \pm f \\ x^2 & \text{ad } x^2 \pm 2xf + f^2 \\ x^3 & \text{ad } x^3 \pm 3x^2f + 3xf^2 \pm f^3 \\ x^4 & \text{ad } x^4 \pm 4x^3f + 6x^2f^2 \pm 4xf^3 + f^4 \end{cases}$$

(bbbbb) vel ut *(ccccc)* erit $y^{\pm 1}$ ad $\overline{y \pm d}^{\pm 1}$ *(bbbb)* y + d *L*

$$\left\{\begin{array}{l} x+f \\ x^2+2xf+f^2 \\ x^3+3x^2f+3xf^2+f^3 \\ x^4+4x^3f+6x^2f^2+4xf^3+f^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ ad } x^z \text{ prout scilicet numerus } z \text{ est } \left\{\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et dividendo d ad y, ut

	$\pm f$ ad x	vel $\pm 2xf+f^2$ ad x^2	vel $\pm 3x^2f+3xf^2\pm f^3$ ad x^3	etc.
Ergo erit ratio d ad y major ratione	$*$	$\pm 2xf$ ad x^2	vel $\pm 3x^2f$ ad x^3	et⟨c⟩.
id est diversa a ratione		$\pm 2f$ ad x	vel $\pm 3f$ ad x	etc.

Quod est absurdum et contra constructionem. Debet enim ei esse aequalis quod sic ostendo. Ob Triangula similia $EFC, CD(C)$ erit $D(C)$ ad FC ut CD ad EF, est autem EF ad AE, ut $z-v$ ad z ex constructione, id est, quia $z-v$ aequal. 1. ut 1 ad z. Adeoque ratio composita ex CD ad EF, et EF ad AE, seu ratio CD ad AE aequalis compositae ex $D(C)$ ad FC et 1 ad z. Adeoque $D(C)$ ad FC aequalis compositae ex CD ad AE, et z ad 1. Ergo $D(C)$ ad FC aequalis rationi CD per z ad AE per 1. Et quia $D(C)$ est $\pm d$. FC est y. AE est x. CD est aequal. $F(F)$ vel f. et z est 2. 3. 4. 5. erit ratio d ad y

1 *Zur gestrichenen 1 in der rechten Spalte der Tabelle, gestrichen:* non incipio

1 *In der rechten Spalte:* 1 *gestr. L* 5 f. etc. *(1)* Jam *(a)* ob triangula similia *(b)* ex hypothesi *(c)* ob triangula similia EFC, CD(C) erit *(aa)* f *(bb)* CD seu f ad D(C) *(aaa)* seu *(bbb)* seu d. ut EF ad FC, seu *(aaaa)* ut x *(bbbb)* erit f ad d ut x ad y ergo dividendo y *(2)* et dividendo *(a)* ±d *(b)* d *L* 8 erit | ratio *erg.* | *(1)* ±d *(2)* d ad y *(a)* major *(b)* diversa a *(c)* major *L* 10 est *(1)* major *(2)* diversa *L* 12 contra *(1)* hypothesin *(2)* constructionem *L* 17 aeqvalis *(1)* CD in z ad AE in 1 *(2)* rationi CD *(a)* multiplicatae per z ad AE multiplicatae per *(b)* per *L*

6 $\pm f$: Im Unterschied zum vorhergehenden Text behält Leibniz im Folgenden die Doppelvorzeichen bei. 14 *AE*: Es müsste *AF* heißen. Leibniz verwendet die falsche Bezeichnung bis Z. 18. Die Verwechslung beeinträchtigt die Überlegung nicht.

aequalis rationi $2f$ vel $3f$ vel $4f$ etc. ad x. cum supra ostenderimus esse diversam, quod est absurdum. Absurdum ergo EC ad curvam pervenire in alio puncto praeterquam in C. Tangit ergo.

Aliter est casus cum v. major est quam z; adeoque $z - v$ est -1. Unde $FC,^{\underline{z-v}}$ ad $(F)(C),^{\underline{z-v}}$ est idem quod $FC,^{-1}$ ad $(F)(C),^{-1}$ ac proinde idem quod $\frac{1}{FC,^{+1}}$ ad $\frac{1}{(F)(C),^{+1}}$ (quoniam exponentium sive Logarithmorum subtractio significat divisionem quantitatum, et generaliter a^{-z} idem est quod $\frac{1}{a^z}$). Adeoque omissa 1. in exponente erit $FC,^{-1}$ ad $(F)(C),^{-1}$ idem quod $\frac{1}{FC}$ ad $\frac{1}{(F)(C)}$ id est reciproce ut $(F)(C)$ ad FC. Ergo cum differentia inter z et v est 1. et v est major quam z et FC. $(F)(C)$ sunt ordinatae ex curva $C(C)$ in directricem $G(F)F$ demissae et $GF, G(F)$ abscissae ex directrice in puncto fixo G incipientes; tunc si ex natura curvae sint $FC,^{z-v}$ ad $(F)(C),^{z-v}$ ut GF^z ad $G(F)^z$ idem erit ac si dicatur reciproce fore $(F)(C)$ ad FC ut GF^z ad $G(F)^z$. Hoc posito jam similiter demonstrabo fore EF intervallum tangentis EC et ordinatae FC in directrice sumtum, ad GF abscissam, ut $z - v$ ad z. id est hoc loco ut -1 ad z. id est fore EF aequalem $\frac{-1}{z}, GF$ scilicet ipsi aequalem aut partem ejus dimidiam, vel tertiam, etc., sed ita tamen ut punctum E non sumatur versus G, sed in contrariam partem, ob signum negativum. Hoc ergo si in reciprocis evicerimus, hoc quoque casu Theorema erit comprobatum.

1 esse *(1)* majorem *(2)* diversam *L* 2 EC *(1)* curvam *(a)* tangere *(b)* secare in duobus punctis C *(2)* ad *L* 3 f. ergo. *(1)* Superest casus curvarum reciprocarum, cum *(2)* Aliter est casus *(a)* | cum *streicht Hrsg.* | z − v est −1. seu *(b)* cum ... z; *(aa)* sive cum ordinatae sunt in reciproca ratione *(aaa)* abscissarum *(bbb)* potentiarum ab abscissis, ut si sit *(bb)* adeoqve *L* 4 est −1. *(1)* et $FC^{\underline{z-v}}$ est FC^{-1} *(a)* id est FC *(b)* est autem FC^{z-v} idem qvod $\frac{1}{FC^{v-z}}$ *(2)* Unde *L* 6 f. divisionem | *(1)* numerorum *(2)* qvantitatum *erg.* |, et *L* 9 qvam z *(1)* FC erit *(2)* sitqve ex natura curvae $FC,^{z-v}$ ad $(F)(C)^{\underline{z-v}}$ ut *(3)* et *(a)* posita *(b)* positis FC. (F)(C) ordinatis et GF, G(F) abscissis *(c)* FC *L* 15 fore *(1)* GF z^{plam} id est *(a)* dup *(b)* simplam, 2^{plam} triplam *(2)* FC *(3)* EF *L* 15 eius *(1)* unicam, duplam *(2)* dimidiam *L*

$c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \overset{(1)}{\sqcap} la^2 + 2lab + lb^2$. $c^3 \overset{(2)}{\sqcap} la^2$. $3c^2d \overset{(3)}{\sqcap} 2lab$. Ex 1. $\odot \frac{c+d}{a+b} \overset{(4)}{\sqcap} \supset \frac{la+lb}{c^2+2cd+d^2}$. Ex 2. et 3. $3c^3+3c^2d \overset{(5)}{\sqcap} 2la^2+2lab$. Ergo $\frac{c+d}{a+b} \overset{(6)}{\sqcap} \frac{2la}{3c^2}$ ex 5. $\overset{(7)}{\sqcap} \frac{la+lb}{c^2+2cd+d^2}$ ex 4. Ex 3. $\frac{2la}{3c^2} \overset{(8)}{\sqcap} \frac{d}{b}$. Ergo $\frac{c+d}{a+b} \overset{(9)}{\sqcap} \frac{d}{b}$. Ergo $\frac{c}{d} \overset{(10)}{\sqcap} \frac{a}{b}$. Si aequationis 4. termini in se invicem ducantur, fiet $\odot \supset \overset{(11)}{\sqcap} \frac{l}{c+d}$. Ergo $\frac{l}{c+d} \overset{(12)}{\sqcap} \odot^2$. At per 9, $\odot \overset{(13)}{\sqcap} \frac{d}{b}$. Ergo $\frac{l}{c+d} \overset{(14)}{\sqcap} \frac{d^2}{b^2}$. seu $\frac{l}{c+d} \overset{(15)}{\sqcap} \frac{c^2}{a^2}$. per 14 et 10. Ergo $la^2 \overset{(16)}{\sqcap} c^3 + c^2d$. Ergo per 2. fiet $c^2d \overset{(17)}{\sqcap} 0$. Quod est absurdum.

Si fuisset $c^2 + 2cd + d^2 \overset{(1)}{\sqcap} la + lb$. et $c^2 \overset{(2)}{\sqcap} la$. et $2cd \overset{(3)}{\sqcap} lb$. fiet $d^2 \sqcap 0$. Sed procedendo eodem modo: $\odot \frac{c+d}{a+b} \overset{(4)}{\sqcap} \supset \frac{l}{c+d}$. Ex 2 et 3 fiet $2c^2 + 2cd \overset{(5)}{\sqcap} la + lb$. Ergo $\frac{c+d}{a+b} \overset{(6)}{\sqcap} \frac{1l}{2c}$. Jam ex 3 est $\frac{1l}{2c} \overset{(8)}{\sqcap} \frac{d}{b}$. Ergo per 6 $\frac{c+d}{a+b} \overset{(9)}{\sqcap} \frac{d}{b}$. Ergo $\frac{c}{d} \overset{(10)}{\sqcap} \frac{a}{b}$. Si aequationis 4. termini in se invicem ducantur, fiet $\odot \supset \overset{(11)}{\sqcap} \frac{l}{c+d}$. Ergo $\frac{l}{c+d} \overset{(12)}{\sqcap} \odot^2$. At per 9 $\odot \overset{(13)}{\sqcap} \frac{b}{d}$. Ergo ut ante $c^2d \overset{(14)}{\sqcap} 0$.

Generali ergo Calculo inventa demonstratio impossibilitatis quandocunque exponentes potestatum differunt unitate tantum. Investigandum et in aliis casibus. Et quidem scimus impossibilitatem cum sibi proximi termini, quaeramus et cum a se invicem maxime remoti, pertinent ista ad artem tentamentorum.

Sit ergo $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \overset{(1)}{\sqcap} l^2a + l^2b$. $c^3 \overset{(2)}{\sqcap} l^2a$. et $3c^2d \sqcap l^2b$.

$c^3 + 3c^2d \sqcap l^2a + l^2b$ seu $3c^3 + 3c^2d \sqcap 2l^2a + l^2b$.
2 ... 2 ... $3c^2d$ $2\,l^2b$

$\frac{c^3}{3c^2d} \sqcap \frac{l^2a}{l^2b}$. Ergo $\frac{c}{3d} \sqcap \frac{a}{b}$. Ergo $\frac{c+d}{d} \sqcap \frac{3a+b}{b}$ et $\frac{c+3d}{[3]d} \sqcap \frac{a+b}{b}$. $3cd^2 + d^3 \sqcap 0$. Ergo $c \sqcap -\frac{d}{3}$. Ergo $\frac{c}{d} \sqcap \frac{-1}{3} \sqcap \frac{3a}{b}$. Ergo vel a vel b negativa quod est absurdum. Sed si

2 Ex 2. et 3.: Auf der rechten Seite der Gleichung (5) müsste $3la^2$ stehen. Dieser und analoge Fehler in den folgenden Beispielen beeinträchtigen die Rechnung bis Z. 18.

esset $\frac{c}{4d} \sqcap \frac{a}{b}$. et $6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$ fiet: $6c^2 + 4cd + d^2 \sqcap 0$. Ergo $4c^2 + 4cd + d^2 \sqcap -2c^2$. aequatio absolute impossibilis. Sed hoc credo particulare. Supra ex $3cd^2 + d^3 \sqcap 0$. sequitur $c + d \sqcap -2c$. Ex $6c^2 + 4cd + d^2 \sqcap 0$. sequitur: quad. $\overline{c+d} \sqcap -5c^2 - 3cd$. At quad. $\overline{c+d} \sqcap \frac{l^3a + l^3b}{\text{quad.}\,\overline{c+d}} \sqcap -5c^2 - 3cd$. $c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4, \sqcap l^3a + l^3b$. sive:

$4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4 \sqcap l^3b$. et $\frac{4c^3 + 6c^2d + 4cd^2 + d^3}{l^3} \sqcap \frac{b}{c}$. Ergo $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \sqcap \frac{bl^3}{c} - 3c^3 - 3c^2d - [c]d^2$.

$c^z \sqcap a^v$ et $dzc^{\overline{z-1}} \sqcap bv, a^{\overline{v-1}}$. Ergo $\frac{c}{zd} \sqcap \frac{a}{vb}$. Ergo $\frac{a}{c} \sqcap \frac{vb}{zd}$. $\frac{ad}{bc} \sqcap \frac{v}{z}$.

$b^b, \overline{b-a}^{\overline{b-a}} \sqcap c^b, \overline{a-c}^{\overline{b-a}}$

---

8 *Dazu am Rande:* $a \frac{a-b}{b} \quad \frac{a-b}{b} a$

---

3 $-3cd$: Es müsste $-2cd$ heißen. Der falsche Wert geht in die folgende Gleichung ein.

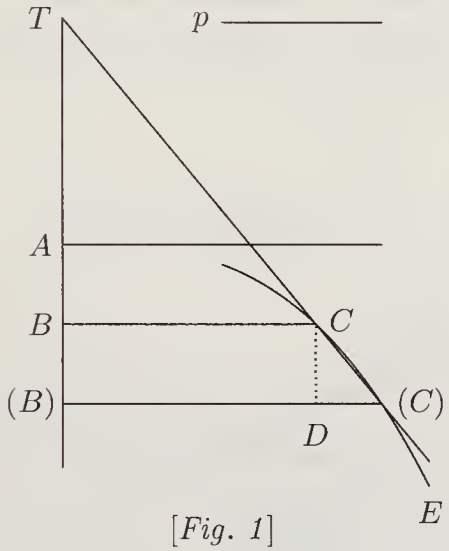
8 $b^b, \overline{b-a}^{\overline{b-a}}$: vgl. VII, 3 N. 65 sowie die Hinweise auf den Satz von Ricci in *LQK* prop. XV S. 56 bis 58.

69. DE TANGENTIBUS PARABOLOEIDUM

[Februar – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 17 Bl. 7–8. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 1487

Datierungsgründe: s. N. 68.



[*Fig. 1*]

Sit Parabola cubica $C(C)E$. Directrix $AB(B)$ ad quam ordinatae $CB.(C)(B)$. Punctum fixum A. Abscissae $AB.A(B)$. Recta $TC(C)$ secans curvam in punctis $C.(C)$. Sit AB aequal. x. BC aequal. y. $B(B)$ vel CD, aequal. f. $D(C)$ aequal. d. Erit $A(B)$ aequal. $x+f$. et $(B)(C)$ aequal. $y+d$. Denique $TB \sqcap t$. Jam ex natura Parabolae Cubicae: cujus parameter est p. erit p^2x aequal. y^3. et $\boxed{p^2x} + p^2f$ aequal. $\boxed{y^3} + 3y^2d + 3yd^2 + d^3$. Sit TB ad BC seu t ad y seu CD ad $D(C)$ sive f ad d ratio quae $3y^2$ ad p^2 seu quae $3y^3$ ad p^2y. seu quae $3p^2x$ ad p^2y, seu quae $3x$ ad y, erit t ad y ut $3x$ ad y. sive t aequal. $3x$. Cumque sint p^2x aequal. y^3. et p^2f aequal. $3y^2d$, his in aequatione p^2x+p^2f aequal. $y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3$ utrinque sublatis restabit $3yd^2 + d^3$ aequal. 0. Quod est absurdum. Impossibile est ergo rectam TC occurrere curvae in duobus punctis $C.(C)$. si TB aequal. $3AB$ seu t aequal. $3x$. Tanget igitur, quod erat demonstrandum.

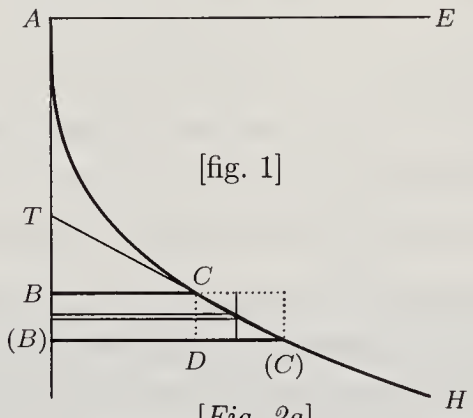
Ex hac demonstrandi forma etiam illud duco, si assumas etiam p^2f aeq. $3yd^2$ vel p^2f aeq. d^3, hoc enim reapse assumto eodem modo demonstrabitur TC consequenter

12 Deniqve TB ⊓ t *erg. L* 20 rectam *(1)* ex TC in *(2)* TC *(a)* secare jam rectam *(b)* occurrere *L* 21 f. demonstrandum. *(1)* The *(2)* Theorema: *(a)* Si *(b)* in Curvae | analyticae *erg.* | rationalis simplicis directrice *(aa)* secundum *(bb)* sumtum intervallum tangentis et ordinatae est ad abscissam, ut exponens dignitatis *(3)* Ex *L*

6–21 Sit ... demonstrandum: vgl. N. 68 S. 471 Z. 14 – S. 472 Z. 22. 17 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Figur den Bogen AC nachträglich teilweise gestrichen.

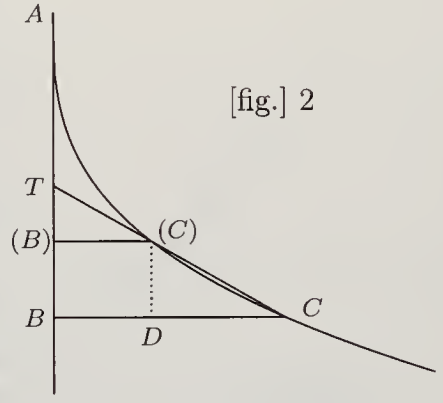
inventam tangere, jam unam curvam non nisi una tangit recta. Ergo necessario erit $\frac{f}{d}$ aeq. $\frac{d^2}{p^2}$. Sed hoc absurdum et falsum, et destruit consequentia hypothesin, imo directe contrarium concludit. Illud tamen hinc concludere poterimus nulla arte duci posse rectam $TC(C)$ ita curvam secantem in duobus punctis, ut sit f ad d. ut d^2 ad p^2. vel ut sit p ad $3y$ ut pf ad d^2.

Si sit Curva paraboloeides seu cujus ordinatae sint in multiplicata ratione abscissarum, secundum aliquem numerum exponentem[,] erit portio directricis inter tangentem et ordinatam ad idem curvae punctum concurrentes, intercepta, ad abscissam, seu portionem directricis inter punctum fixum, et ordinatam, interceptam, ut unitas ad numerum exponentem.



[fig. 1]

[*Fig. 2a*]



[fig.] 2

[*Fig. 2b*]

Sit Curva $C(C)$. Directrix $AB(B)$ ad quam ex curva ordinatae $BC, (B)(C)$. Ajo si sit semper BC ad $(B)(C)$ in duplicata (triplicata) aliave ratione AB ad $A(B)$ tunc fore TB portionem directricis intercepta[m] inter tangentem TC et ordinatam CB, ad AB. abscissam seu portionem quae inter A punctum fixum, et BC ordinatam, intercipitur,

2 aeq $\frac{d^2}{p^2}$ | seu $\frac{fd}{p^2}$ aeq. $\frac{f^2}{d^2}$ *gestr.* | sed *L* 5 f. ad d^2. | Lemma *gestr.* | Si *(1)* ordinat *(2)* si Curva *(a)* in qva *(b)* | paraboloeides seu *erg.* | cuius *L* 6 f. abscissarum | ex directrice *gestr.* |, secundum *L* 7 erit *(1)* intervallum tangentis et ordinatae *(a)* ejusdem *(b)* sumtum *(c)* ad idem | curvae *erg.* | punctum concurrentium, sumtum in directri *(2)* portio *L* 14 TB *(1)* intervallum *(2)* portionem *L*

6–10 Si ... exponentem: vgl. S. 491 Z. 5–9. 11 *Fig. 2a*, *Fig. 2b*: Leibniz bezeichnet die Figuren im Text ab S. 492 Z. 9 f. als fig. 1 u. fig. 2. Eine gestrichene Vorstufe zur Fig. 2a wird nicht wiedergegeben.

ut 1 ad 2 (vel ad 3) vel secundum alium numerum multiplicatae rationis exponentem quemcunque.

Videlicet sit AB aeq. x. Sit $B(B)$ in partes ab A aversas sumta, aequalis b. Adeoque $A(B)$ aeq. $x+b$. Eodem modo sit BC aequal. y. et $D(C)$ differentia inter BC et $(B)(C)$ sit aequal. d. Erit $(B)(C)$ aequal. $y \pm d$.

Adeoque pro natura Curvae erit y ad $y \pm d$ $\left\{\begin{array}{l} \text{ut Quadrata (in Parabola Simplici)} \\ \text{vel ut Cubi (in Parabola Cubica)} \\ \text{vel ut Quadrato-quadrata} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$

ab x et $x+b$ vel est $\left\{\begin{array}{l} \text{ut } x^2 \text{ ad } x^2+2xb+b^2 \\ \text{vel ut } x^3 \text{ ad } x^3+3x^2b+3xb^2+b^3 \\ \text{vel ut } x^4 \text{ ad } x^4+4x^3b+6x^2b^2+4xb^3+b^4 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$

Sitque jam TB ad AB, ut 2. ad 1. in Parabola ajo TC curvam tangere
vel 3 in Parabola Cubica
vel 4 in Quadrato-quadratica
vel etc.
in puncto C. Quod ut probetur demonstrabo primum hoc

L e m m a , si recta $TC(C)$ curvam Paraboloeidem secet in duobus punctis $C.(C)$. non potest esse CD ad $D(C)$ seu b ad d, seu TB ad BC seu $T(B)$ ad $(B)(C)$ ut x ad $2y$
$3y$
$4y$
etc.

Nam si b ad d. ut x ad $2y$ vel $3y$ vel $4y$ etc. erit
$+d$ ad y ut $2b$ vel $3b$ vel $4b$ etc. ad x
vel ut $2bx$ vel $3bx^2$ vel $4bx^3$ etc. ad x^2 vel x^3 vel x^4 etc.

2 f. qvemcunqve. *(1)* Ponatur recta TC *(2)* Ut si C(C) sit Parabola Cubica erit TB ad AB, ut 1. ad 3 qvia | BC *gestr.* | ordinatae in ea sunt ut Cubi abscissarum. *(2)* Sit BC *(3)* Videlicet *L* 4 A(B) aeq. *(1)* b + ⟨f⟩ *(2)* x + | f *ändert Hrsg.* | eodem *L* 4 f. et | (B)(D) *ändert Hrsg.* | sit *L* 14 in Parabola *erg. L* 15–17 vel ... etc *erg. L* 18 demonstrabo *(1)* Lemma: si recta curvam cuius ordinatae *(2)* primum *L* 25 ut *(1)* y ad 2x vel 3x vel 4x | ad y *gestr.* | erit *(a)* y ad *(b)* ± d ad y ut b ad 2x vel 3x vel 4x *(2)* x ad *L* 25 f. erit *(1)* ± *(2)* +d *(a)* ad 2y vel 3y vel 4y etc. ut b ad x, vel ut *(aa)* bx^2 vel bx^3 *(bb)* bx vel bx^2 vel b *(b)* ad y *L*

Jam y ad y est ut x^2 ad x^2. Unde componendo fiet $d+y$ ad y ut x^2+2xb ad x^2. Nam

x^3 ad x^3 $\quad$ x^3+3x^2b $\quad$ x^3

x^4 ad x^4 $\quad$ x^4+4x^3b $\quad$ x^4

si exempli causa d ad y ut $2bx$ ad x^2, et y ad y ut x^2 ad x^2, erit $y+d$ ad y ut x^2+2xb ad x^2.

At supra ex natura curvae erat $d+y$ ad y ut

$$\begin{array}{lll} x^2+2xb\ +b^2 & \text{ad} & x^2. \\ x^2+3x^2b+3b^2x\ +b^3 & & x^3 \\ x^4+4x^3b+6x^2b^2+4xb^3+b^4 & & x^4 \end{array}$$

Ergo $\left.\begin{array}{l} x^2+2bx \\ x^3+3x^2b \\ x^4+4x^3b \end{array}\right\}$ aequal. $\begin{array}{l} x^2+2xb+b^2. \\ x^3+3x^2b+3xb^2+b^3 \\ x^4+4x^3b+6x^2b^2+4xb^3+b^4 \end{array}$

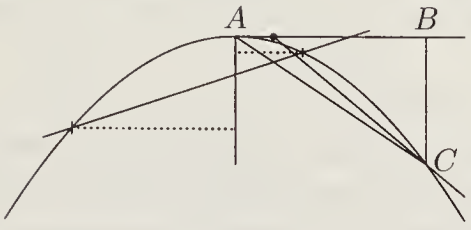
Nam si $d+y$ ad y ut $x^2+2xb+b^2$ [ad x^2], et rursus $d+y$ ad y ut x^2+2xb [ad x^2] erit utique x^2+2xb aequal. $x^2+2xb+b^2$. Unde $\left.\begin{array}{l} b^2 \\ \text{vel } 3xb^2+b^3 \\ \text{vel } 6x^2b^2+4xb^3+b^4 \end{array}\right\}$ aequale nihilo.

Quod est absurdum.

Adeoque lemma est demonstratum, cum ergo non possint ita ut in Lemmate enuntiatum est, esse inter se b ad d seu differentia abscissarum ad differentiam ordinatarum; sequitur si eo modo esse ponatur TB ad BC, ipsas CD et $D(C)$ nullas esse (alioquin ob Triangula $CD(C)$ et TBC similia, eandem haberent rationem et ipsae). Ergo necesse est ipsas $TB.T(B)$ item $BC.(B)(C)$ coincidere ac proinde junctam TC esse tangentem, ergo si curvae Paraboloeidis $C(C)$ tangens sit $T(C)$ erit TB portio directricis inter tangentem et ordinatam ad BC ordinatam, seu ad y ut x ad $2y$ vel $3y$ vel $4y$ pro Paraboloeidis scilicet gradu. Ergo TB est $\frac{x}{2}$ vel $\frac{x}{3}$ vel $\frac{x}{4}$ si scilicet ordinatae Parabolae vel Paraboloei-

1 Jam *(1)* aliunde *(2)* ex natura Curvae *(3)* y *L* 1–5 nam ... ad x^2 *erg. L* 13 f. Nam ... + b^2 *erg. L* 16 +3xb^3 *L ändert Hrsg.* 19 f. differentia | ordinatarum ad | differentiam *erg.* | abscissarum *ändert Hrsg.*|; seqvitur *L* 20 BC, *(1)* junctum *(2)* | junctam TC *streicht Hrsg.*| *(a)* tangere curvam, s *(b)* non nisi uno in puncto curvae occurrere, adeoqve *(3)* sive *(4)* ipsas ... esse *(a)* adeoqve ipsam TC esse tangentem *(b)* (alioqvin *L* 21 f. est *(1)* | ipsam *streicht Hrsg.*| TC *(2)* ipsas *L* 22 f. tangentem | seu uno tantum in puncto *erg. u. gestr.*|, ergo *(1)* sin *(2)* si *(a)* in Paraboloeide sit *(aa)* x *(bb)* TB ad BC ut *(cc)* C(C) ta *(b)* curvae *L* 23 portio *(1)* axis inter *(2)* directricis *L*

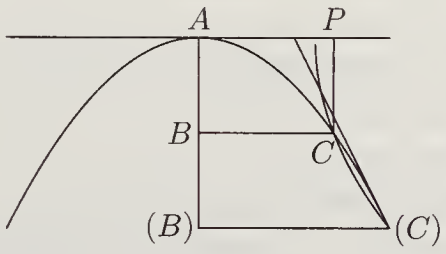
dis, sint ut Quadrata, Cubi, Quadrato-quadrata, etc. abscissarum. Quod ostendendum sumseramus.



[*Fig. 3*]

Recta quae e directrice educta semiparaboloeidi non nisi in uno puncto occurrit, et a vertice continuata recedit, aut tangenti convenit, aut ordinatae. Ac primum manifestum est semiparaboloeidem continue magis magisque recedere a vertice. Aucta enim abscissa AB augetur et ordinata BC quia ordinatae sunt in multiplicata ratione abscissarum. Ergo et chorda AC distantia puncti $[C]$ a vertice. Hoc amplius rectum.

Prop. Omnis curva Analytica simplex continuari potest et continuata a vertice recedit.



[*Fig. 4*]

Sit curva Analytica simplex $C(C)$ id est talis ut dignitates quaedam ordinatarum $BC.(B)(C)$ sint in multiplicata ratione abscissarum $AB.A(B)$ directa vel recip[roca].

Omnis figura Analytica cujus ordinatae ex abscissis affirmative componuntur in infinitum procurrit longitudine, seu abscissam habere potest quantamlibet.

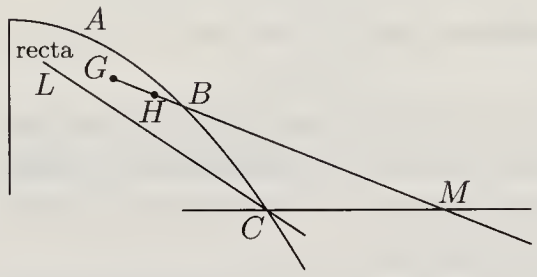
Omnis figura analytica cujus ordinatae ex abscissis per aequationes imparium dimensionum componuntur, in infinitum procurrit longitudine.

2–4 sumseramus. *(1)* Omnis recta quae | *(a)* a puncto fixo recedens *(b)* qvoqve a puncto fixo in directrice, *(aa)* secund *(bb)* a qvo *erg.* | Curvae *(aaa)* Paraboloeidi *(bbb)* semira *(ccc)* semirapa *(ddd)* Paraboloeidi non nisi uno *(aaaa)* puncto *(bbbb)* in puncto occurrit, est parallela directrici *(aaaaa)* secundum qvam ordinatae abscissis e directrice *(bbbbb)* est *(ccccc)* Congruit uni ex ordinatis | *(aaaaaa)* product *(bbbbbb)* ⟨rational⟩ibus *erg. u. gestr.* | qvae in multiplicata ratione abscissarum sumuntur. Si sit sem *(2)* Recta qvae | e directrice educta *erg.* | semiparaboloeidi *(a)* occurrit *(b)* non *L* 5 aut *(1)* tangens est aut ordinatae *(2)* tangenti *L* 10 recta *L ändert Hrsg.* 11 curva *(1)* semi *(2)* paraboloeides aut Hyperb *(3)* Analytica simplex *(a)* rationalis magis magisqve a ver *(b)* continuari *L* 14 ut *(1)* ord *(2)* potentiae *(3)* dignitates *L* 17 *(1)* Omnis *(a)* curva *(b)* figura analytica simplex | *(aa)* dimidia *(bb)* directa, dimidia *erg.* | continuata recedit a vertice ad distantiam *(aaa)* proposita qvacunqve *(bbb)* qvo ad longitudinem pariter et latitudinem in infinitum excurrit Nam abscissa a vertice sumi potest qvantalibet, *(2)* Omnis figura Analytica | simplex *gestr.* | cuius | ordinate *ändert Hrsg.* | ex *L*

Omnis figura analytica cujus ordinatae affirmative et directe ex abscissis componuntur, in infinitum procurrit longitudine et latitudine. Longitudine in infinitum enim augentur abscissae, quia affirmative componuntur ordinatae; in infinitum augentur ordinatae, quia affirmative et directe componuntur adeoque augeri possunt et ipsae ultra magnitudinem propositam.

Si intra curvam in eodem plano in infinitum excurrentem ducatur recta ejusdem plani excurrens in easdem partes; longitudine pariter et latitudine, necesse est, ut recta producta alicubi curvae occurrat. Si non occurrit, erit tota figura infinita conclusa intra aliam, adeoque finita erit. Quod est absurdum. Paralogismus est in hac ratiocinatione.

Si recta quae minus excurrit lineam in infinitum excurrentem alicubi secat, multo magis eam secabit ea, quae magis excurret. Sit ABC curva. Sit recta GH, magis excurrens quam recta LC. secans Curvam in C. Ducatur CM extra curvam[,] hanc alicubi secabit GH, ut in M. Ergo GH intra curvam, alicubi reperietur extra curvam, eam ergo secuit, alicubi, ut in B.



[*Fig. 5*]

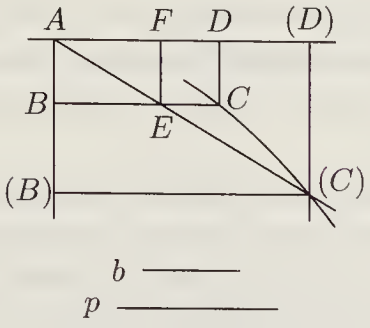
Si datae lineae GH parallela interior occurrit curvae in infinitum procurrenti, multo magis parallela exterior ei occurret.

Recta transiens per verticem curvae Analyticae simplicis, nec ordinatis nec directrici parallela; curvae adhuc alio praeterea in puncto occurrit.

Sit curva analytica $C(C)$ quantum satis est continuata, cujus directrix AD et ad eam ordinata DC.

Recta transiens per intersectionem communem duarum curvae analyticae simplicis directricium, quae tamen ipsa directrix non est, curvae ab ea parte ad quam tendit in alio quodam puncto occurrit.

1 analytica *(1)* qvae in infinitum procurrit lo *(2)* qvae affirmative et directe *(3)* cuius *L* 1 f. componuntur, *(1)* infinita est *(2)* in *L* 2-6 latitudine. | longitudine ... adeoqve *(1)* auctis *(a)* ordinatis *(b)* abscissis ultra magni *(2)* cum abscissis *(3)* augeri ... propositam *erg.* | *(a)* Si *(b)* Omnis figura simplex *(c)* figurae simplici analyticae directae occurrit recta a vertice recedens *(d)* Si *(aa)* recta a concava curvae analyticae infinitae parte posita *(aaa)* fi *(bbb)* in infinitum excurrens *(bb)* intra *(aaa)* curvam analyticam infinitam *(bbb)* figuram *(ccc)* curvam *L* 10 minus *(1)* recedit *(2)* excurrit *L* 21 Recta *(1)* per verticem transiens | angulo ad directricem obliqvo *erg.* | curvae Analyticae simplici adhuc alibi occurrit, *(2)* transiens *L* 23 analytica *(1)* AC(C) *(2)* C(C) *L* 23 cuius *(1)* vertex *(2)* directrix *L* 26 curvae *(1)* alibi occurrit *(2)* ab *L*



[*Fig. 6*]

Sit Curva Analytica simplex, $C(C)$ et directrices secundum quas simplex est ordinatarum abscissarumque relatio, $AB_{[,]}\,AD.$ quarum communis intersectio $A.$ et recta AE tendens ad partes ad quas est curva $C(C)$ quantum satis est continuata, ajo eam alicubi occurrere curvae in (C). Ponatur curvae parameter esse $p.$ natura vero talis, ut sit ratio p ad $A(D)$ vel $(B)(C)$ multiplicata secundum numerum $v.$ quam rationem vocabimus $\odot$ eadem rationi

---

6–488,4 *Nebenbetrachtung auf der folgenden Seite, durch Umrahmung aus dem Text ausgegliedert:*

Analysis.

$\frac{\overline{p}^{\,v}}{x} \sqcap \frac{\overline{y}^{\,z}}{x}$. et $\frac{y}{x} \sqcap \frac{b}{p}$. Ergo $\frac{\overline{y}^{\,z}}{x} \sqcap \frac{\overline{b}^{\,z}}{p}$. Ergo $\frac{\overline{p}^{\,v}}{x} \sqcap \frac{\overline{b}^{\,z}}{p}$.

Synthesis.

Quia $\frac{\overline{p}^{\,v}}{x} \sqcap \frac{\overline{b}^{\,z}}{p}$. et ex natura curvae $\frac{\overline{p}^{\,v}}{x} \sqcap \frac{\overline{y}^{\,z}}{x}$ erit etiam $\frac{\overline{b}^{\,z}}{p} \sqcap \frac{\overline{y}^{\,z}}{x}$. Ergo $\frac{b}{p} \sqcap \frac{y}{x}$. Ergo ad lineam rectam.

Dazu, auf der vorhergehenden Seite: $p^v x^{z-v} \sqcap y^z$ et $y \sqcap \frac{b}{p}x$. Ergo $x^z \sqcap \frac{p^z}{b^z}y^z$. Ergo $\frac{p^v, x^{z-v}}{\frac{\overline{b}^{\,z}}{p}x} \sqcap 1$. Ergo $p^{v+z} \sqcap b^z x^v$.

1 C(C) | qvantum satis est continuata *erg. u. gestr.* | et *L* 2 secundum qvam *L ändert Hrsg.* 7 talis, *(1)* ut sumta AD, *(a)* x et *(b)* vel BC, x. et AB, vel DC, y. ut sit ratio v ad x mult *(2)* ut *L* 9 qvam ... $\odot$ *erg. L* 9–488,1 rationi *(1)* y ad x *(2)* (D)(C) *L* 12 Analysis *erg. L* 13–15 $\sqcap \frac{\overline{b}^{\,z}}{p}$ *(1)* Ergo *(2)* Assum *(3)* Synthesis. *(a)* assumatur *(b)* qvia *L* 17 *(1)* y^z *(2)* $y \sqcap \frac{x^z}{}$ *streicht Hrsg.* *(3)* $y \sqcap \frac{x^2}{p}$. | et $y \sqcap \frac{b}{p}\overline{x-c}$. eritqve $x^2 - bx \sqcap -bc$ et $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} \sqcap \frac{b^2}{4} - bc$ *streicht Hrsg.* | *(4)* y^z *(5)* $p^v y^{z-v} \sqcap x^z$ *(6)* $p^v x^{z-v}$ *L*

---

9 *Fig. 6*: Leibniz hat den Bogen AC nachträglich teilweise gestrichen.

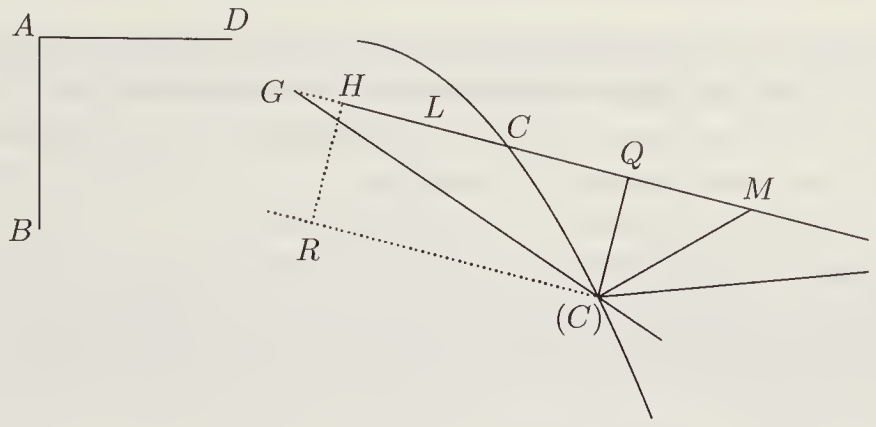
$(D)(C)$ vel $A(B)$ ad $A(D)$ vel $(B)(C)$ multiplicatae secundum numerum z. quam rationem vocabimus ☽, qua formula omnem curvam analyticam simplicem contineri patet. Rectae autem AE, talis angulus sive inclinatio sit ut ducta ad AD ipsa EF, parallela ipsi AB, sit EF ad AF, ut recta quaedam b ad ipsam p.

Hoc posito intelligatur designata $A(D)$ in recta AD producta si opus est talis magnitudinis, ut sit ratio b ad p multiplicata secundum numerum z. quam rationem vocabimus ☿ aequalis rationi p ad $A(D)$ multiplicatae secundum numerum v quam rationem supra vocavimus ⊙. Unde ducatur ad Curvam ordinata $(D)(C)$ parallela ipsi AB. curvae occurrens in (C). Ajo rectam AE productam occurrere Curvae in eodem puncto (C).

Quoniam ex hypothesi seu assumta $A(D)$, est ratio ☿. eadem rationi ⊙. et ex natura curvae ratio ⊙ eadem rationi ☽. erit etiam ratio ☿ eadem rationi ☽. id est explicando ☿ et ☽. ratio b ad p multiplicata secundum numerum z. eadem erit rationi $(D)(C)$ ad $A(D)$ multiplicatae secundum eundem numerum z, unde omissa rationis multiplicatione communi, erit b ad p ut $(D)(C)$ ad $A(D)$. id est ex supposita inclinatione rectae AE, ut EF ad FA, ergo puncta $A.E.(C)$ erunt in eadem recta, ac proinde recta AE producta curvam secabit in puncto (C).

Si linea secundum longitudinem ac latitudinem quandam assumtam in eodem plano procurrat, donec recta quaedam ejusdem plani in easdem partes procurrens eam attingat; alia recta in eodem plano intra hanc rectam et lineam propositam posita, ad easdem partes magis procurrens quam recta prior, eandem lineam etiam alicubi attinget et ante quam prior.

1 f. qvam ... ☽ *erg. L* 2 f. patet. *(1)* intelligatur recta | qvaedam *erg.* | A(D) talis ut *(2)* rectae *L* 3 ducta *(1)* EF ad directricem *(2)* ad *L* 6 f. numerum z. | *(1)* qvam vocabimus ⊙ *(2)* qvam ... ☿ *erg.* | aeqvalis rationi | p ad *erg.* | A(D) *L* 7 f. numerum *(1)* z *(2)* v | qvam *(a)* rationem vocabimus ☽ *(b)* rationem ... ⊙ *erg.* | unde *L* 9 f. puncto (C) *(1)* Nam qvia *(a)* p ad b *(b)* ratio *(aa)* p ad b multiplicata secundum numerum v. aeqvalis est rationi A(D) ad p multiplicatae secundum numerum z *(bb)* b ad p multiplicata secundum numerum z qvam vocabimus ⊙ rationi p ad A(D) multiplicatae secundum numerum v qvam vocabimus ☽ et ex natura curvae C(C) eadem ratio *(aaa)* p ad A(D) multiplicata secundum numerum *(aaaa)* z *(bbbb)* v aequali *(bbb)* ☽ aeqvalis est rationi *(aaaa)* AT *(bbbb)* (D)(C) ad A(D) multiplicatae secundum numerum z. erit etiam b ad p multiplicata secundum *(2)* Qvoniam ex *(a)* constructione seu *(b)* hypothesi *L* 13 secundum *(1)* | numerum *streicht Hrsg.* | *(2)* eundem *L* 17 Si *(1)* curvae in infinitum secundum longitudinem ac latitudinem qvandam assumtam in infinitum directe procurrenti *(2)* lineam continuam secundum longitudinem ac latitudinem qvandam assumtam in eodem plano procurrentem recta qvaedam in easdem partes procurrens alicubi *(3)* linea *L* 19 recta *(1)* qvae intra priorem et *(2)* in *L* 20 magis *(1)* qvam prior excurrens *(2)* procurrens *L* 20 f. et ... prior *erg. L*



[*Fig. 7*]

Sit linea $C(C)$ procurrens, tam secundum longitudinem AB, id est ad partes B ut magis magisque recedat ab AD; quam secundum latitudinem ad partes D ut magis magisque recedat ab AB. et sit recta $G(C)$ ad easdem partes procurrens, id est, quae etiam continue recedat tam ab AD quam ab AB, quae recta $G(C)$ secet lineam in (C). Sit jam alia recta HL inter $G(C)$ et $C(C)$ curvam cadens, magisque obliqua quam $G(C)$ adeoque magis in latitudinem excurrens, seu promtius ab AB recedens; ajo eam alicubi secare curvam $C(C)$ ut in C.

Hoc clarissimum est, nam ducatur quaedam recta $(C)M$ ascendens versus AD, recedens ab AB, patet HL productam ipsi $(C)M$ alicubi occurrere in M. Cum enim ambae

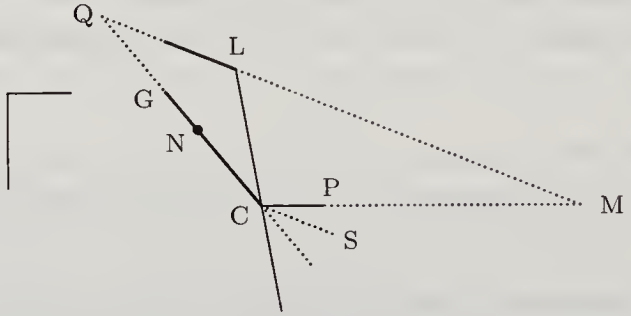
---

1 *Nebenbetrachtung, gestrichen:* Per (C) transeat $(C)R$ parallela HL. Ex H perpendicularis ad R demittatur et ex (C) ad HL perpendicularis $(C)Q$.

2 C(C) | in infinitum *gestr.* | procurrens *L* 3 magis magisqve *erg. L* 4 ab AB. | d i r e c t e autem, id est ut non modo progrediatur modo regrediatur sed progrediatur semper *erg. u. gestr.* | et *L* 5 secet *(1)* curva *(2)* lineam *L* 7 f. alicubi *(1)* secare cur *(2)* attingere *(3)* secare *L* 9 est, *(1)* cum enim rectae cuidam (C)M ab altera curvae parte posita, | necessario *gestr.* | alicubi occurrat *(2)* nam rectae cuidam (C)M ab altera curvae parte posita, alibi occurret ut in M, qvoniam C, C *(3)* | ducatur enim recta *streicht Hrsg.* | (C)M *(a)* qvae *(b)* producta qvantum satis est versus M, ita ut totum extra curvam cadat *(aa)* ascendens | vel *erg.* | minus descendens versus *(bb)* accedens (minus recedens) *(4)* nam ... (C)M *(a)* recedens ab AB et ita ut adeo magis inclinatur HL qvam G(C) *(aa)* eam secabit in *(bb)* secabitur ab HL in M *(aaa)* per Lemma est autem M ab altera parte lineae C(C) qvia ex puncto cum ipsa communi, *(aaaa)* recta *(bbbb)* C recta (C)M educta in *(bbb)* remotiore ab AB qvam (C) per Lemma ergo ab altera parte lineae C(C). Ergo HLM in alteram partem pervenit adeoqve lineam secat in (C) *(b)* ascendens *(c)* ascendens *L* 10 AB, *(1)* occurr *(2)* producatur LH, dum ipsis G(C) alicubi occurrat in G *(3)* patet *L* 11 HL *(1)* et sit HR distantia earum mini *(2)* ex *L*

HL et $(C)M$ recedant ab AB, et quanto magis recedant ab AB, tanto magis illa descendat haec ascendat adeoque eo magis ad se invicem accedant et necesse erit ut tandem recedendo ab AB concurrant in M. Est autem punctum M ab altera lineae $C(C)$ parte seu ultra ipsam, quia punctum M ascendendo a (C) versus AD. recedit ab AB at lineae $C(C)$ puncta ascendendo a (C) versus AD accedunt ad AB. Magis ergo abest ab AB punctum M, supra (C) positum, quam quodlibet lineae $C(C)$ punctum etiam supra (C) positum; ergo punctum $[M]$ est trans lineae $C(C)$ partem supra (C). Idem autem punctum M. est etiam in HL producta. Ergo ea producta puncto suo M trans lineam

1 HL et (C)M *erg. L* 2 adeoqve *(1)* ad se invicem inclinentur, et qvo magis recedunt | ab AB *erg.* | hoc sibi propius | ascensu descensuqve *erg.* | accedant *(2)* eo ... invicem *(a)* accedant, et necesse erit ut tandem aliqvando | recedendo ab AB *erg.* | concurrant in M: est autem *(aa)* (C)M extra curvam ergo et punctum M rectae HLM. *(bb)* M trans lineam C(C) qvia | M ascendit supra *erg.* | puncta curvae lineae | C(C) *erg.* | qvae ascendunt supra (C) propiora ipsi AB, | qvam (C) *erg.* | adeoqve et qvam M. qvod etiam ascendit Cum ergo recta | HL *gestr.* | antea cis lineam | infinitam *erg.* | | A *gestr.* | C(C) nunc *(aaa)* sit extra *(bbb)* ultra ipsam pervenerit | in M *erg.* |, eam necessario alicubi secuit in C. | cum alioqvi non sit futura continua *erg. u. gestr.* | *(aaaa)* Si



(aaaaa) recta qvaeda *(bbbbb)* rectae | a puncto *erg.* | occurrat *(aaaaaa)* alia *(bbbbbb)* tertia recta magis ad secundam *(bbbb)* Si rectae tres *(aaaaa)* ab uno tantum puncto *(bbbbb)* uno qvaelibet a puncto aliqvo in *(cccc)* Si rectae *(aaaaa)* in unam part *(bbbbb)* tres a qvadam recta continue rece *(dddd)* Si rectae | (C)M *erg.* | ab *(aaaaa)* uno *(bbbbb)* aliqvo puncto | (C) *erg.* | ad unam partem | versus M *erg.* | in infinitum *(aaaaaa)* productae occurrat *(bbbbbb)* producta *(aaaaaaa)* sit *(bbbbbbb)* sit, et ex uno puncto | Q *erg.* | duae aliae | QG. QL *erg.* | in easdem partes *(aaaaaaaa)* procurrentes *(bbbbbbbb)* inclinatae educantur, tunc si | QG *erg.* | minus inclinata duarum ad ipsam, ei occurrit | in C *erg.* |, magis inclinata QL etiam occurret in *(aaaaaaaaa)* M *(bbbbbbbbb)* puncto magis procurrente M. ducatur CS parallela QL debet CP *(b)* et *(c)* accedant et *(aa)* aliqvando recedendo *(bb)* | proinde *gestr.* | necesse *L* 3 f. C(C) *(1)* parte *(2)* infinitae *(3)* | parte *gestr. erg. Hrsg.* | seu *(a)* extra ips *(b)* ultra *L* 4 punctum | M *erg.* | *(1)* ascendit *(a)* ab *(b)* a (C) versus AD. et magis abest ab AB, qvam curvae punct *(2)* ascendendo *L* 7 trans *(1)* lineam C(C). seu linea C(C) est inter ipsam et proinde recta *(2)* lineae *L*

$C(C)$ pervenit, etiam antequam descendat infra (C). Ergo partem lineae $C(C)$ supra (C) alicubi secat in C. Attingit ergo linea HL producta lineam $C(C)$ in puncto C. anteriore quam est punctum (C) quod ostendendum proponebatur.

Theorema:

Si sit curva Paraboloeides sive cujus ordinatae sint in multiplicata ratione abscissarum secundum aliquem numerum exponentem erit portio directricis inter tangentem et ordinatam ad idem curvae punctum concurrentes intercepta ad abscissam seu portionem directricis inter punctum fixum et ordinatam interceptam, ut unitas ad numerum exponentem.

Sit curva Paraboloeides, ut

Parabola communis seu quadratica	Parabola Cubica	Parabola quadrato-quadratica	etc.

Directrix $AB(B)$ ad quam ordinatae $BC.\,(B)(C)$ ex omnibus curvae punctis referuntur, secundum abscissas directricis portiones $AB.\,A(B)$ ex puncto fixo A incipientes; sitque semper ordinata BC ad ordinatam $(B)(C)$ in ratione multiplicata abscissae AB ad abscissam $A(B)$ secundum numerum exponentem quemcunque, nempe in ratione

duplicata	triplicata	quadruplicata
id est ut abscissarum quadrata	id est ut abscissarum Cubi	id est ut abscissarum quadrato-quadrata.

13 *In der Mitte der Seite, isoliert:* In exemplum sit Parabola Cubica $C(C)$ in qua BC ad $(B)(C)$ ut Cubi ab $AB, A(B)$.

2 in C. *(1)* secat ergo HL lineam C(C) *(2)* attingit *L* 2 C(C) *(1)* qvod proponebatur ostendendum *(2)* in *L* 10 f. ut *(1)* Conica seu Qvadrati *(2)* Parabola *L* 13 BC. (B)(C) *erg. L* 15 f. multiplicata | abscissae ... A(B) *erg.* | *(1)* secundum *(2)* | nempe *ändert Hrsg.* | numerum *L* 17 f. *linke Spalte:* duplicata *(1)* | adeoqve *erg.* | secundum *(a)* nume *(b)* exponentem *(aa)* 2 *(bb)* 2 *(2)* | adeoqve *erg., streicht Hrsg.* | secundum exponentem 2 *(3)* adeoqve | secundum *streicht Hrsg.* | numerum *(4)* id *L* 17 f. *mittlere Spalte:* triplicata *(1)* | adeoqve *erg., streicht Hrsg.* | secundum *(a)* exponentem 3 *(b)* exponentem 3 *(2)* id *L* 17 f. *rechte Spalte:* qvadruplicata *(1)* secundum numerum exponentem *(a)* 4 *(b)* 4 *(2)* id *L*

5–9 Si ... exponentem: vgl. S. 482 Z. 6–10. 20 exemplum: Leibniz hat sich an den Fig. 2a u. 2b orientiert, wie aus S. 492 Z. 9 f. hervorgeht.

Ajo semper fore TB portionem directricis interceptam ad AB abscissam, ut unitas ad exponentem, quem vocabimus generali nomine e

2 3 4

Demonstratio

Quoniam TC non est ordinatis BC neque directrici AB parallela, ideo vel curvam [in] C tanget, vel in duobus punctis ei occurret, nempe in alio adhuc puncto quam C. (per prop. ...) Quod si ergo ostenderimus non posse in alio adhuc puncto occurrere, utique eam tangere consequetur. Ponantur duo esse puncta $C.(C)$ in quibus curvae occurrat recta $TC(C)$. Unde ordinatae $CB.(C)(B)$ quarum abscissae $AB.A(B)$. Ponatur primum fig. 1. [fig. 2.] punctum novum (C) esse posterius [anterius] puncto C. Minor abscissarum erit $AB\,[A(B)]$. Ea sit x. Sit differentia $B(B)$ vel $CD.$ aequalis $b.$ erit $A(B)$ $[AB]$ aequalis $x+b$.

Porro quoniam abscissae minoris etiam minor erit ordinata, in Paraboloeidibus, cum ordinatae sint ut potentiae, quadrati scilicet aut cubi, etc. et majoris radicis etiam major sit potentia, erunt majorum abscissarum majores ordinatae, ideoque punctum novum (C) si remotius etiam abscissa erit major, et vicissim. $BC\,[(B)(C)]$ ordinata posita $y.$ erit $(B)(C)\,[BC]$ aequalis $y+d$, posita $D(C)\,[DC]$ differentia ordinatarum aequali d. His positis ex natura curvae erit $y+d$ ad y, ut

$\odot$ $x^2+2xb+b^2$ ad x^2 $\quad$ $x^3+3x^2b+3xb^2+b^3$ ad x^3 $\quad$ $x^4+4x^3b+6x^2b^2+4xb^3+b^4$ ad x^4.

Porro ob Triangula similia $TBC, CD(C)$, erit $(C)D\,[CD]$ vel d ad $DC\,[D(C)]$ vel b, ut BC ad TB vel ut $(B)(C)$ ad $T(B)$, ergo per suppositam in constructione ipsius TB

2 f. exponentem, *(1)* E *(2)* | qvem ... e *gestr., erg. Hrsg.* | 2 *L* 5 AB | vel per defin. directricium conjugatarum, neutri directricium AB, AE, *erg. u. gestr.* | parallela *L* 9 (C)(B) *(1)* Compendii causa *(2)* qvarum *L* 9 f. A(B). | Ponatur ... puncto C. *erg.* | Minor | ordinatarum *ändert Hrsg.* | *(1)* sit alterutra, ut *(2)* erit *L* 11–13 A(B) | [A,B] aeqvalis *erg.* | x + b. *(1)* Abscissae AB | seu x *erg.*|, ordinata sit y. abscissae *(2)* Porro | qvoniam *erg.* | abscissae *L* 13 Paraboloeidibus, *(1)* | nam *streicht Hrsg.* | majorum radicum *(2)* cum *L* 15 ordinatae, *(1)* itaqve BC ordinata abscissae majoris posita y. erit (B)(C) ordinata *(2)* ideoqve *L* 22 TB | *(1)* vel ut (B)(C) ad T(B) *(2)* vel ... T(B) *erg.*|, ergo *L*

7 prop.: vgl. S. 485 Z. 3–10. 10–493,3 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. Die darin eingeschlossenen Ausdrücke hat er nachträglich zur Fallunterscheidung ergänzt.

rationem ad AB quae est 1 ad e. erit TB $[T(B)]$ aequalis $x\,[x+b]$ diviso per $\underline{e}$ et d ad b ut $y\,[y+d]$ ad $x\,[x+b]$ div. per e. Ergo d ad $y\,[y+d]$ ut b ad $x\,[x+b]$ divis. per num. e vel d ad $y\,[y+d]$, ut ipsa b multiplicata per numerum e ad $x\,[x+d]$ seu ut eb ad x, seu ut ebx ad x^2 seu ut ebx^2 ad x^3 seu ut ebx^3 ad x^4, etc. vel explicando e, secundum varios casus erit d ad y ut

$2bx$	$3bx^2$	$4bx^3$	etc.
ad x^2	ad x^3	ad x^4	

Jam y ad y est ut x^2 ad x^2, vel ut x^3 ad x^3. vel ut x^4 ad x^4 etc. Ergo hanc analogiam componendo cum priore, nempe cum d ad y ut $2bx$ ad x^2, vel $3bx^2$ ad x^3, vel $4bx^3$ ad x^4, etc. fiet $y+d$ ad y ut

☽	x^2+2bx	x^3+3bx^2	x^4+4x^3b	etc.
	ad x^2	ad x^3	ad x^4	

Quae rationes ☽. si conferantur cum rationibus ⊙ ubi etiam $y+d$ ad y, ut ... ad x^2 vel x^3, vel $x^{[4]}$ erunt ipsi ... antecedentes rationum ⊙ aequales antecedentibus rationum ☽. Adeoque fiet:

---

2 *Darüber:* In sequentibus substitue perpetuo $x+b$ in locum x et $y+d$ in locum y.

1–3 TB | [T(B)] *erg.* | aeqvalis *(1)* $\frac{AB}{e}$ *(2)* $\frac{x}{e}$ *(3)* x *(a)* diviso per e *(b)* | [x + b] *erg.* | diviso ... ut y | [y + d] *erg.* | ad *(aa)* $\frac{x}{e}$ *(bb)* x *(aaa)* div. per e *(bbb)* | [x + b] *erg.* | div. per e. *(aaaa)* vel ut ey ad x. Sit enim e per exemplum aeqvalis *(bbbb)* vel ut y multiplic. per e ad x *(cccc)* ergo d ad y | [y + d] *erg.* | ut *(aaaaa)* $\frac{x}{e}$ *(bbbbb)* x. *(aaaaaa)* divis. per *(bbbbbb)* divis. per num. e. ad b *(aaaaaaa)* jam d est ad d, ut *(bbbbbbb)* vel ut x ad b multiplic. per num. e. *(aaaaaaaa)* jam *(aaaaaaaaa)* y *(bbbbbbbbb)* d ad d ut x^2 ad x^2. vel x^3 ad x^3, vel x^4 ad x^4 etc. ergo componendo erit y + d ad d | y ad d *erg. u. gestr.* | ut x *(bbbbbbbb)* vel *(cccccccc)* vel y ad d, ut x ad *(aaaaaaaaa)* b multiplic. per num. e. *(bbbbbbbbb)* rectam ipsam b multiplicatam per numerum e, seu ut x ad eb vel ut x^2 ad ebx vel ut x^3 ad ebx^2 *(ccccc)* | x. | [x + b] *erg.* | ad b *ändert Hrsg.* | divis. ... ad y | [y + d] *erg.* |, ut ... ad x | [x + d] *erg.* | seu ut eb ad x, *(aaaaaa)* seu ut ebx [x + d] *(bbbbbb)* | seu ut *streicht Hrsg.* | *(cccccc)* seu *L* 8 *(1)* Jam cum hac ratione *(2)* analogia rationum d ad y cum sit eb ad x. (vel huic aeqvipollentium 2bx ad x^2 etc.) componatur analogi *(3)* qvemadmodum d ad y est ut eb ad x (vel huic aeqvipollentium 2bx ad x^2 etc.) | ita *streicht Hrsg.* | erit | etiam *streicht Hrsg.* | *(4)* Jam *L* 8 hanc *(1)* rationem *(2)* analogiam *L* 13 rationibus ⊙ *(1)* ob aeqvales antecedent *(2)* continuari *(3)* coinc *(4)* aeqvales *(5)* ubi *L*

$x^2 + 2xb + b^2$	$x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$	$x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4$
aequal $x^2 + 2xb$.	aequal $x^3 + 3xb$.	aequal $x^4 + 4x^3b$.
Ergo b^2 aequal 0.	Ergo $3xb^2 + b^3$ aequal 0.	Ergo $6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4$ aequal 0.

Quod est absurdum. Impossibile enim ut potentiae quantitatum verarum simul additae faciant nihil; cum nulla hic subtractio intercedat.

Quod si posuissemus AB esse majorem abscissam et $A(B)$ minorem, adeoque BC esse majorem ordinatam, et $(B)(C)$ minorem, id est si supponamus rectam ab initio assumtam, TC, quae sit ad AB ut 1 ad e. curvam secare in alio puncto (C) non posse, ut prius, sed ante quam secet in C. Id iisdem fere v e r b o t e n u s repetitis impossibile esse

---

1–3 *Nebenbetrachtung:* $\frac{x^2 + 2xb + b^2}{x^2} \sqcap \frac{x^2 + 2bx + b^2 + 2bx + 2b^2}{x^2 + 2bx + b^2}$. Ergo $\frac{2bx + b^2}{x^2} \sqcap \frac{2bx + 2b^2}{x^2 + 2bx + b^2}$. Ergo $\frac{2bx + 2b^2}{2bx + b^2} \sqcap \frac{x^2 + 2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $\frac{b^2}{2bx + b^2} \sqcap \frac{2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $\frac{b}{x} \sqcap \frac{2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $1 \sqcap \frac{2x + b}{x}$. et $x + b \sqcap 0$. Quod est absurdum. Ergo et praecedens positio.

$$\frac{\boxed{x^3} + 3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3} \sqcap \frac{\boxed{x^3 + 3bx^2 + 3xb^2 + b^3} + 3x^2b + 6xb^2 + 3b^3}{x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3}.$$ Ergo $\frac{3xb^2 + 2b^3}{3x^2b + 3xb^2 + b^3} \sqcap \frac{3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3}$. Ergo $\frac{b^2}{x^2} \sqcap \boxed{2} \frac{3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3} \frown \frac{x}{3x + 2b}$.

6–495,4 *Darüber:* Ideo ipsi potius faciemus, ne quid lectorem moretur.

4 verarum *erg. L* 5 f. intercedat. *(1)* Impossibile ergo est rectam TC. *(a)* curvam secare in *(b)* qvalem supposuimus *(aa)* rectam *(bb)* curvam propositam secare in *(aaa)* duobus punctis. Qvare, ut diximus, cum neutri directricium | conjugatarum *erg.* |, sive nec directrici nec ordinatis | per directricium definitionem conjugatarum *erg.* |, parallela sit, tanget per theor. ... ut supra jam diximus. Qvod erat demonstrandum. *(bbb)* alio adhuc puncto qvam C. Qvare ob conseqventiam initio huius demonstrationis positam tanget. Q. E. D. *(2)* Qvod si posuissemus | AC *ändert Hrsg.* | esse *(a)* minorem | abscissam *erg.* | et A(C) majorem, adeoqve BC esse minorem *(b)* majorem ... et | A(C) *ändert Hrsg.* | minorem *L*
9 fere *erg. L*

---

16 ipsi: vgl. die Erl zu S. 492 Z. 10 – S. 493 Z. 3.

demonstrabitur. Quoniam tamen nonnulla immutanda sunt, ut demonstratio absolvatur. Nimirum in fig. 2. ponatur punctum novum (C) esse anterius puncto C. Minor abscissarum erit $A(B)$. Ea sit x. etc. Retentis iisdem verbis, mutando tantum AB in $A(B)$ et contra, et BC in $(B)(C)$ et contra et CD in $(C)D$ et contra.

2 f. minor | ordinatarum *ändert Hrsg.* | erit *L* 4 (B)(C) et contra *(1)*: usqve ad verba: Porro ob triangula similia TBC, (C)DC erit C *(2)* et *L*

70. QUADRATRIX

April 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 233. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 1386

April. 1676

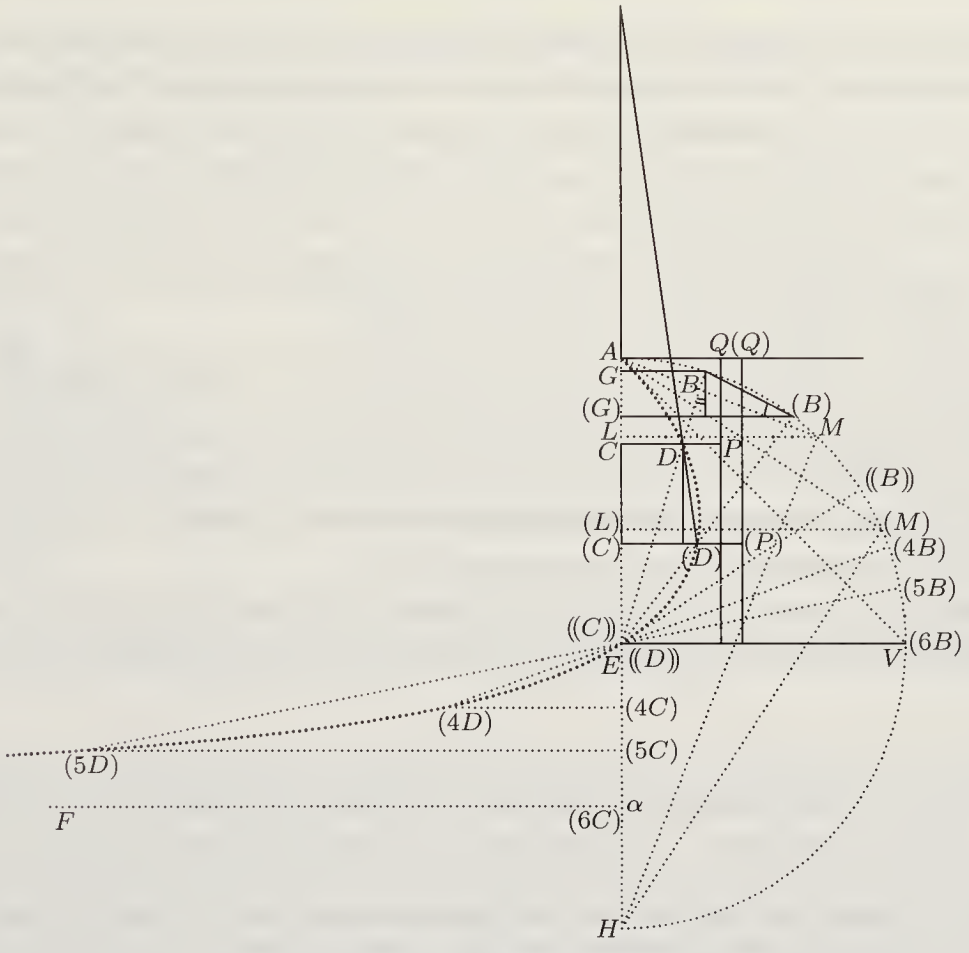
Quadratrix

Radius AE. Diameter ACH. Circumferentiae Quadrans ABV. Curva Quadratrix $AD(D)E$ cujus vertex E, centrum est circuli. Cujus tangens ad verticem E, nempe $E((B))$ si duci posset haberetur arcus $A((B))$ radio aequalis. Si vero asymptotos ejus αF duci posset, haberetur recta $A\alpha$ aequalis quadranti ABV.

Sit radius $AE \sqcap a$. Arcus $AB \sqcap$ abscissae AC sit $\sqcap x$. Erit $EC \sqcap a - x$. Sit sinus $BG \sqcap s$. erit $EG \sqcap \sqrt{a^2 - s^2}$. Sit ordinata $CD \sqcap y$.

Quaeramus aequationem exprimentem valorem ipsius y. ordinatae. Ob Triangula

10f. ABV | Abscissa AC sit x. | et CD ordinata sit y *erg.* | qvaeramus CD ⊓ y, calculo, si licet. AC ⊓ | arcui *erg.* | AB ⊓ x. BG sinus arcus | dati *gestr.* | sit s. erit AG ⊓ $\frac{s^2}{2a}$ Et EG ⊓ $a - \frac{s^2}{2a} \sqcap \frac{2a^2 - s^2}{2a}$. *(1)* jam EG : EB ⊓ a :: EC ⊓ *(2)* jam EG $(a - \frac{s^2}{2a})$: *(a)* EB (a) :: *(b)* GB (s) :: EC (a − x) : CD (y) et y ⊓ $\frac{s, a - x}{a - \frac{s^2}{2a}} \sqcap \frac{2a^2 s - 2asx}{2a^2 - s^2} \sqcap \frac{s, a - x}{\frac{2a^2 - s^2}{2a}} \sqcap \frac{s, a - x, 2a}{a\sqrt{2} + s, a\sqrt{2} - s}$ Ducatur AV ⊓ $a\sqrt{2}$ producaturqve in L, donec sit VL aeqvalis ipsi GB ⊓ s. et sumatur VM ⊓ VL. erunt *(aa)* y ⊓ *(bb)* ipsae CD ordinatae, in composita ratione ex rationibus *(aaa)* arcuum AC ad ipsas productas *(bbb)* absci *(ccc)* abscissarum AC ad producta *(ddd)* productarum LA ad abscissas | sive arcus *erg.* | AC, et reliqvarum MA ad reliqvas EC sive erit CD ad (C)(D), in composita ratione *(eee)* | GB sive *erg.* | VL ad LA et EC ad MA sive erit *(aaaa)* $\frac{CD}{\quad}$ *(bbbb)* CD ad (C)(D) ut composita ratio ex VL ad LA et EC ad MA, ad compositam rationem ex V(L) ad (L)A et E(C) ad (M)A. Hinc jam primo patet si sit a − x ⊓ 0. seu a ⊓ x. Id est si abscissa sit AE radius, fore CD infinite parvam, adeoqve ibi curvam diametrum secare. *(aaaaa)* Deinde *(bbbbb)* Idemqve fieri si sit x ⊓ 0. adeoqve et s ⊓ 0. duobus ergo in locis curva secat diametrum, scilicet in A, et E. Deniqve infinitam fore ordinatam CD, adeoqve asymptoton, tunc cum $a\sqrt{2} - s \sqcap 0$. seu cum $a\sqrt{2} \sqcap$ s. sed hoc impossibile est, *(aaaaaa)* video *(bbbbbb)* deberet esse a | $\sqrt{2}$ *gestr.* | ⊓ s. ideoqve in calculo me errasse video *(aaaaaaa)* Omnia ergo da⟨—⟩ *(bbbbbbb)* falsum scilicet AG ⊓ $\frac{s^2}{2a}$, posito BG ⊓ s. Rectius ergo sic procedemus. *gestr.* | Sit *L*



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

BGE, DCE, similia erit: $CD\,(y) : BG\,(s) :: EC\,(a-x) : EG\,(\sqrt{a^2-s^2})$. et CD seu y erit $\sqcap \frac{s, a-x}{\sqrt{a^2-s^2}}$. Quod ut Geometrice enuntiemus, sumatur in Diametro ipsi (GB) sinui

3 $\sqcap \frac{s, a-x}{\sqrt{a^2-s^2}}$ *(1)* id est erunt ordinatae *(a)* CD *(b)* Qvadratricis CD, in composita ratione *(2)* Qvod L

1 *Fig. 1*: Blindlinien sind in der Zeichnung zur besseren Übersichtlichkeit dünn punktiert dargestellt; solche Blindlinien, die nur als Konstruktionshilfe dienen, sind nicht wiedergegeben. Leibniz hat in einer überarbeiteten Vorstufe zur Figur die Punkte M und (M) zunächst auf der Linie AV und die Punkte L und (L) auf der Verlängerung von AV über V hinaus abgetragen; s. Variante zu S. 496 Z. 10 f. In der Endfassung sind L und (L) gemäß $AL = GB$ und $A(L) = (G)(B)$ eingezeichnet. Leibniz hat die Konstruktionsvorschrift für L und (L) im Text später zu $EL = GB$ und $E(L) = (G)(B)$ korrigiert, die Figur aber beibehalten; s. Varianten zu S. 498 Z. 1, Z. 2 f., Z. 5 und Z. 7.

arcus generatoris AB, aequalis EL ductaque LM, normali quae circumferentiae occurrat in M, jungantur AM, HM, [eodemque modo in caeteris punctis fieri intelligatur, sumta $E(L)$ aequali $(G)(B)$ ductaque $(L)(M)$, et junctis $A(M), H(M)$]. Erunt CD, ordinatae Quadratricis in composita ratione EL ad AM, et EC ad HM [sive erit CD ad $(C)(D)$ ut ratio composita ex EL ad AM, et EC ad HM, est ad rationem compositam ex $E(L)$ ad $A(M)$ et $E(C)$ ad $H(M)$]. Nam $y \sqcap \frac{s, a-x}{\sqrt{a^2-s^2}}$. ut ostendimus, id est $y \sqcap \frac{s, a-x}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}$. Porro $s \sqcap EL$. $a-x \sqcap EC$, $\sqrt{a-s} \sqcap AM$, et $\sqrt{a+s} \sqcap HM$. Ergo $y \sqcap \frac{EL}{AM}, \frac{EC}{HM}$.

Porrro ex hoc ipsius y valore patet ordinatam CD fore infinite parvam, duobus casibus, uno cum GB seu $s \sqcap 0$, altero cum $a-x$ seu $EC \sqcap 0$, vel $a \sqcap x$. Duobus itaque in punctis, A, et E, curva quadratrix diametrum secat. At si ponatur $s \sqcap a$, seu $\sqrt{a^2-s^2}$ sive $EL \sqcap 0$. erit y. infinitiva, sive Asymptotos αF.

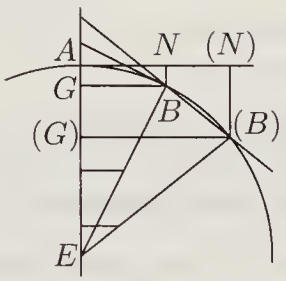
Theorema de natura Quadratricis: Ordinatae (CD) quadratricis (AD) sunt proportionales quantitatibus quae sint ad unitatem in composita ratione, ex ratione EC

1 aeqvalis *(1)* AL *(2)* EL L 2 f. sumta *(1)* A(L), ductisqve *(2)* A(L) *(3)* E(L) L 4 ratione | AL *ändert Hrsg.* | ad L 5 ex | AL *ändert Hrsg.* | ad L 5 ex *(1)* A(L) *(2)* E(L) L 7 s ⊓ *(1)* AL *(2)* EL L 9 EC *(1)* infinite parva *(2)* ⊓ 0 L 12 Qvadratricis: | *(1)* Si sinui arcus generatoris statuatur aeqvalis qvidam *(2)* Si *(a)* sinui recto arcus generatoris Qvadratricis statuatur aeqvalis qvidam arcus *(b)* sinubus rectis | GB *erg.* | arcuum *(aa)* erit *(aaa)* ord *(bbb)* | in eodem circulo *erg.* | ex *(aaaa)* Q *(bbbb)* Punctis *(cccc)* Puncto extremo portionis Qvadratricis generatae ordinata ad diametrum generationi servientem ducta *(bb)* in diametro generationi serviente | AH *erg.* | sumti; erunt | CD *erg.* | ordinatae Qvadratricis ad hunc Diametrum | AH ductae, *erg.* | *(aaa)* proporti *(bbb)* ut qvantitates qvae sint ad unitatem in composita ratione | ex ratione *erg.* | sinus complementi | EC *erg.* | arcus dati AB, ad chordam | AM *erg.* | *(aaaa)* arcus *(bbbb)* sinu *(cccc)* sinus complementi *(aaaaa)* sinui recto *(bbbbb)* novi EL, *(aaaaaa)* et ratione *(bbbbbb)* sinui recto GB, arcus *(aaaaaaa)* ge *(bbbbbbb)* dati aeqvalis; et ratione sinus complementi novi | EL *erg.* | ad chordam *(aaaaaaaa)* supplementi *(bbbbbbbb)* semicirculum complentem *(aaaaaaaaa)* EM *(bbbbbbbbb)* HM. | Brevius. *gestr.* | Ordinatae L 13 composita ratione, *(1)* | ex ratione differentiae *erg.* | sinus *(a)* arcus *(b)* rect *(c)* complementi EC arcus generatoris | AB *erg.* | ad chordam | AM *erg.* | sinui complementi | EL *erg.* | sinui *(aa)* huic *(bb)* huius arcus GB recto aeqvalis; et ex ratione | huius *erg.* | sinus recti | EL vel GB *erg.* | eiusdem arcus generatoris, ad chordam *(aaa)* sinui complementi hui *(bbb)* | AB *erg.* | complementalem HM *erg.* | sinus complementi ipsi aeqvalis *(2)* ex L

2–6 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst. 7 $\sqrt{a-s} \sqcap AM$: Richtig wäre $AM = \sqrt{2a\,(a-s)}$ und dementsprechend $HM = \sqrt{2a\,(a+s)}$ sowie $y = 2a\frac{EL}{AM} \cdot \frac{EC}{HM}$. Die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

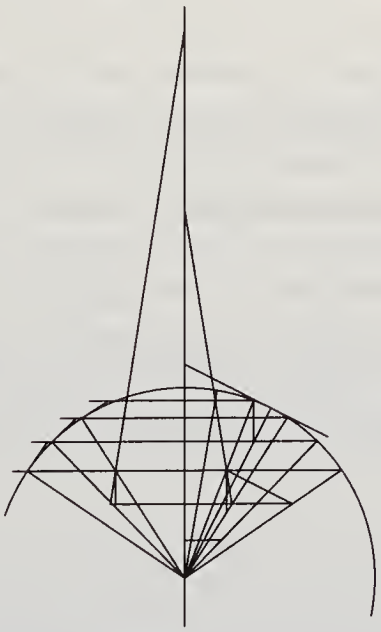
differentiae radii AE et arcus generatoris AC seu AB, ad chordam AM cujusdam sinus complementi EL hujus arcus sinui recto GB aequalis, et ex ratione ejusdem sinus complementi EL ad chordam HM arcus sui ABM complementalem.

Porro y in duas quantitates resolvi potest: $\frac{sa}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}, \frac{-sx}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}$, neutram quadrare facile, ne ex data quidem Circuli Quadratura. Una autem alterius momentum continet ex vertice, posterior scilicet, prioris: Quoniam autem haec calculo difficulter tractantur, ad reliquas artes nostras confugiendum est, et quaerendum ante omnia qualis sit quantitas $\frac{sa}{\sqrt{a^2-s^2}}$. Sunt autem sinus nihil aliud quam abscissae ex tangente verticis, ut $AN \sqcap GB$, ipsa autem Arcuum differentia $B(B)$, quam vocemus β. Quaeritur summa omnium $\frac{as\beta}{EG \sqcap \sqrt{a^2-s^2}}$.



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

12 *Unter Fig. 2 von Text überschriebene Figur in Blindzeichnung:*



12 *Fig. 2*: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.

Est autem $\beta \sqcap \frac{g^2}{s}$. seu β ipsis s. reciprocae. Erit ergo $\frac{as\beta}{\sqrt{a^2-s^2}} \sqcap \frac{ag^2}{\sqrt{a^2-s^2}}$. Dantur ergo omn. $\frac{as\beta}{\sqrt{a^2-s^2}}$. quia dantur omnes $\frac{ag^2}{\sqrt{a^2-s^2}}$. posito a. et g. esse constantes, et s. arithmeticas. Dantur inquam ex supposita Circuli Quadratura, seu dimensione Curvae Circuli. Superest ergo ut inveniamus omnes: $\frac{ag^2x}{\sqrt{a^2-s^2}}$. Quod idem est ac invenire momentum omnium CD ex vertice A. Igitur momentum areae quadratricis ex vertice, et areae illius dimensio connexa sunt.

Videamus jam an omnium CD in $C(C)$ momentum ex vertice inveniri possit; invenietur autem inventa summa omnium AC quadratorum, in diff. $\overline{CD,(C)(D)}$. Sed non est necesse omnium CD ex vertice A inveniri momentum, quia potius quaeritur eorum momentum ex basi EV, ipsorum $\frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}}$. dabit $\frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}}$ in $a-x$. seu aream figurae quadratricis. Ergo de solis $\frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}}$ verum est, seu rectis CP. $(C)(P) \sqcap \varphi$, earum ex vertice A quaeri momentum seu omnes $\frac{sax}{\sqrt{a^2-s^2}}$. Quaeritur ergo summa quadratorum

6 f. sunt. *(1)* Habebitur autem | facilius *erg.*| momentum omnium $\frac{sa\beta}{\sqrt{a^2-s^2}}$ | $\sqcap$ ω *erg.*| seu $\frac{sa\beta x}{\sqrt{a^2-s^2}}$ si contra ex assumtis ω, qvaeramus valorem ipsarum s. *(a)* Est autem $\beta \sqcap \frac{g^2}{s}$. ergo erit $\frac{ag^2}{\sqrt{a^2-s^2}} \sqcap \omega$. et $\frac{a^2g^4}{a^2-s^2} \sqcap \omega^2$, sive $a^2g^4 \sqcap$ *(b)* erit $\frac{s^2a^2}{a^2-s^2} \sqcap \omega^2$. et fiet $s^2a^2 \sqcap a^2\omega^2 - s^2\omega^2$. et $s \sqcap \frac{a\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$. qvorum qvadratum: $\frac{a^2\omega^2}{a^2+\omega^2}$ *(aa)* habetur *(bb)* habentur autem omn. *(2)* videamus L

8 $\overline{CD,(C)(D)}$ *(1)* sunt autem diff $CD \sqcap \beta \sqcap \frac{g^2}{s}+$ *(2)* sed non est inveni *(3)* sed L

---

1 $\beta \sqcap \frac{g^2}{s}$: Die Behauptung, bei der g als konstant angenommen wird, ist nicht korrekt. Dies beeinträchtigt (zusammen mit weiteren kleineren Versehen) die Diskussion bis S. 504 Z. 10; Leibniz setzt in S. 504 Z. 12 noch einmal neu an.

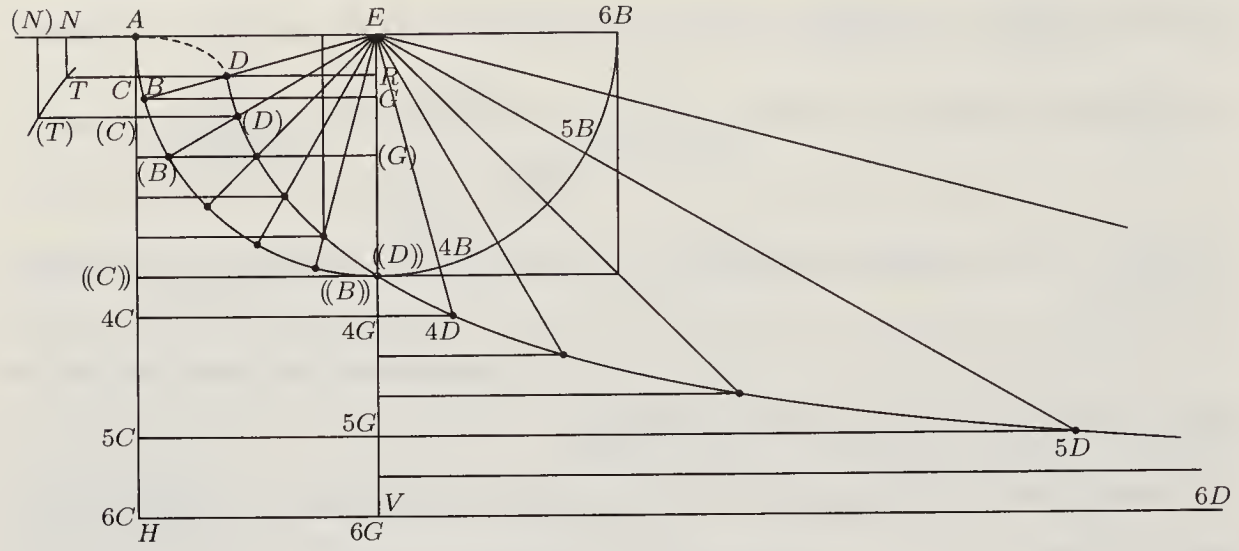
omnium PQ. Sunt autem $PQ \sqcap x \sqcap AC$. id est $\overline{\text{omn. } \beta}$ et $\beta \sqcap d\overline{x}$. Jam idem $\beta \sqcap \frac{g^2}{s}$. Ergo $s \sqcap \frac{g^2}{dx}$. Ergo aequatio: $\varphi \sqcap CP \sqcap \frac{sa}{\sqrt{a^2 - s^2}} \sqcap \frac{g^2 a}{d\overline{x}\sqrt{a^2 - \frac{g^4}{②dx}}} \sqcap \frac{g^2 a}{\sqrt{a^2 ② dx - g^4}}$ et $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{a^2 ② d\overline{x} - g^4}$ et $\varphi^2 a^2 ② dx \sqcap g^4 \overline{a^2 + \varphi^2}$. et $dx \sqcap \frac{g\sqrt{a^2 + \varphi^2}}{\varphi}$. et $x \sqcap$ sum. $\frac{g}{\varphi}\sqrt{a^2 + \varphi^2}$ et $x^2 \sqcap \frac{a^2 g^2}{\varphi^2} + g^2$. Datur ergo summa omnium x^2, ex positis φ. adeoque datur et dimensio areae quadratricis, ex data Circuli Quadratura.

Veniamus ad ejus Tangentes et Curvam. Aequatio Quadratricis: $y \sqcap \frac{g^2 a - g^2 x}{\sqrt{a^2 ② dx - g^4}}$. Differentia duarum y, erit: $\ddagger \frac{g^2 a - g^2 x}{\sqrt{a^2 ② dx - g^4}} \ddagger \frac{g^2 a - g^2 x - g^2 dx}{\sqrt{a^2 ② d\overline{x + dx} - g^4}}$. Nota ubi haec differentia $\sqcap 0$. erit maxima curvae latitudo. NB. NB.

Videndum tamen an non hic facilius res motu possit explicari: manifestum est punctum describens, pluribus ferri motibus. Et primum radius et regula uniformi feruntur motu. Cumque eorum intersectione designabitur curva.

Sed hic illud superest admonendum non esse necesse ut aequali celeritate ferantur regula et radius. Sufficit utramque ferri uniformi; et tunc non est necesse AC aequari arcui AB. Et hoc modo haberi possunt puncta quadratricis, quot quis voluerit. Haec autem Quadratrix semper erit propositae proportionalis. Ac similiter Spiralem Archimedis concipere licet generalius, ut possint inveniri ejus puncta quaelibet, si radius scilicet pariter et punctum in eo uniformi motu ferantur, etsi motus unius non sit aequalis motui alterius. Quadratrix autem particularis veterum in eo differt ab hac generali, et mea particulari. Quod in generali nihil refert quae sit celeritas modo in singulis constans; in veterum particulari requiritur, ut eodem tempore absolvantur diameter et semicircumferentia, seu ut motus sint in ratione diametri ad semicircumferentiam, in mea ut sint aequales.

1 est *(1)* $\int \beta$ *(2)* $\overline{\text{omn } \beta}$ *L* 4 f. et *(1)* curvae Cycloeidis *(2)* dimensio *(a)* Qvadratricis *(b)* areae *L* 10 describens, *(1)* duobus *(2)* pluribus *L*

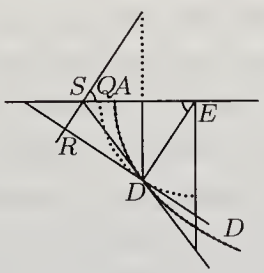


[*Fig. 3*]

Centro E, radio AE, describatur semicirculus $AB(B)$ etc. Recta AH diametro dupla tangens semicirculum in extremo A. dividatur in partes divisionibus semicirculi proportionales. Semicirculo diviso punctis B. Recta AH punctis C. junge radios AB, quae ubi

---

1 *Neben der Figur:*



Tangens quadratricis ex Robervallio[:] Centro E, radio ED, arcus circuli cujus tangens DR ⊓ arcui DQ. Duc⟨ta⟩ RS parallela DE. secans EA in ⟨S.⟩ erit juncta DS, tangens. Ho⟨c⟩ ex compositione motuum.

---

1 *Fig. 3*: Die Figur ist zum größten Teil übernommen aus G. P. de ROBERVAL, *Observations sur la composition des mouvemens*, gedr. in *Ouvrages*, S. 96. Leibniz hat das Manuskript offenbar nach dem Brief an Oldenburg vom 28. Dezember 1675 einsehen können (vgl. III, 1 N. 70 S. 328). — Die von Leibniz in der Figur angedeutete Fortsetzung der Quadratrix über D hinaus nach A (vgl. S. 503 Z. 1) ist nicht korrekt. Auch der Verlauf der Kurve $T(T)$ ist fehlerhaft wiedergegeben. In Leibniz' Vorlage ist zusätzlich der auf $5D$ folgende Punkt der Quadratrix als Schnittpunkt der aus E zwischen $5B$ und $6B$ laufenden Gerade mit der entsprechenden Parallele zu $6G6D$ eingezeichnet. 6 Robervallio: *a. a. O.*, S. 97–99. — Leibniz hat in der Figur zur Tangentenkonstruktion den Punkt A irrtümlich zwischen S und Q eingezeichnet und dadurch die Quadratrix AD und den Kreisbogen QD als einander in D berührend wiedergegeben.

transeuntes per C parallelas ipsi AE, secabunt, in D, erunt puncta quadratricis: $AD(D)$ etc.

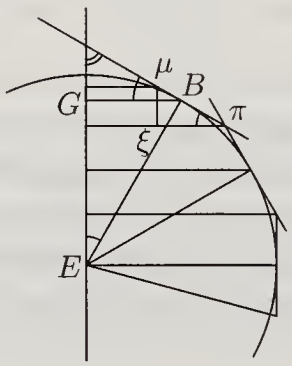
Sit $AC \sqcap x$. $DR \sqcap y$. radius a. sinus $GB \sqcap s$. Producta CD in R, ubi diametro occurrit, erunt Triangula ERD, et EGB similia. Ergo $DR(y) : BG(s) :: ER(x) : EG(\sqrt{a^2 - s^2})$. Adeoque $DR \sqcap \frac{sx}{\mp\sqrt{a^2 - s^2}} \sqcap y$. seu ordinata quadratricis in regulam est ad arcum, ut sinus arcus ad ejus sinum complementi. Et signum ambiguum $\mp$ ostendit ab utraque ipsius EV parte esse ordinatas quasdam.

Quaeritur jam hujus figurae quadratura. Constat autem nobis aliunde esse $d\overline{x} \sqcap \frac{g^2}{s}$. posita g. quadam constante. Ergo $x \sqcap g^2$ omn $\frac{1}{s}$ et $yd\overline{x} \sqcap \frac{s\frac{g^2}{s}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \frown g^2$ omn $\frac{1}{s} \sqcap \frac{g^4}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ omn $\frac{1}{s}$. Sed quia omn $\frac{1}{s}$ non satis sic tractabile ita considerabimus: In punctis C applicentur ubique ipsi AC, ipsae $CT \sqcap \frac{sa}{\mp\sqrt{a^2 - s^2}}$. Ajo primum figurae inde orientis haberi summam, scilicet omnium $\frac{sadx}{\mp\sqrt{a^2 - s^2}}$. Quia $dx \sqcap \frac{g^2}{s}$, ergo $CT \sqcap \frac{ag^2}{\mp\sqrt{a^2 - s^2}}$ quorum habetur summa. Nimirum si abscissae crescant Arithmetice, arcus ut possunt, rectangulis ex CT in differentias arcuum erunt proportionalia rectangula ex differentiis constantibus arithmeticarum, seu sinuum versorum et ipsis ordinatis figurae angulorum seu sinuum complementi reciprocis. Ni fallor autem alibi ostensum, sinuum complementi reciprocas applicatas abscissis seu sinuum complementi, seu sinuum versorum (hoc enim in differentiis coincidit) differentiis dare figuram angulorum. Sed nobis non figurae

5 f. seu *(1)* | erit *streicht Hrsg.* | *(2)* ordinata qvadratricis | in regulam est *erg.* | ad L 6 ad *(1)* sinum eius versum *(2)* eius L 10 qvia *(1)* $\frac{g^4}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ non s *(2)* omn $\frac{1}{s}$ L 13 summa, | ex data Circuli qvadratura, prodit enim eadem qvae est figurae angulorum *gestr.* |. Nimirum L 16 sinuum *(1)* versorum *(2)* complementi reciprocis, *(a)* id est ipsorum arithmeticorum, id est ordinatarum Hyperbolae, Ergo illius figurae qvadratura dabitur ex qvadratura *(b)*. Ni L 18 dare *(1)* Hyperb *(2)* figuram L

8 aliunde: S. 500 Z. 1. 15 sinuum versorum: Leibniz verwechselt Abzisse der Quadratrix und Abzisse des Kreises. 16 alibi: vgl. VII, 4 N. 34 S. 580 f. Statt über der Abzisse müssten die sinus complementi über der Ordinate abgetragen werden, um die figura angulorum zu erhalten.

$CT(T)(C)$ quadratura, sed ejus momento ex vertice A. seu axe AN, opus. Id est summa quadratorum omnium NT. Jam $AC \sqcap NT \sqcap x$. $CT \sqcap \frac{sa}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Vocemus CT, φ. Erit $\varphi^2 \sqcap \frac{s^2 a^2}{a^2 - s^2}$. et ut x intret in aequationem, et sola quidem, ne plures duabus sint indeterminatae, cogitemus esse $s \sqcap \frac{g^2}{dx}$. Ergo $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{\textcircled{2} d\overline{x}, a^2 - \frac{g^4}{\textcircled{2} dx}}$ id est $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{a^2 \textcircled{2} dx - g^4}$ et $\varphi^2 a^2 \textcircled{2} dx \sqcap g^4 a^2 + g^4 \varphi^2$. et $dx \sqcap \frac{g^2}{\varphi a}\sqrt{a^2 + \varphi^2}$. et $x \sqcap$ omn $\frac{g^2}{\varphi a}\sqrt{a^2 + \varphi^2}$. Sed hinc non licet, ut superiore pagina male feceram, concludere $x^2 \sqcap$ omn $\frac{g^4}{a^2}\ \overline{\frac{a^2}{\varphi^2} + 1}$. Ergo nondum rem absolvimus, neque adeo facile est. Invenienda scilicet summa omnium $y \sqcap \frac{g^2 x}{\sqrt{a^2 \textcircled{2} d\overline{x} - g^4}}$ positis g et a constantibus sola x variante. Haec enim est aequatio perfecte explicans naturam quadratricis. Imo hinc oritur absurdum, quia enim in nostra potestate ipsas y facere arithmeticas, fieret locus ad lineam rectam.



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

Resumamus ergo: Aequatio erat $y \sqcap \frac{sx}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Explicetur $s \sqcap \frac{g^2}{d\overline{x}}$. Hoc videndum

12 $\sqcap \frac{g^2}{d\overline{x}}$, *(1)* hoc enim indubitabile est. fiet y $\sqcap \frac{g^2}{dx}$ *(2)* Hoc *L*

6 superiore pagina: vgl. S. 501 Z. 3 f.

an sit verum. Triangula similia $BGE, \mu\xi\pi$. Ergo erit $\mu\pi : EB\,(a) :: \mu\xi : GB$ et $\mu\pi \sqcap dx$. et $GB \sqcap s$. Erit $d\bar{x}\, s \sqcap a\,\mu\xi$. Ergo non est absolute verum esse $s \sqcap \frac{a}{dx}$. sed erit ipsa g inconstans posito $\mu\xi \sqcap g^2$, si scilicet sumimus dx pro constante: Cessat ergo absurditas, sed nondum solutum est problema.

Resumamus priora: $y \sqcap \frac{sx}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. et $s \sqcap \sqrt{a^2 - z^2}$. posito esse z. sinum comple- 5
menti, fiet: $\frac{\sqrt{a^2 - z^2}x}{z} \sqcap y$. Erit $\mu\xi \sqcap d\bar{z} \sqcap \gamma$. $\mu\pi \sqcap dx$. Quaeramus $\omega \sqcap \xi\pi$. ex cognita circuli tangente, scil. $\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{a^2 - z^2 - 2z\gamma - \gamma^2} \sqcap \omega$. et fiet: $\boxed{a^2 - z^2} - 2z\gamma - \gamma^2 \sqcap \omega^2 - 2\omega\sqrt{a^2 - z^2}\ \boxed{+a^2 - z^2}$. Fiet: $z^2\gamma^2 \sqcap \omega^2 a^2 - \omega^2 z^2$. et $\omega \sqcap \frac{z\gamma}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqcap \xi\pi$ et $\mu\pi \sqcap dx \sqcap \frac{a\gamma}{s}$. et $x \sqcap a$ sum $\frac{\gamma}{s} \sqcap a$ sum $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. et $y \sqcap \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{z}$ sum $\frac{d\bar{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ $\odot$.

Quaestio jam ad mirabilem quandam analysin reducta est, nimirum, ut liceat ipsis z 10
quamcunque ascribere progressionem, modo illa talis fiat, ut ipsarum $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ inveniri possit summa, sed hoc omnino satis certum est fieri non posse. Si velimus jam loco z habere, x. id fieri puto poterit, ope aequationis superioris $x \sqcap a$ sum $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. Ergo $dx \sqcap a\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. et $②dx \sqcap \frac{a^2 ②dz}{a^2 - z^2}$. et $②d\bar{x}a^2 - ②d\bar{x}z^2 \sqcap a^2 ②dz$. Sed hinc jam novo ir-
resolubilitatis genere valor ipsius z extra v i n c u l u m t e t r a g o n i s t i c u m haberi 15
non potest, nam si faciamus ut non sit amplius intra vinculum differentiae, non ideo impe-
diemus, quo minus sit intra vinculum summae. Nec ultra hoc iri potest $\frac{dx}{dz} \sqcap \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ ☽.
Leges enim novi hujus calculi non permittunt, ut ultra eatur.

---

7 f. *Daneben:* (+ NB. Modus eligendi in calculo vane enim transponi poterat ad quadrandum utrobique. [+)]

7 f. $\boxed{a^2 - z^2}$ *(1)* $\sqcap \omega^2 + 2\omega\sqrt{a^2 - z^2}$ *(2)* $-2z\gamma - \gamma^2 \sqcap \omega^2$ | + *ändert Hrsg.* | $2\omega\sqrt{a^2 - z^2}$ *L*

Unum tantum videndum est, an non conjungendo aequationes ⊙ et ☽ inter se tolli possit z. Ac quia patet esse $\frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} \sqcap \frac{dx}{a}$. substituendo $\frac{dx}{a}$ in aeq. ⊙ redibit $y \sqcap \frac{\not{\phi}\sqrt{a^2-z^2}}{z} \frac{x}{\not{\phi}}$. Hinc jam quaeramus z. Fiet: $\frac{y^2}{x^2} \sqcap \frac{a^2-z^2}{z^2} \sqcap \frac{a^2}{z^2} - 1$ et $\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} \sqcap \frac{a}{z}$. et $z \sqcap \frac{xa}{\sqrt{y^2+x^2}}$. et $\frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} \sqcap \frac{d\frac{xa}{\sqrt{y^2+x^2}}}{\sqrt{a^2-z^2}} \sqcap \frac{dx}{a}$ et $a^2 - z^2 \sqcap -\frac{x^2a^2}{x^2+y^2} + a^2 \sqcap \frac{-\cancel{x^2a^2} + \cancel{x^2a^2} + y^2a^2}{x^2+y^2}$. et $\sqrt{a^2-z^2} \sqcap \frac{ya}{\sqrt{x^2+y^2}}$. et denique $d\frac{xa}{\sqrt{y^2+x^2}} \sqcap \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\,dx$. Quae est aequatio explicans naturam quadratricis, posita x abscissa ex diametro, et y ordinata. Sed hinc nihil duci potest ad quadraturam, exploratis mihi hactenus artibus.

Videndum an aliquid pro quadratura duci queat, ex natura tangentium: Si sit x arithmetica, fiet: $d\frac{xa}{\sqrt{y^2+x^2}}$ aequ. $\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\,[dx]$. $d\frac{x}{\omega}$ aequ. $\frac{x}{\omega} - \frac{x \mp d\overline{x}}{\omega(\mp)d\overline{\omega}}$. Fiet: $d\frac{x}{\omega}$ aequ. $\frac{\mp x d\overline{\omega}(\mp)\omega d\overline{x}}{\omega^2}$. Ergo posito $\omega \sqcap \sqrt{y^2+x^2}$ fiet: aequ. $\frac{\sqrt{\omega^2-x^2}}{\omega} d\overline{x}$. Ergo invenienda $\int \omega d\frac{xa}{\omega}$ seu seriei $\omega d\frac{\overline{xa}}{\omega}$ invenienda summa sive $\int \overline{\omega d\frac{\overline{xa}}{\omega}}$. seu $\int \overline{\mp \frac{x}{\omega} d\overline{\omega}(\mp)} \int d\overline{x}$ seu $\mp \int \overline{\frac{x}{\omega} d\overline{\omega}}(\mp)x$. Videtur subesse error.

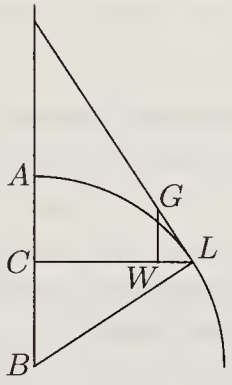
7–12 Sed ... error *erg. L*

11 $\int \overline{\mp \frac{x}{\omega} d\overline{\omega}(\mp)} \int d\overline{x}$: In diesem und dem folgenden Ausdruck fehlt ein globaler Faktor a.

71. DE QUADRABILITATE QUADRATRICIS
[Mitte 1674 – 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 133. 1 L-förmiger Streifen von max. 24 x 3,4 cm. 2 Z. auf Bl. 133 r°. Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 702

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Aufgrund der Notation ist sie frühestens Mitte 1674 verfasst worden. Möglicherweise steht sie in Zusammenhang mit der Studie zur Quadratrix N. 70.



[*Fig. 1*]

$\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap GL$. si AGL. arcus circuli. Ergo $\frac{a^2x^2}{2ax-x^2} + a^2 \sqcap \frac{\cancel{a^2x} + 2a^3 \cancel{-a^2x}}{2a-x} \sqcap \frac{2a^3}{2a-x}$. Ergo $WL \sqcap \sqrt{\frac{\cancel{2a^3}}{2a-x}}$ quae est subduplicata reciproca uniformium.

$\frac{WL}{GW} \sqcap \frac{BC}{CL}$. Ergo $WL \sqcap \frac{x\beta}{\sqrt{a^2-x^2}}$, et $GL \sqcap \sqrt{\frac{x^2\beta^2 + \beta^2a^2 - \beta^2x^2}{a^2-x^2}} \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Unde patet q u a d r a r i p o s s e q u a d r a t r i c e m .

---

10 $\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap GL$: Leibniz notiert für das Kreisbogenelement GL irrtümlich den Ausdruck für die Ordinate der figura segmentorum. Auch die anschließende Berechnung von WL ist fehlerhaft. Leibniz streicht das erhaltene Resultat und setzt in Z. 12 neu an. Die abschließende Folgerung ist nicht korrekt.

72. DE CENTRO GRAVITATIS SEMICIRCULI

[April – Ende 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 132. 1 Streifen von ca 17,4 x 1,5 cm. 2 Z. auf Bl. 132 r°. Rückseite leer. Geschwungene Schnittkanten. — Gedr.: Cc 2, S. 69. Cc 2, Nr. 701

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Auf das Theorem, das sich bereits aus PAPPUS, *Collectio* IV, prop. 26 ableiten lässt, ist Leibniz vermutlich bei der Durchsicht von Robervals hinterlassenen Papieren gestoßen. Es findet sich fast gleichlautend formuliert in Robervals Brief an Torricelli vom 1. Januar 1646 (TORRICELLI, *Opere* III, S. 356; MERSENNE, *Correspondance* XIV, S. 22) sowie in einem Manuskript (s. *a. a. O.*, S. 24 f.). In abgewandelter Formulierung ist der Satz auch in P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. I, S. 67 enthalten. Eine allgemeinere Fassung des Theorems steht in V. LÉOTAUD, *Cyclomathia*, lib. III, 1663, S. 130. Infolge der thematischen Verwandtschaft mit der auf April 1676 datierten und ebenfalls an Robervals Manuskripte anknüpfenden Studie zur Quadratrix N. 70 könnte das vorliegende Stück im selben Zeitraum entstanden sein.

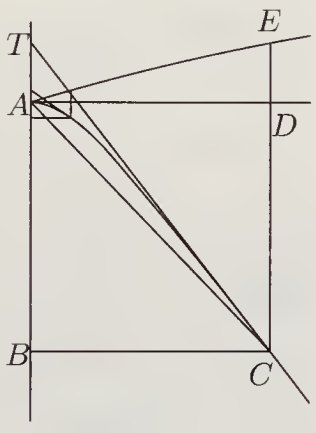
Notabile Theorema: quod C e n t r u m g r a v i t a t i s s e m i c i r c u l i sit i d e m c u m v e r t i c e Q u a d r a t r i c i s.

73. DE FIGURIS SYLLOGIS

[2. Hälfte (?) April 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 412. 1 Ausschnitt von max. 21,5 x 5,8 cm. Obere Schnittkante geschwungen. 1 S. auf Bl. 412 r°. Bl. 412 v° leer. — Bl. 412 bildete ursprünglich mit LH 4 III 9 Bl. 11–12 (VI, 3 N. 65, 72 u. 73), dat. April 1676, und der mathematischen Aufzeichnung LH 35 XII 1 Bl. 343 (Cc 2, Nr. 00; Druck in einem späteren Band dieser Reihe) einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1208

Datierungsgründe: N. 73 wurde unter die von den Herausgebern auf die zweite Monatshälfte datierte VI, 3 N. 72 auf den Bogen geschrieben.



[*Fig. 1*]

Si ABC figura curvilinea. CT. tangens. AT. intervallum tangentis, $DE \sqcap AT$. Figura $ADEA$ aequatur etiam duplo segmento ACA. ut annotavit Tschirnhusius: Porro ut TB ad AB, ita, ni fallor area $ACDE$ ad aream $ADCA$ reciproce. Sed necesse est, ut ipsae AB et TB constantem habeant rationem. Quid vero si essent inconstantes, ut si posita $AD \sqcap y$. sit DC ad DE, ut y ad 1, vel ut y^2 ad 1. vel ut y^2. ad $y+1$, ubi quidem saepe naturam figurae ac descriptionem invenire difficile. Quaeritur vero an id serviat ad Quadraturam figurae hujus, etsi ignotae. Non puto, illud tamen manifestum est si figura $ADEA$. sit sylloga figurae $ABCA$ vel ejus complemento, ita scilicet ut ex data una haberi possit altera, adhuc semel, ex particulari scilicet figurae proprietate, habitam iri quadraturam, quoniam jam habitur ex generali. Idem est de aliis ejusmodi figuris quae syllogae ex generali sunt figurarumque omnium communi natura, quod si ex peculiari figurae propositae proprietate, alia adhuc ratione reperiantur syllogae, habebitur aequatio, adeoque quadratura utriusque.

13 annotavit Tschirnhusius: Das Resultat ergibt sich unmittelbar aus Tschirnhaus' Aussagen in N. 49 S. 346 Z. 8 f. Leibniz hatte den Satz bereits selbst im Januar 1675 in N. 22 prop. (11) S. 186 Z. 8 f. hergeleitet. 21 *Fig. 1*: Das Krümmungsverhalten der Kurve AE ist nicht korrekt wiedergegeben.

74. QUADRATURA CYCLOIDIS. FIGURAE SINUUM

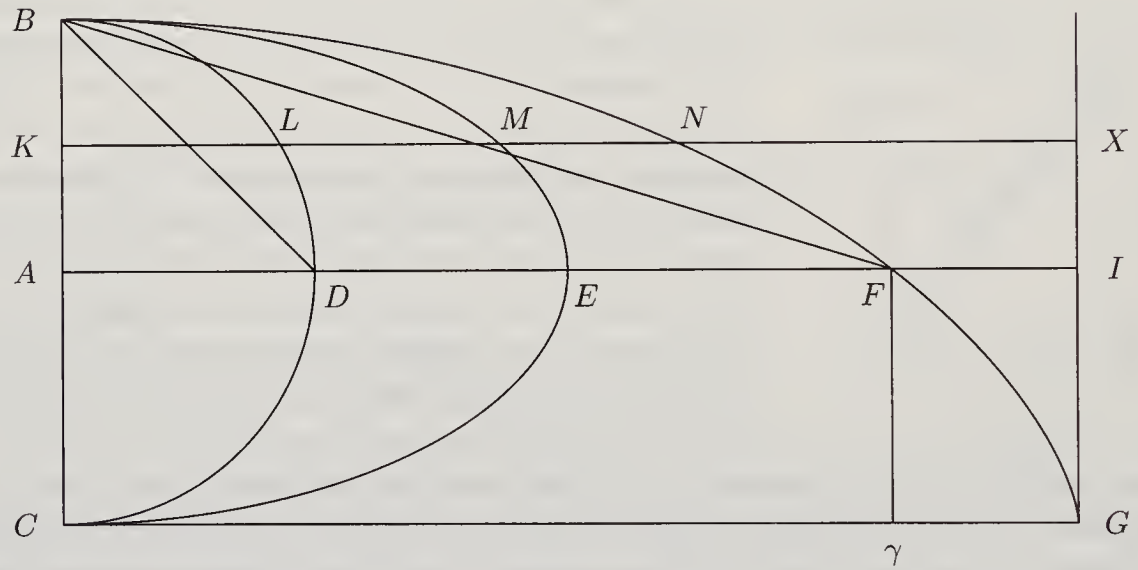
[Ende April – Anfang Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 439. 1 S. auf Bl. 439 r°. Auf Bl. 439 v° N. 75. Bl. 439 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 II 1 Bl. 125 (VII, 3 N. 58) einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1465

Datierungsgründe: Das ursprünglich mit dem vorliegenden Stück zusammenhängende VII, 3 N. 58 ist auf den 3. Mai 1676 datiert.

Quadratura Cycloidis. Figurae sinuum.

[*Erster Ansatz*]



[*Fig. 1*]

9 qvadratura ... sinuum *erg. L*

11 *Fig. 1*: Leibniz übernimmt Fig. 1 und Fig. 2 mit den Punktbezeichnungen zum größten Teil aus H. Fabri, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., in: ders., *Synopsis geometrica*, 1669, Tafel 3, Figur 24; in seinem Handexemplar hat Leibniz die fehlende Punktbezeichnung *E* in die Figur eingetragen (vgl. VII, 4 N. 1 S. 21 Z. 19 f.). — In Fig. 1 hat Leibniz als Länge der Basis *CG* den vierfachen Radius *AC* statt der Bogenlänge des Halbkreises *BDC* verwendet. Die Verzerrung ist vermutlich Ursache der falschen Gleichung in S. 511 Z. 5. In Fig. 2 hat Leibniz die Größenverhältnisse korrekt wiedergegeben.

$KL \sqcap LM$. $LN \sqcap$ arcui $\overset{\frown}{BL}$. $NX \sqcap$ arcui MEC. $CGB[D]C \sqcap 2BCDB$ ex data Cycloidis dimensione.

$\boxed{BAD \sqcap BFNB \text{ probandum.}}$

$CAIG \sqcap$ circ. $CAFG \sqcap$ circ.$-FIG$.

$/ \backslash$

$EFNBE \sqcap \frac{BLDFNB}{2}$

$FI \sqcap CG - AF$. Ergo $FI \sqcap \frac{CG}{2} - AD$ et rectangulum $FIG\gamma \sqcap \frac{CG}{2} \frown AC - AD \frown AC$.

$/ \backslash$

$(\frac{CG}{2} \sqcap) DF + AD$

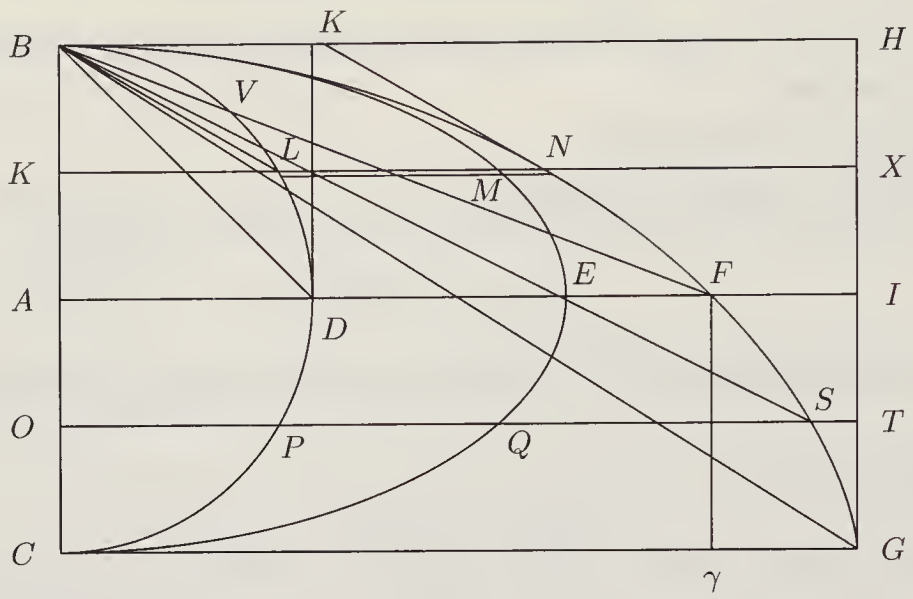
Ergo $F\gamma GF \sqcap FIG\gamma - FIGF \sqcap \frac{CG}{2}, AC - AD, AC,, - \frac{BLDFNB}{2}$ et $CAIG(\sqcap CG, AC)$ $- FIGF(\sqcap \frac{BLDFNB}{2}) + BLDFNB + BADLB$ [*bricht ab*]

[*Zweiter Ansatz*]

$LN \overset{(1)}{\sqcap}$ arc BL. $DF \overset{(2)}{\sqcap}$ arc BLD. $PS \overset{(3)}{\sqcap}$ arc BLP. $LN + PS \overset{(4)}{\sqcap}$ arc BL. + arc BLP. et arc $BLP \overset{(5)}{\sqcap}$ arc LPC. Ergo $LN + PS \overset{(6)}{\sqcap}$ arc $BL +$ arc $LPC \overset{(7)}{\sqcap}$ semicircumf. seu $\sqcap BLC \overset{(8)}{\sqcap} CG$. Idemque fit ubique ergo Omnes LN. etc. seu Trilin. $BDCGFB \overset{(9)}{\sqcap} \square ACG$ seu Circulo. Et haec omnium simplicissima est Cycloeidem metiendi via.

5 *(1)* EFB *(2)* EFNBE *L*

1 $NX \sqcap$: Der Wert für NX ist falsch; der Fehler wirkt sich nicht aus. 4 f. FIG: H. Fabri, *a. a. O.*, prop. XXIII, cor. VI u. VII, S. 383, beweist die Flächengleichheit der Dreiseite FIG und $EFNBE$ sowie des Dreiseits $BLDFNB$ und der Sinusfigur. Leibniz übernimmt daraus zunächst die Bezeichnung EFB für das zweite Dreiseit (s. Lesart) und präzisiert anschließend. Vermutlich durch die verzerrte Darstellung in seiner Figur irregeführt setzt er $EFNBE = \frac{1}{2} BLDFNB$, rechnet konsequent mit dem falschen Wert weiter und bricht ab. 14 simplicissima: vgl. *a. a. O.*, prop. XXIII, cor. V, S. 382 f.



[*Fig. 2*]

Porro $LM \overset{(10)}{\sqcap} KL$. et $PQ \overset{(11)}{\sqcap} OP$. etc. $NX \overset{(12)}{\sqcap} CG-KL-LN$. $PS \overset{(13)}{\sqcap} CG - LN$. Ergo ex 12 et 13 $PS \overset{(14)}{\sqcap} NX + KL$. Et ex 14 $PS - KL \overset{(15)}{\sqcap} NX$. Rursus ex 14 et 15 $PS - KL \overset{(16)}{\sqcap} PS - PQ \overset{(17)}{\sqcap} QS$. ex figura. Ergo $NX \overset{(18)}{\sqcap} QS$. Eodem modo $MN \overset{(19)}{\sqcap} ST$. Et $NXGN \overset{(20)}{\sqcap} BQSB$.

Sit jam Radius seu $AD \overset{(21)}{\sqcap} r$. et semiperipheria sit $\pi \overset{(22)}{\sqcap} BDC \sqcap CG$. $FI \overset{(23)}{\sqcap} CG - AD - DF$. Ergo $FI \overset{(24)}{\sqcap} \pi - r - \frac{\pi}{2}$. Ergo $FI \overset{(25)}{\sqcap} \frac{\pi}{2} - r$. $FI \overset{(26)}{\sqcap} FE$ per 18. 19. Ergo $FE \overset{(27)}{\sqcap} \frac{\pi}{2} - r$. $FIGSF \overset{(28)}{\sqcap} BMEFNB$ per 20. $ACGI \overset{(29)}{\sqcap} r\pi$. per 21. 22. $\underbrace{ACGI - FIGSF}_{ACGSF} + BMEFNB \overset{(30)}{\sqcap} ACGI$ per 28. Ergo per 30. 29. erit $ACGSF + BMEFNB \overset{(31)}{\sqcap} r\pi$. Semicirculus $BCDB \overset{(32)}{\sqcap} \frac{r\pi}{2}$ per 21. 22. accedente Archimedis

6 et *(1)* circumferentia sit c. *(2)* peripheria *(3)* semiperipheria *L*

1 *Fig. 2*: Leibniz hat in der Figur die Punktbezeichnung K doppelt verwendet. Im Text wird nur der auf dem Kreisdurchmesser BC liegende Punkt K benutzt.

theoremate. Jam $BCDB \overset{(33)}{\sqcap} BDCEB$. per 10. Ergo erit $BCEB \overset{(34)}{\sqcap} 2BCDB$. Ergo per 32. erit $BCEB \overset{(35)}{\sqcap} r\pi$. Ergo per 31. erit $BCEB \overset{(36)}{\sqcap} ACGSF + BMEFNB$. Utrique commune $AEQC$ si utrinque auferatur, fiet $BAEMB \overset{(37)}{\sqcap} ECGSF + BMEFNB$. seu $BAEMB \overset{(38)}{\sqcap} BE[C]GFB$. Sed hoc jam notum.

Trapez. $CAFG \overset{(39)}{\sqcap} r\pi$ – Trilin. $IGSF$. $BMEFNB \overset{(40)}{\sqcap}$ – ($BDEMB$ seu) $BADLB + BLDFNB$. Si a Circulo duplicato $BCGH$ auferas Circulum $ACGI$, quadrantem $\frac{r\pi}{4}$ tem $BADLB$; et $BHIFB_{[,]}$ restabit $BLDFNB$. Jam $BHIFB \sqcap GHBFG - GIFSG$. semicirc.

Ergo Circ. – quadrans – semicirc. $+GIFSG$.

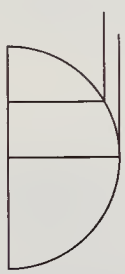
Rursus si a circ. dupl. seu a $BCGH$. auferas [*bricht ab*]

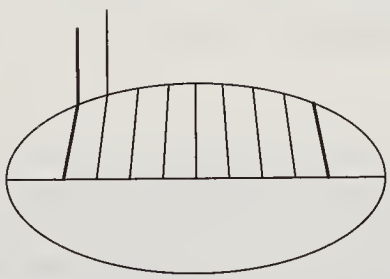
Jungantur rectae BVF et BD. Triangulum BDF erit quadrans ergo $\sqcap DABLD$. Auferatur communis utrique $BVLD$. Ergo Triang. $BAD \sqcap$ ipsi $DFVLD$ – segm. BVB.

Superficies hemisphaerii est aequalis superficiei cylindri ejusdem altitudinis et basis adeoque semicirculo generatori.

---

13 *Unter* generatori, *gestrichen:*





1 per | 19 *ändert Hrsg.* |. Ergo *L* 5 rπ– *(1)* IGFS *(2)* Trilin. | IGFS *ändert Hrsg.* |. BMEFNB *L* 6 +BLDFNB. *(1)* BLD *(2)* | si *streicht Hrsg.* | a Circulo *(a)* duplicato BCGH *(b)* BAIH auferas *(c)* BAIH, auferas *(3)* si *L* 7 –GIFSG *darunter* | BMFNM ⊓ BLDFNB – (BLDEMB seu) qvad *gestr.* | *L* 11 Ergo *(1)* segmentum *(2)* Triang. *L* 13–514,1 generatori *(1)* Reto *(2)* Si *(a)* in Cycloide *(b)* Cycloidi BFG. cuius vertex B. basis B *(3)* Si | curvae *erg.* | *(a)* semicycloidi *(b)* semicycloeidi *L*

---

1 theoremate: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I; der Satz wird bereits oben im Anschluss an Gleichung (9) verwendet. 13 semicirculo: Richtig wäre duplo circulo.

Si curvae semicycloeidi occurrat recta per centrum circuli generatoris transiens basi parallela erit segmentum figurae cycloidalis recta punctum occursus et verticem cycloidis jungente, abscissum aequale semiquadrato radii circuli generatoris.

Sit semicycloeides BFG. cujus vertex B. altitudo BC. basis CG. centrum A circuli generatoris ADC per quod transiens recta ADF basi CG parallela, occurrat semicycloidi curvae in F. Jungantur BD et BF, ajo segmentum figurae cycloeidalis $BFNB$. aequari triangulo BAD seu semiquadrato radii. Quod ita demonstro. DF aequatur BLD quadranti circumferentiae, ergo triangulum ADF cujus basis DF quadrans circumferentiae, altitudo AB, radius, aequabitur ipsi $BADLB$ quadranti Circuli. Porro Retorta $BLDFNB$ aequatur duplo BAD seu ipsi quadrato radii, ut a quibusdam scriptoribus de Cycloeide expresse ostenditur, ut a Wallisio et Honorato Fabri, ex aliis ut Dettonvillaeo facile duci potest. His positis reliqua sic absolvemus. Triangulum $BDF+$ segmento Cycloeidali $BFNB$ aequatur segmento Circuli $BDLB+$ retortae, $BLDFNB$. Nam utraque componunt $BDFNB$. Pro Triangulo BDF substituatur ejus valor, quadrans $BADLB$, vel rursus pro quadrante, ejus valor, Triang. $BAD+$ segm. circ. BD, denique pro retorta quoque substituatur ejus valor quadratum radii seu bis Triangulum BAD. et loco prioris aequalitatis habebitur haec:

(Triang. BDF. seu) Triang. $BAD+$ segm. Circ. $BDLB$; auctum segmento Cycloeidali $BFNB$ aequatur Segmento circuli $BDLB+$ (retortae $BLDFNB$ seu) bis Triangulo BAD. Ablato utrobique segmento Circuli, et Triangulo BAD semel restabit segmentum cycloidale $BFNB$ aequale Triangulo BAD seu semiquadrato radii. Q. E. D.

2 parallela *(1)*. Jam *(a)* et recta *(b)* segmentum | figurae cycloidalis *erg.* | recta punctum occursus et verticem cycloidis jungente, abscissum erit *(2)* erit *L* 7 f. demonstro. *(1)* Jungatur *(2)* DF aeqvatur | BLD *erg.* | quadranti *L* 10 f. a *(1)* scriptoribus de Cycloeide partim *(2)* qvibusdam ... expresse *(a)* annotatur, ut *(b)* ostenditur *L* 12 positis | facile *gestr.* | reliqva | sic *erg.* | absolvemus *(1)* (Triang. | qva *erg. u. gestr.* | BDF (seu) *(a)* qva *(b)* | qvadrans *erg.* | BADLB, + *(aa)* BFNB *(aaa)* + *(bbb)* aeq *(bb)* Segment. Cycl. BFNB *(aaa)* aeqv. *(bbb)* seu (ccc) aeqv B *(ddd)* aeqvatur segmento *(2)* Qvadrans circuli, BDLB+ (Retort. BDFB seu) qvadr. *(3)* Triang. *(4)* Triangulum *L* 13 Nam *(1)* ut alterutrius summa facit *(2)* | ex *streicht Hrsg.* | *(3)* componitur *(4)* utraqve *L*

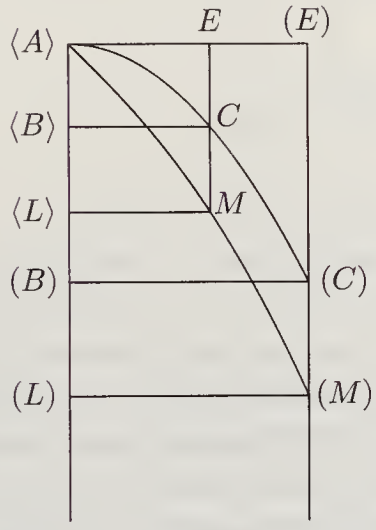
1–21 Si ... Q. E. D.: vgl. *LQK* prop. XIII S. 45 f. 11 ostenditur: Das Resultat folgt unmittelbar aus J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, § 23, S. 7 u. ders., *Mechanica*, 1670–71, pars II, cap. V, prop. XX, § B, S. 374 (*WO* I S. 502 u. 805). Ausdrücklich formuliert wird es in H. Fabri, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., 1669, prop. XXIV, § 3, in ders., *Synopsis geometrica*, S. 385. 11 Dettonvillaeo: Bl. Pascal, *Traitté general de la roulette*, 1658, S. 3 (*PO* IX S. 120).

75. PROPOSITIONES DUAE DE ORDINATIS AD ARCUS EXTENSOS APPLICATIS

[Ende April – Anfang Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 439. 1 Bl. 2°. 1/2 S. auf Bl. 439 v°. Durch Papierverlust fehlt die linke obere Ecke von Fig. 1a. Auf Bl. 439 r° N. 74. Bl. 439 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 II 1 Bl. 125 (VII, 3 N. 58) einen vollständigen Bog. 2°. Cc 2, Nr. 1466

Datierungsgründe: s. N. 74.



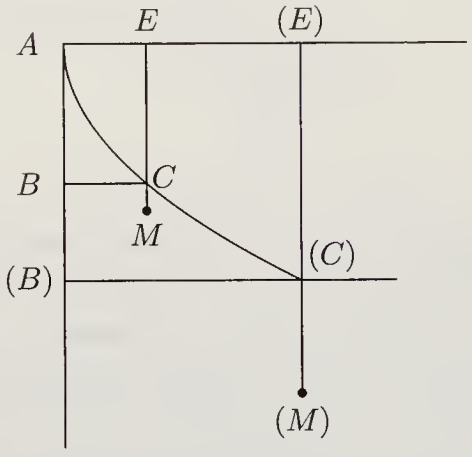


fig. 1.

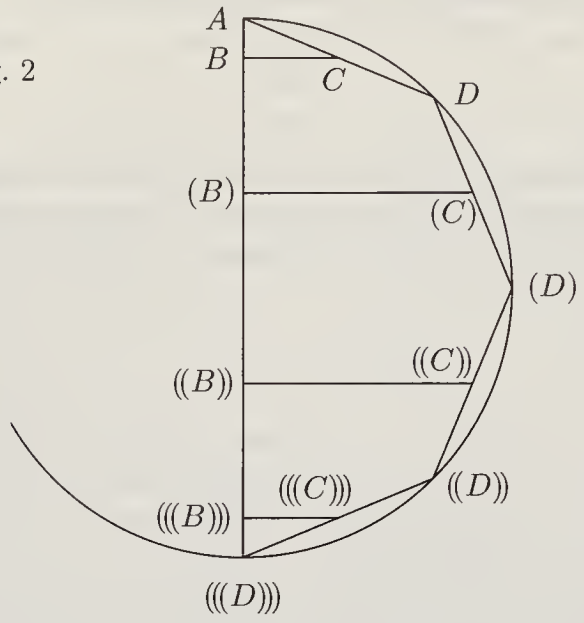
[*Fig. 1a*] [*Fig. 1b*]

„Si curvae $AC(C)$ in rectam $AB(B)$ extensae applicentur normaliter $LM.\ (L)(M)$ „aequales ordinatis $BC.\ (B)(C)$. et curva nova $AM(M)$ per earum puncta transeat; „erit area $ALMA$ ad superficiem curvae $AC.$ revolutione circa axem AB genitam, „ut radius Circuli est ad peripheriam suam.

Pro Curva fig. 1. substituatur polygonum figurae 2 cujus latera $AD.\ D(D).\ (D)((D))$ etc. Punctum medium cujusque lateris, $C.\ (C).\ ((C))$ idemque et centrum gravitatis est

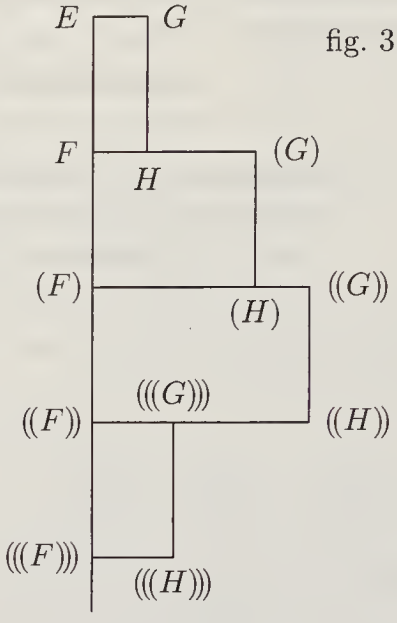
10 curvae | *(1)* AD *(2)* AC(C) *erg.* | in rectam | AB. A(B) *erg., ändert Hrsg.* | extensae *L*
10 normaliter *(1)* in punctis *(2)* eius ordinatae BC, (B)(C) *(3)* in punctis *(4)* ordinatae *(5)* LM *L*
13 ut peripheria Circuli est ad radium suum *L ändert Hrsg.*

fig. 2



[*Fig. 2, Blindzeichnung*]

fig. 3.



[*Fig. 3, Blindzeichnung*]

lateris ipsius. Superficies polygoni rotatione circa AB genita constat e superficiebus laterum rotatione genitis. Jam Superficies lateris cujusdam, ut $D(D)$ rotatione genita ex principio Guldini aequatur rectangulo ex ipsa $D(D)$ in viam sui centri gravitatis (C). seu in lineam quam revolutione describit, id est in circumferentiam Circuli cujus radius $(B)(C)$. Hoc vero rectangulum est ad rectangulum $F(G)(H)(F)$ figurae tertiae, factum ex $(B)(C)$ seu $F(G)$ in $D(D)$ seu $F(F)$ ut circumferentia ad suum radium $(B)(C)$; ergo et superficies rotatione ipsius $D(D)$ circa AB descripta est ad rectangulum $F(G)((G))(F)$ ut peripheria ad radium. Idemque cum fiat et in caeteris superficies polygoni rotatione genita ad totam summam rectangulorum $EGHF + F(G)(H)(F) + (F)((G)((H))((F))$ etc. erit ut peripheria ad radium. Jam si polygonum sit infinitorum laterum coincidet cum curva $AC(C)$. et summa rectangulorum seu fig. 3 coincidet itidem cum $A(L)(M)MA$. Idem ergo de superficie rotatione curvae $AC(C)$ genita, et area figurae ALM. demonstratum erit.

3f. ex ... Guldini *erg. L* 6 F(G)((G))(F) *L ändert Hrsg.* 7 radius (B)(C) ad suam circumferentiam *L ändert Hrsg.* 9f. caeteris tota summa rectangulorum *L ändert Hrsg.* 10 EGHH + F(G)((G))(F) *L ändert Hrsg.*

4 principio: P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VII, prop. III, S. 147.

P r o p. 2. Curva ordinatarum ad arcus in rectam extensos applicatarum etiam fieri potest applicatione arcuum ad basin. Nam fig. 1. AE aequatur BC ordinatae, huic si applicetur normaliter EM aequalis AL seu curvae AC. in E habetur idem quod ante punctum M. et ita in caeteris.

2 ad *(1)* ordinatas *(2)* basin L

76. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM OBLIQUUM, ET MOTUS CENTRI GRAVITATIS

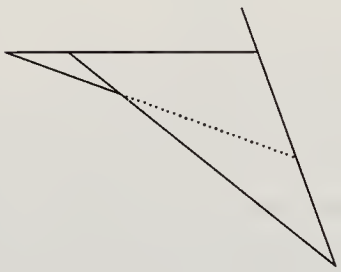
18. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 11 Bl. 4. 1 Bl. 2°, von dem oben ein Streifen von 21,3 x max. 2 cm abgeschnitten ist. 2 S. Textfolge Bl. 4 v° (Teil 1), 4 r° (Teil 2). Am oberen Rand von Bl. 4 v° Notiz (= S. 526 Z. 2–5), an der Schnittkante Reste fremden Textes. Am unteren Rand von Bl. 4 v° Nebenbetrachtung zu Teil 2, durch Strich abgetrennt (= S. 525 Z. 7–11).
Cc 2, Nr. 1420

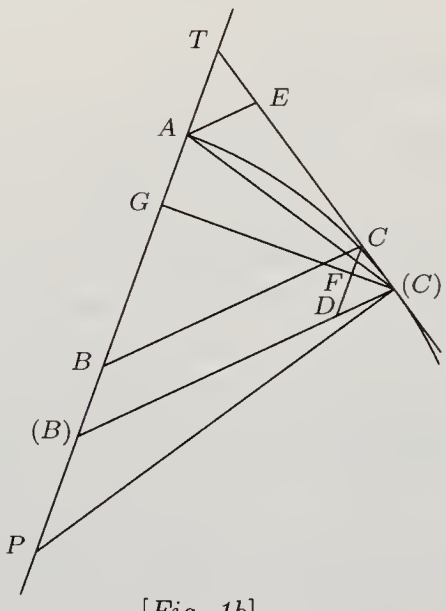
18 Maji 1676.

Triangulum characteristicum obliquum, et motus centri gravitatis

[*Teil 1*]



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

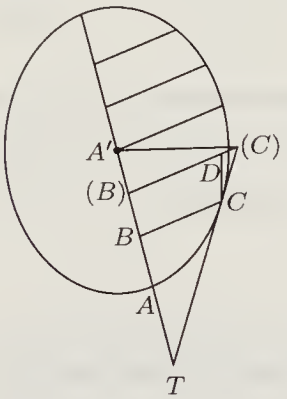
Si ordinatae [obliquae] sint, videtur idem omnino locum habere Calculus Tangentium, qui si normales. Eodem enim modo calculabitur, ostendetur CD esse ad $D(C)$ seu TB ad BC, ut calculus dabit. Etiam multa alia de quadraturis theoremata locum habe-

11 Triangulum ... gravitatis *erg. L*

13 *Fig. 1a*: Zwei gestrichene Vorstufen der Figur werden nicht wiedergegeben.

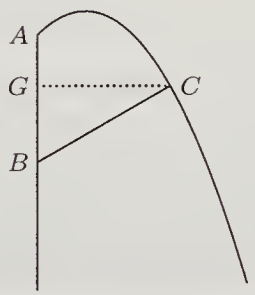
bunt, ut TB in $(C)D \sqcap BC$ in CD. Eodem modo videtur semper haberi area omnium $P(B)$ in $B(B)$ posito $T(B)$, $(B)(C)$, $(B)P$ continue proportionales. Eodem modo demonstrabitur fore omn. AE in $B(B) \sqcap$ duplo segmento $A(C)A$. Unde patet hoc ex triangulis non pendere.

Videamus an ex Triangulo Characteristico obliquo aliquid possit duci ad Curvam Ellipseos.



[*Fig. 2*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap \sqrt{2ax - x^2} \sqcap y$. Ergo $2ax - x^2 \sqcap y^2$. sive fiet $\frac{2}{2}at - \frac{2}{2}xt \sqcap \frac{2}{2}y^2$ sive $t \sqcap \frac{y^2}{a - x \sqcap \sqrt{a^2 - y^2}}$ sive $t \sqcap \frac{ax}{a-x} + x$. Ipsis t. y. tertia proportionalis erit $\frac{y^2}{t}$. At $\frac{y^2}{t} \sqcap y^2 \smile \frac{y^2}{a-x} \sqcap a - x$. Semper ergo erunt BA' vel $(B)A$. Adeoque quae perpendicularis locum tenet, seu perpendicularis obliquata erit semper $(C)A'$.



[*Fig. 3*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. et $2ax \sqcap y^2$. Angulus vero obliquus. Demittatur ex C in AB. perpendicularis. Quia datur angulus ABC. dabitur ratio GB ad BC. eritque hoc modo: $GB \sqcap \frac{e}{a}y$. et $AG \sqcap x - \frac{e}{a}\,y \sqcap z$. et $GC \sqcap \sqrt{y^2 - \frac{e^2}{a^2}y^2} \sqcap v$. sive $v^2 \sqcap \bigwedge \sqrt{2ax}$ $2ax - \frac{2e^2x}{a}$. Jam $x \sqcap \frac{v^2}{2a - \frac{2e^2}{a}}$. Ergo denique fiet $\frac{v^2}{2a - \frac{2e^2}{a}}$

8 *Nebenrechnung:* $x^2 - 2ax + a^2 \sqcap a^2 - y^2$ et $x \sqcap \sqrt{a^2 - y^2} + a$.

1 in | CD *ändert Hrsg.* | ⊓ BC *L* 1 f. omnium | PB *ändert Hrsg.* | in *L* 3 f. ex | meris *gestr.* | triangulis *L* 10 ergo *(1)* concurrentium per *(2)* erunt *L* 11 obliqvata *(1)* erit *(2)* CA erit constans *(3)* erit *L*

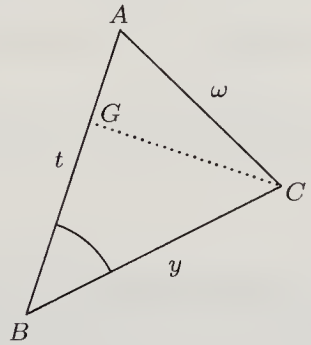
3 demonstrabitur: Die folgende Behauptung ist nicht richtig; an Stelle von AE müsste $AE \cdot \sin \alpha$ stehen, wobei $\alpha = \sphericalangle EAB$. 7 $AB \sqcap x$: Leibniz bezeichnet in der Figur und im Text zwei verschiedene Punkte mit A; zur besseren Unterscheidung wird für den zweiten Punkt A' verwendet.

$-\frac{e}{a}\sqrt{\frac{2av^2}{2a-\frac{2e^2}{a}}} \sqcap z.$ sive $z \sqcap \frac{a}{2a^2-2e^2}\, v^2 - \frac{ev}{\sqrt{a^2-e^2}}$.

Generaliter $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $GB \sqcap \frac{e}{a}y$. $AG \sqcap z \sqcap x - \frac{e}{a}y$. $GC \sqcap v \sqcap \sqrt{y^2 - \frac{e^2}{a^2}y^2}$ sive $v \sqcap y\sqrt{1-\frac{e^2}{a^2}}$. Adeoque $y \sqcap \frac{av}{\sqrt{a^2-e^2}}$ et $x \sqcap z - \frac{ev}{\sqrt{a^2-e^2}}$. Unde si hi valores substituantur in aequatione naturam curvae explicante per relationem BC ad AB, habetur alia explicans per relationem GC ad AG.

Porro in Triangulo Characteristico $CD \sqcap dx$. $D(C) \sqcap dy$. Investiganda est $C(C)$. vel in Triangulo $T(B)(C)$ ex datis $T(B)$. $(B)(C)$ et angulo $T(B)(C)$ investiganda est $T(C)$. Ducta normali $(C)G$ erit $(B)G \sqcap \frac{e}{a}(B)(C)$ seu $\frac{e}{a}y$ et $TG \sqcap t - \frac{e}{a}y$ et $(C)G \sqcap \frac{y}{a}\sqrt{a^2-e^2}$ et $(C)T,^2 \sqcap y^2 \boxed{-\frac{e^2}{a^2}y^2} + t^2 - \frac{2te}{a}y \boxed{+\frac{e^2}{a^2}y^2}$.

Hic notandus compendiosus modus exprimendum tertium latus trianguli ex duobus datis, et angulo opposito.



[*Fig. 4*]

Data latera, $t.$ $y.$ quaesitum ω. Datus anAB BC AC gulus ABC, ergo et ratio CB ad BG, quae sit a ad e. Erit $AC,^2 \sqcap y^2 + t^2 - \frac{2tey}{a}$. Regula ergo haec erit in triangulo: Quadratum lateris cujusdam assumti differt a quadratis laterum reliquorum, spatio quod sit ad duplum rectangulum reliquorum laterum, ut radius ad sinum complementi anguli lateri assumto oppositi.

{ Quadrata laterum duorum simul sumta differunt a quadrato tertii lateris in triangulo, figura quae sit ad duplum rectangulum sub ipsis, ut radius est ad sinum complementi anguli lateri tertio oppositi.

Sed hoc obiter.

6 C(C). *(1)* ducta perpendiculari (C)FG utiqve *(2)* vel *L* 13 ad | BT *ändert Hrsg.* |, qvae *L* 15 triangulo: *(1)* latus qvodlibet *(2)* Qvadratum *L*

6 Porro: Im Folgenden bezieht sich Leibniz auf Fig. 1b. 19 *Fig. 4*: Ein gestrichenes Dreieck unterhalb der Figur wird nicht wiedergegeben.

Nunc inventa $(C)T.$ facile habetur $C(C)$. Nam $\dfrac{C(C)}{T(C) \sqcap \sqrt{y^2 + t^2 - \dfrac{2tey}{a}}} \sqcap \dfrac{D(C) \sqcap dy}{(B)(C) \sqcap y}$ $\sqcap \dfrac{CD \sqcap dx}{T(B) \sqcap t}$ et $C(C) \sqcap \dfrac{dy}{y}\sqrt{y^2 + \dfrac{y^4}{a^2 - y^2} - \dfrac{2e}{a}\dfrac{y^3}{\sqrt{a^2 - y^2}}}$. Sit $dy.$ semper uniformis fiet: $C(C) \sqcap \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{a^2 - y^2} - \dfrac{2ey}{a\sqrt{a^2 - y^2}}}$ vel $\dfrac{C(C)}{dy} \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2 - \dfrac{2e}{a}y\sqrt{a^2 - y^2}}}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ vel $\dfrac{C(C)}{dy} \sqcap \sqrt{a^2\sqrt{a^2 - y^2} - 2eya + \dfrac{2ey^3}{a}} \smile a^2 - y^2.$

[*Teil 2*]

Videndum an non Guldini principium possit reddi generalius, semperque verum sit spatium alicujus figurae motu percursum aequari areae corporis ductae in viam centri gravitatis. Quod intelligendum opinor, si figurae portio durante motu in alterius portionis locum non succedit. Tunc enim calculus spatii percursi hoc modo iniri non potest.

Caeterum videndum si figura $ABCD$ circa axem obliquum AD gyranda sit puncto C circa centrum D et puncto $B.$ circa centrum A eunte, et ita de caeteris (quod non puto fieri posse, nisi rectae DC, AB, aliaeque a se invicem divisae intelligantur et moveri circa DF vel AG) tunc videndum an Spatium percursum a singulis circa diversos axes motis, motui centri gravitatis E aequiparetur. Hoc videtur ex mechanicis sequi, si verum est tantae difficultatis esse movere corpus, ac movere ejus centrum gravitatis. Fingamus esse

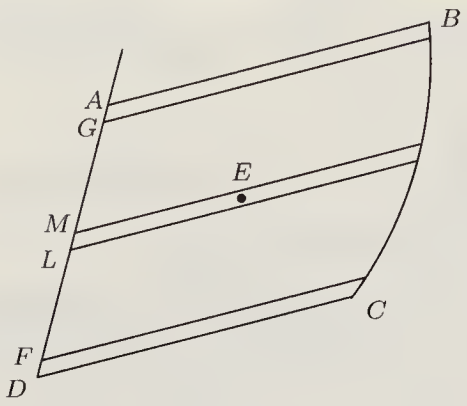
---

6 f. *Darüber:* Vide plura schediasmate peculiari de via centri gravitatis 18 Maji 1676 ubi ista rectius.

2 $\dfrac{\text{CD} \sqcap \text{dx}}{\text{TB} \sqcap \text{t}}$ *L ändert Hrsg.* 7 sit *(1)* area *(2)* spatium alicuius *(a)* corporis *(b)* figurae *L* 13 f. circa *(1)* A *(2)* | CF *ändert Hrsg.* | vel *L*

---

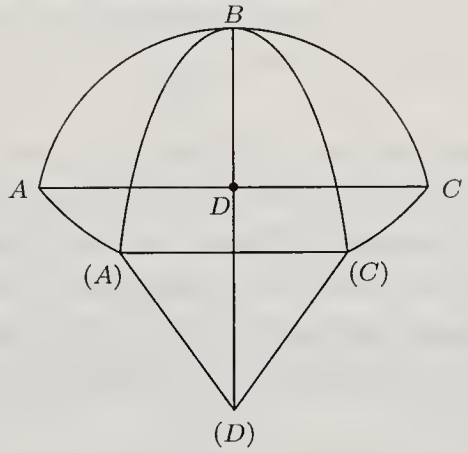
2 $C(C)$: Leibniz berechnet im Folgenden das Bogenelement der Ellipse von Fig. 2. 6 principium: P. Guldin, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VII, prop. III, S. 147. 17 schediasmate: N. 77.



[*Fig. 5*]

in numeros exiguos axes ut *DF. AG. LM.* et uno eodemque impulsu parallelogramma singula moveri circa axem suum. Patet tantundem oneris circumagere qui omnia quo sunt situ, et, qui ex centro gravitatis suspensa circumegerit, porro quantitas motus aestimanda ex ductu corporis in spatium successivum. Et ad eandem semper motus quantitatem producendum eadem semper opus vi, et eadem semper vis, sive corpus ipsum, sive e centro gravitatis suspensum moveas. Itaque etiam eadem semper quantitas motus, adeoque area spatii successivi seu spatium percursum, uno modo aequale viae centri gravitatis in aream. Porro eodem modo et de superficie hac revolutione geniti intelligi potest. Nempe similiter probabitur eam aequari ductui viae centri gravitatis. Unde videtur aditus quidam aperiri ad curvam Ellipseos, et ad Scalena.

Caeterum ex theorematis hujus universalitate videtur consequentia sequi admiranda:



[*Fig. 6*]

Sit arcus chorda *AC*, medium chordae *D*. super fulcro ducatur in (*D*). ipsis *A*. *C*. translatis in (*A*). (*C*). Ajo spatium *BA*(*A*)*B*(*C*)*CB*. percursum scilicet ab arcu *ABC* utcunque transformato, aequari viae centri gravitatis in ipsum arcum. Itaque tantum opus est invenire centrum gravitatis arcus primi et ultimi, eorumque intervallum cognitum erit, ejusque ope et spatium.

Ecce jam inventum novum generalissimum ad Spatiorum percursorum areas inveniendas: inprimis utile illis Spatiis dimetiendis, quae a transformatis motu, percurruntur.

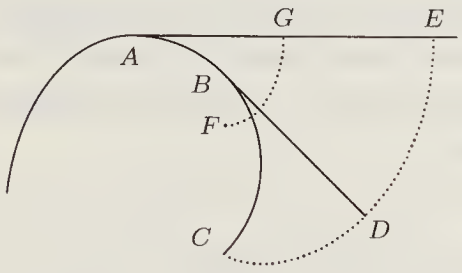
---

15 *Daneben:* Error hic

2 impulsu | rectangula *ändert Hrsg.* | singula *L* 3 tantundem *(1)* oneris attollere qvia omnia *(2)* oneris *L* 24 f. generalissimum *(1)* tum ad eorum qvae moventur, *(2)* ad *L*

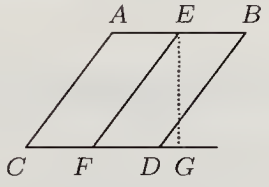
---

14 Scalena: s. N. 78. 15 Caeterum: Die folgende Behauptung ist i. Allg. nicht richtig, wie Leibniz nachträglich am Rand anmerkt.

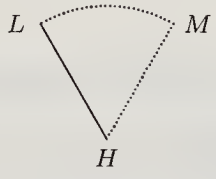


[*Fig. 7*]

Hinc si sit curva ABC evolvenda, et evolutione describatur curva CDE. videndum hic, et oritur subtilissima quaestio, an si tota curva non moveatur, simul, sed partes motae crescant, nihilominus si sumatur via centri gravitatis ejus FG, quia scilicet id durante evolutione (ob partem curvae semper majorem, in re[cta]m extensam) semper mutatur; et ea via in curvam ABC, seu rectam AE, ducatur, proveniat area $ABCDE$. Hoc si ita est, mirificas habebit consequentias; poterimus enim componere motum cum non moto; et aestimare centrum gravitatis totius. Caeterum cum areae habentur, utilissima erunt ista, ad dimetiendas curvas, seu vias centrorum gravitatis. Ut in circulo habebitur dimensio illius curvae. Si Curva utrinque aequaliter transformabitur, ut supra in arcu extenso et similibus, tunc centrum gravitatis describet lineam rectam adeoque facilior longe inquisitio, tantum enim opus curvam motam, et primi ultimique status centrum haberi, non loci omnium intermediorum dimensionem. Haec longe utiliora et subtiliora Geometria indivisibilium, quia non opus est ulla per parallelas aliasve resolutione. Tantum opus est, ut unum illud excipiatur, cum scilicet unum punctum durante motu intrat in alterius locum. Caeterum hinc cavendum nonnihil videndumque an non in ejusmodi flexibus quodam modo contingat ut unum in alterius locum transeat.



[*Fig. 8a*]

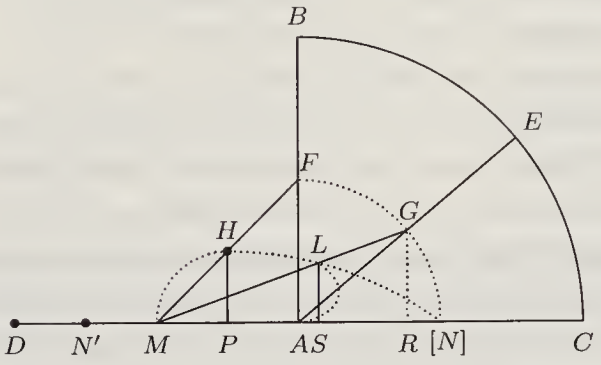


[*Fig. 8b*]

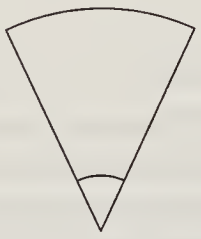
Et haec jam ratio est verissima cur si AB, moveatur in CD. spatium $ABDC$ non sit AB mobile ductum in EF. viam centri gravitatis E. quia hic motus compositus ex duobus[,] uno perpendiculari ex E in G. alter[o] horizontali in ipsa AB. ubi mobile sua vestigia percurrit. Idem est si mobile moveatur circa aliquod centrum. Negligendus est ad spatium metiendum motus quo corpus in suis manet vestigiis, adeoque ea tantum via

4 sed | tantum *gestr.* | partes *L* 10 moto; | est *ändert Hrsg.* | aestimare *L* 10 f. totius. *(1)* Aliud qvoqve videndum. *(2)* Caeterum *L* 11 area *L ändert Hrsg.* 12 Si *(1)* recta trans *(2)* Curva *L* 15 non *(1)* omnium intermediorum curvae *(2)* loci *L*

centri gravitatis metienda est, qua corpus motu movetur in sua vestigia non succedente. Itaque si pluribus simul motibus moveatur, alius ejusmodi motus secundum quem in suis vestigiis manet, negligetur. Haec si exacte considerentur, poterit credo locum habere, magno tamen judicio adhibito, generalis regula nostra.



[*Fig. 9a*]



[*Fig. 9b*]

Sit $DA \sqcap AB$. M. medium inter D et A. F medium inter A et B et H medium inter M et F et L medium inter M et G et A medium inter M et N. Demittatur perpendicularis HP erit $\sqcap MP$. Sit $DP \sqcap x$ erit $DM \sqcap \frac{a}{2}$ (posito $DA \sqcap a$) et erit $HP \sqcap x - \frac{a}{2} \sqcap MP$. Angulus FMG anguli FAG dimidius[,] est enim ille ad circumferentiam, hic ad centrum super eodem arcu FG. Jam AR anguli FAG sinus, GR. sinus complementi.

---

5 *Unter Fig. 9a:* HLA via centri gravitatis ipsius DAB. durante motu BA circa A.

6 *Daneben:* Verum

1 vestigia *(1)* non rede⟨u⟩ *(2)* no *(3)* non L

---

5 *Fig. 9a*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben. Die überarbeitete Figur stimmt nur unvollkommen mit dem zugehörigen Text überein. Leibniz hat erst im Verlauf der Überlegung festgestellt und am Rande angemerkt, dass der Schwerpunkt H von DAB sich bei der Rotation von AB nach AC nicht nach dem von ihm ursprünglich mit N bezeichneten Mittelpunkt von AC bewegt, sondern auf einem Kreisbogen nach A. Er hat die Punktbezeichnung N gestrichen und den Mittelpunkt von DM mit N bezeichnet. Dieser Punkt erscheint nur in einer Nebenbetrachtung und wird dort und in der Figur mit N' bezeichnet, um Verwechslungen zu vermeiden. Den Kurvenbogen LN hat Leibniz nicht gestrichen, sondern nur den Bogen LA ergänzt. Da LS immer links von AB liegen müsste, wird der Verlauf nicht richtig wiedergegeben. Eine korrekte Darstellung gibt Leibniz in fig. 2 von N. 77.

Ergo $GR \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{4} - AR^2}$ et $LS \sqcap \frac{GR}{2}$. Sit $DS \sqcap x$. $AR \sqcap MR - \frac{a}{2}$. et $MR \sqcap 2MS$ et $MS \sqcap DS - DM \sqcap x - \frac{a}{2}$. Ergo $MR \sqcap 2x - a$ et $AR \sqcap 2x - \frac{3a}{2}$. et $AR^2 \sqcap 4x^2 - 6ax + \frac{9a^2}{4}$ et fiet: $LS \sqcap \frac{1}{2}\sqrt{6ax - 4x^2 - \frac{5a^2}{4}}$. punctumque L. erit ad circuli circumferentiam, adeoque et via centri gravitatis ipsius DAB, dum AB rotatur circa A erit arcus Circuli. Et videndum an Calculo suffragante area $BACEB$ sit curva HLA (arcus circuli) ducta in DC seu $DA + AB$. Ergo $2\not\phi$ in $HLA \sqcap \frac{\not\phi}{2}$ in BEC. Ergo $HLA \sqcap \frac{BEC}{4}$.

---

3 *Nebenbetrachtung auf Bl. 4 v° unten:* $LS \sqcap \sqrt{\frac{3}{2}ax - x^2 - \frac{5}{16}a^2}$. Sit $x \sqcap z + b$. fiet $\frac{3}{2}az + \frac{3}{2}ab - z^2 - 2zb - b^2 - \frac{5}{16}a^2$ et sit $b^2 - \frac{3}{2}ab\,[+]\,\frac{9}{16}a^2 \sqcap \frac{4}{16}a^2$ et $b - \frac{3}{4}a \sqcap \dagger\frac{1}{2}a$. et $b \sqcap \frac{3}{4}a \dagger \frac{1}{2}a$. Unde $\frac{3}{2}az - 2bz \sqcap \frac{3}{2}az - \frac{3}{2}az \dagger az$. et ponendo $\dagger \sqcap +$ fiet denique loco $\sqrt{\frac{3}{2}ax - x^2 - \frac{5}{16}a^2}$ haec: $\sqrt{az - z^2}$. Est ergo $b \sqcap \frac{1}{4}a$. Ergo $z \sqcap x - \frac{1}{4}a$. A $DS \sqcap x$ resecetur $DN' \sqcap \frac{a}{4}$ restabit $N'S \sqcap z$.

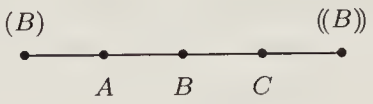
5 curva *(1)* HLN *(2)* HLA *L* 6 in *(1)* HLN *(2)* HLA *L* 6 ergo *(1)* HLN *(2)* HLA $\sqcap \frac{\text{BEC}}{4}$

| Et certe ut ab una parte curva terminatur in N, ita ab altera utiqve terminabitur in M. Jam HLN est arcus circuli ob Calculum Ergo HMN est angulus ad circumferentiam ergo duplus anguli ad centrum. *(a)* Angulus *(b)* Ergo duplus anguli cuius arcus est HLN. at item angulus *(aa)* HLN *(bb)* HMN dimidius anguli FAN. (cum ille etiam sit ad circumferentiam hic vero ad centrum arcus FGN) ergo angulus FAN, vel BAC *(aaa)* qvadruplus *(bbb)* aeqvalis anguli cuius arcus HLN. iam ex nostra Hypothesi arcus BEC qvadruplus est arcus HLN. | cumqve et angulus illius angulo huius sit qvadruplus necesse est si vera Hypothesis nostra, esse arcus eiusdem circuli *gestr.* | sed haec non videntur respondere. Videndum et an et qvomodo area Ellipseos inveniri possit, motu centri gravitatis chordae describentis. *gestr.* | *L* 8 et | erit *ändert Hrsg.* | b^2 *L* 9 †az. *(1)* si $\dagger \sqcap -$ fieret absurdum. Ergo $\dagger \sqcap -$ et $\dagger \sqcap +$. *(2)* et *L* 11 MS $\sqcap$ z *L ändert Hrsg.*

---

3 *LS*: Bei der Berechnung von *LS* unterläuft Leibniz ein Flüchtigkeitsfehler. Der falsche Wert geht auch in die zugehörige Nebenbetrachtung ein. Leibniz erkennt schließlich die Unstimmigkeit und streicht den Schluss der Überlegung. Korrekt durchgeführt wird sie in N. 77.

[*Notiz*]



[*Fig. 10*]

Punctum B. esse medium inter A. et C. sic exprimetur[:] $AC \sqcap AB$. et $AC \sqcap BC$. Hinc porro consequentia seu Theorema elegans: Si $AC \sqcap AB$. et $AC \sqcap BC$. erit $AB+BC \sqcap AC$. Vides quomodo ope situs ex majoritatibus concludatur aequalitas.

77. DE VIA CENTRI GRAVITATIS NOVA

18. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 11 Bl. 3. 1 Bl. 2°. 2 S. Figuren teilweise überarbeitet. Abgebrochene bzw. gestrichene Vorstufen werden nicht wiedergegeben. Geringe Textverluste durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 1419

18 Maji 1676.

De via centri gravitatis nova.

Theorema generalissimum molior: Via centri gravitatis ducta in mobile, aequatur loco mobilis successivo. Cujus rei ratio est, quia tanta vi opus est quantus est effectus. Et tantus est effectus, cum de motu agitur, quantus est motus; tantus autem est motus quanta est via mobilis successiva, seu quanta est summa omnium locorum quos occupavit mobile successive. Ergo et vis tanta est quantus est locus mobilis successivus. Porro tanta vis est necessaria ad movendum corpus quomodocunque dispositum, quanta vi opus ad ipsum movendum ex centro gravitatis libere suspensum. Tunc autem locus ejus successivus aequatur viae centri gravitatis ductae in corpus. Ergo cum eadem semper vi opus sit etiam locus successivus aequivalebit. Ergo aequabitur via centri gravitatis ducta in mobile, loco mobilis successivo, seu viae mobilis.

Haec jam ad Geometriam produci possunt. Nimirum si nullum mobilis punctum durante motu succedit in locum alterius, via mobilis, seu locus mobilis successivus aequatur Spatio percurso. Ut fig. 1.

---

8 *Dahinter:* Adde aliud schediasma ejusdem diei ubi et de Triangulo characteristico nova.

8 De ... nova *erg. L* 9 in *(1)* are *(2)* aream mo *(3)* mobile *L* 18f. mobilis. *(1)* sed via mobilis *(2)* Cum *(3)* Haec *L*

---

22 aliud schediasma: N. 76.

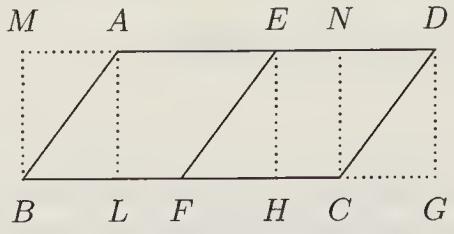


fig. 1

Si $AD.$ transferatur in LG motu ad $AD.$ perpendiculari, et centrum gravitatis sit punctum AD medium E, quod feretur in $H.$ erit EH via centri gravitatis in mobile AD aequalis viae mobilis $DALG.$ Eodem modo in fig. 2.

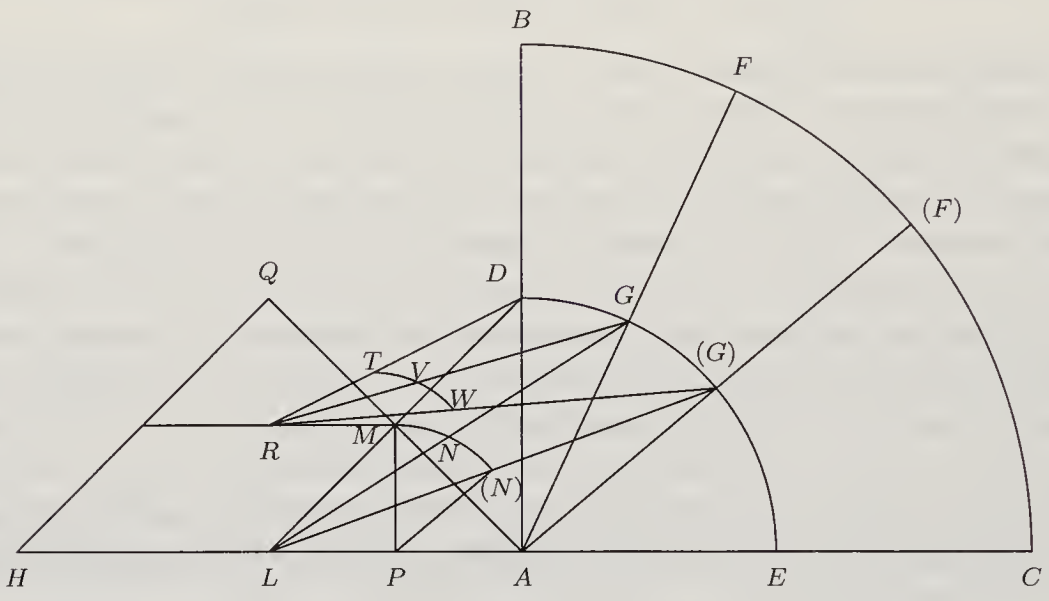


fig. 2

Si circa centrum A moveatur radius AB in $AC.$ sector $BACFB$ aequabitur ipsi arcui $DGE.$ viae centri gravitatis ipsius $AB.$ ductae in $AB.$ Quod verum esse constat. Idem constat de curvis aut Spatiis quae circa quendam axem immobilem feruntur ex iis quae dixit Guldinus. Opus autem est, directionem motus esse ipsi mobili perpendicularem, (lineae planove) quod fit tam in motu directo per perpendicularem, quam in motu rotationis circa quendam axem.

9 dixit: P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VIII, prop. III, S. 147.

Ut in fig. 1. si AD oblique transferatur in BC; spatium $ABCD.$ non aequatur ipsi AD in EF viam centri. Hujus rei vero ratio ex dictis pendet, quia motus AD in BC ex duobus compositis, uno ex AD in LG, secundum quem quodlibet mobilis punctum locum novum acquirit; altero ex AD in $MN.$ ubi semper punctum unum in alterius locum succedit. Sola ergo perpendicularis directio considerari debet.

Hinc jam nova quaedam ac memoranda posse ⟨duci⟩ arbitror, quibus ut viam sternam; hoc considerabo: Si quis in aliquo sit motus secundum partem tantum, nihilominus spatium percursum aequatur viae centri gravitatis totius durante motu, in totum. Ut sit angulus rectus $HAB.$ Sit HA aequalis $AB.$ et immobili manente HA moveatur AB circa A ita ut describat sectorem $BA(F)FB.$ Videamus quae durante motu futura sit via centri gravitatis totius $HAB.$ Centrum gravitatis HA est $L.$ medium, et AB est D medium. Junctae $LD.$ punctum medium $M.$ utique erit centrum gravitatis rectae utriusque HA, AB eo quo initio positae sunt situ. Translato AB in $AF.$ centrum gravitatis ipsius $AB.$ venit in G, ipsius HA manet in $L.$ Jungatur $LG.$ medium ejus $N.$ erit novus locus centri gravitatis totius $HAF.$ eodemque modo ex punctis $L.(G).(F).$ invenietur punctum $N.$ adeoque via centri gravitatis erit arcus Circuli $MN(N).$ quem patet esse dimidium arcus $DG(G).$ et quartam partem arcus $BF(F).$ Nam angulus $DL(G)$ dimidius anguli $DA(G).$ et idem angulus $DL(G)$ vel $ML(N)$ dimidius anguli $MPN.$ Anguli ergo $MP(N)$ et $DA(G)$ aequales, ergo arcus ut diametri, jam LA diameter dimidia ipsius LE, ergo et arcus $MN(N)$ dimidius arcus $DG(G)$ et quarta pars arcus $BF(F).$ Jam sector $BA(F)FB$ aequatur semiarcui $BF(F)$ in AB, id est $DG(G)$ in AB id est dimidiae $DG(G)$ sive ipsi $MN(N)$ in duplum AB, seu in $HA+AB.$ Ergo apparet hic viam centri gravitatis totius HBA, nempe $MN(N)$ ductum in totum $HA+AB.$ etsi tantum pars ejus mota fuerit, aequari spatio percurso.

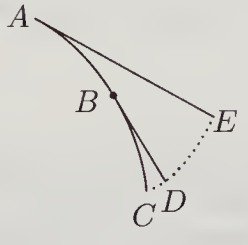


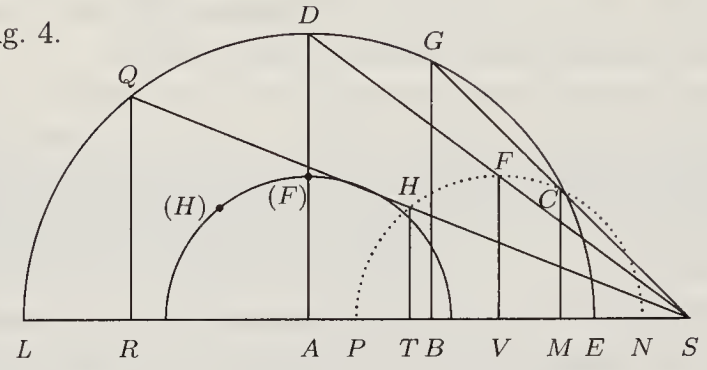
fig. 3.

Hinc jam praeclarum quiddam ducemus; sit curva ABC cujus evolutione describatur curva $CDE.$ Ajo curvam ABC, seu rectam AE, ductam in viam centri gravitatis, fili ipsi ABC circumplicati, et in A fixi manentis, ab altera autem parte continuo magis magisque extensi, aequari figurae $AEDCBA.$ Quod priorum tantum corollarium est. Nam directio motus partium fili, semper est perpendicularis, scilicet fixa circa ali-

10 ut *(1)* describat *(a)* qvadrantem *(b)* arcum BF(F) *(2)* describat 12 LB. *L ändert Hrsg.* 27 in *(1)* locum *(2)* viam *L*

quod centrum. Sed antequam hoc ita pronuntiemus, unum ad huc examinandum est figura 4.

fig. 4.



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

Nempe diametro LE. sit circulus $LQDGE$. In diametro, producta si placet sumatur punctum S. Jungantur $SE. SG. SD. SQ. SL.$ etc. et ducantur ordinatae $GB. DA. QR.$ Junctae SE etc. bisecentur in punctis $N. C. F. H. P.$ Quaeritur horum punctorum locus. Sit $EB \sqcap x.$ et $AE \sqcap a.$ erit $GB \sqcap \sqrt{2ax - x^2}.$ et $SE \sqcap e.$ Erit $SB \sqcap x \dotplus e$ et $SM \sqcap \frac{x \dotplus e}{2}.$ $CM \sqcap \sqrt{\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{4}}.$ $NM \sqcap SM \dotminus \frac{e}{2}.$ Ergo $NM \sqcap \frac{x}{2} \sqcap y.$ Erit $CM \sqcap \sqrt{ay - y^2}.$ Ergo locus est ad circulum cujus radius $\frac{a}{2}$ sive AE sive NP. Unde generaliter si rectae ex puncto dato ad circulum ductae in eadem ratione secentur, locus sectionum erit ad circumferentiam circuli, cujus diameter ad priorem in eadem ratione erit, qua portio absecta ad totam rectam. Hinc sequitur porro etiam arcum QD esse ad arcum HF ut QS ad HS seu ut diameter LE ad diametrum PN. Nam si V centrum circuli PFS

5 f. QR. *(1)* qvae bisecentur *(2)* Junctae *L* 8 $\sqcap \frac{x \dotplus e}{2}.$ *(1)* et EM $\sqcap \frac{x \dotplus e}{2} \dotplus$ *(a)* $\frac{e}{2}$ *(b)* e ergo erit EM *(aa)* $\sqcap$ z $\sqcap$ *(bb)* $\sqcap \frac{x \dotplus e}{2}.$ sit EM $\sqcap$ z. erit x $\sqcap$ 2z $\dotplus$ e. | et dimidia ipsius GB seu CM *streicht Hrsg.* | erit $4az \dotplus 2ae - 4z^2 \dotplus 4ze - e^2 \sqcap CM^2.$ vel *(2)* CM $\sqcap \sqrt{\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{4}}$ | NE *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ ... ergo | NE *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{x}{2} \sqcap$ y *L* 9 radius *(1)* a | sive AE sive NP *erg.* | *(2)* $\frac{a}{2}$ sive | AE sive NP *ändert Hrsg.* | Unde *L*

transferatur in A centrum circuli LQE. erit H in (H). et F in (F) et arcus $(H)(F)$ idem arcui HF. Is autem est ad QD ut $A(H)$ ad AQ. seu ut PN ad LE.

Hinc jam porro demonstratur generalissime quod suscepimus, sit enim totum ex rectis pluribus compositum fig. 2. nempe $HQAB$. sitque tantum linea AB mobilis circa centrum A, reliquae lineae quotcunque HQ. QA. maneant immota. Inveniatur reliquarum centrum gravitatis R. Junganturque semper RG. seu ex R. ad loca G in quibus erit D. centrum rectae AB. Ducantur rectae, quae secentur in $T.V.W$, ut DT sit ad TR in ratione reciproca aggregati linearum immotarum $HQ + QA$ ad ipsam AB. Erit curva TVW via centri gravitatis totius $HQAB$. Porro ex iis quae demonstrata sunt ad fig. 4. erit TVW ad $DG(G)$ ut RT ad RD. seu ex constructione ut AB ad $HQ + QA + AB$. Ergo $HQ + QA + AB$ mobile totum (partim motum partim immotum) in TVW viam centri gravitatis aequabitur AB in $DG(G)$ seu sectori BAF. Hoc ergo universalissime demonstrato verum erit quod diximus ad figuram 3.

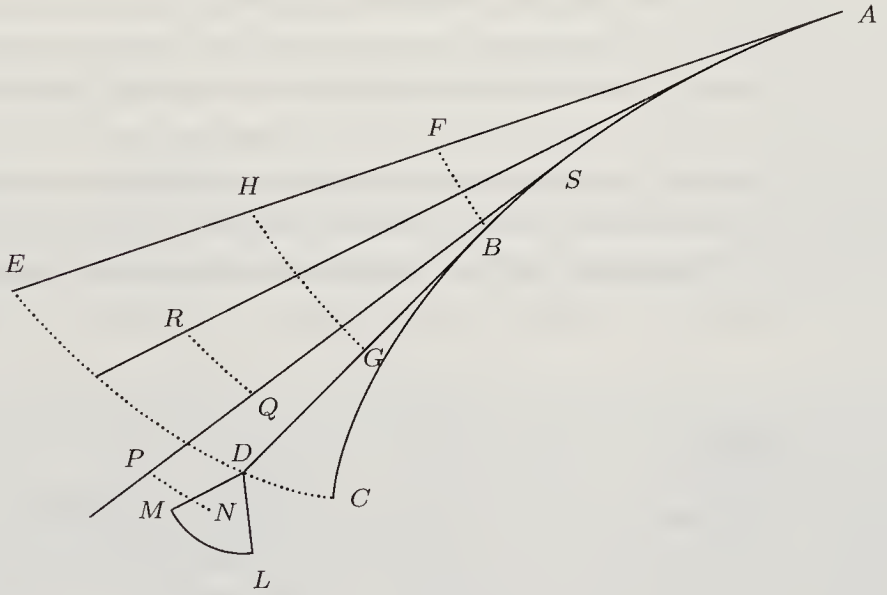


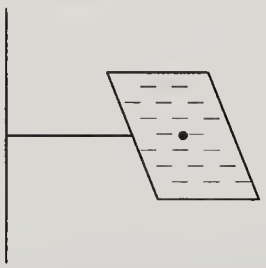
fig. 5

Porro ex theoremate generali illud jam sequitur praeclarum. Sit in fig. 5. Evolvenda curva ABC evolutione descripta CDE et huic parallela descripta a puncto fili circumplicati, B. vel si placet, sit evolvenda curva AB, producatur filum in BD et ope punctorum

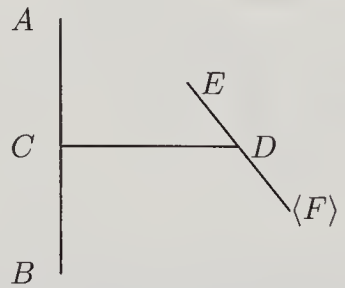
7 f. T.V.W. | ut ... DR *erg. L, ändert Hrsg.* | in ratione | reciproca *erg.* | aggregati *L* 8 ad | ipsam *erg.* | AB. | ita ut RT sit ad TD ut B *erg. u. gestr.* | erit *L*

B et D. duae describantur curvae parallelae. Similiter in BD. notato puncto medio G, ipsum punctum G. tertiam describet curvam ⟨p⟩arallelam HG. Ajo spatium inter duas parallelas evolutione descriptas BF, DE, duasque rectas extensas aequales BD, FE aequari rectangulo sub recta constante BD et curva parallela media HG. Erit ergo nihil aliud quam rectangulum distortum. Porro eadem omnia locum habebunt, si aliqua figura plana ut DLM fili extremitati alligata intelligatur ita tamen ut planum ejus sit plano curvae ABC. perpendiculare. Nam spatium solidum ipsius DLM motu cum filo generatum, erit aequale solido ex plano DML in curvam centri gravitatis ejus N. motu descriptam, ducto.

Porro quae de Evolutis diximus ea generaliter locum habent in omnibus circumrotatis, quorum inter motum quomodocunque radius producitur, aut centrum mutatur. Idem enim semper locum habebit. Imo cavendum nonnihil. Ut si durante evolutione planum DLM propius accedat a D. versus B. non poterit spatium haberi via centri gravitatis N. in ipsum planum DLM. ducta. Ob eam rationem de qua supra locuti sumus ad fig. 1. Et ratio est, quia motui plani circumrotatorio quo quodlibet ejus punctum novum semper locum invenit, componitur motus rectilineus quo planum in sua vestigia succedit. Itaque ut supra fig. 1. illum tantum consideravimus centri E. motum, qui procedit secundum directionem utilem, ita idem hic faciendum est. Nempe consideremus quantus sit motus centri N, circumrotatorius tantum omisso rectilineo, adeoque exigui circuli NP, QR etc. in unum sunt addendi. Summa autem eorum facile haberi potest, scilicet nam descrescent ut ipsae NB, QS, quarum ratio habetur ex cognito ipsius N. vel DML. motu rectilineo.



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*] fig. ⟨6⟩

1 f. medio | E, *ändert Hrsg.* | ipsum punctum | E. *ändert Hrsg.* | *(1)* novam *(2)* tertiam *L* 3 parallelas *(1)* curvas F *(2)* evolutione *L* 7 DLM *(1)* rotatione *(2)* motu *L* 8 aeqvale *(1)* curvae ab eius *(2)* solido *L* 11 inter | modum *ändert Hrsg.* | *(1)* qvodam *(2)* qvomodocunqve *L* 20 potest, *(1)* qvia si curva ABC divisa ponatur in partes aeqvales, *(a)* Arithmetice *(b)* decrescent proportionaliter *(2)* scilicet *L*

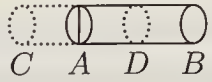
Considerandae quaedam rotationes obliquae, equidem si circa axem ACB. rotanda sit EDF recta, in eodem plano posita, utcunque inclinata, verum est, superficiem rotando genitam fore aequalem rectae EF in viam cen⟨tri⟩. Sed si recta EF in alio sit plano, id non procedit. Ratio differentiae, quia tangens circumferentiae AB descriptae priore casu est ipsi EF normalis, posteriore non est. Directio autem in tangente esse intelligitur; itaque ut inveniatur superficies obliqua rotatione descripta, ita procedendum. Motus centri gravitatis D. resolvatur in duos, unum perpendicularem ad lineam EF, alterum in se subingredientem, et omisso subingrediente quaeratur summa motuum perpendicularium, qui etsi singuli sint infinite parvi, progressio tamen eorum poterit calculo haberi; eaque summa quae est via utilis centri gravitatis, ducta in mobile, dabit superficiem genitam. Demonstravit Wrennus talem superficiem esse cylindroeidis Hyperbolici, unde operae pretium erit calculo exquirere, quae sit motuum utilium progressio; nam si aggregatum seu via haberi posset, inde haberetur curva Hyperbolae.

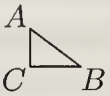
Caeterum notabimus Theorema generale: Via utilis centri gravitatis ducta in mobile, aequatur spatio percurso. Utilem viam voco, secundum quam mobile in sua vestigia non subingreditur. Sed quando totum mobile non uno movetur motu, ut in arcu flexo, ibi vero major difficultas. Imo generaliter cum curva movetur (in plano scilicet suo) multi enim semper sunt subingressus, et motus uni parti directus, alteri est obliquus.

Examinanda via utilis centri gravitatis chordae describentis Ellipsin. Aliaque id genus. Via utilis centri gravitatis non semper componit lineam ut patet.

1 *(1)* Considerandi qvidam motus *(2)* Considerandae *L* 4 qvia *(1)* recta qvae plano suo eg *(2)* linea qvae plano priore egreditur *(a)* ⟨—⟩ *(b)* directione ad planum suum normali nullo modo subingreditur in vestigia sua. Qvatenus autem *(aa)* obliqve *(bb)* obliqvo movetur angulo, eatenus composito ex duobus motibus motu moveri intelligi potest, uno subingrediente, altero acqvirente. *(aaa)* Idqve po⟨—⟩ *(bbb)* Qvemadmodum enim id supra fig. 1. contingebat *(aaaa)* linea *(bbbb)* recta in suo plano mota, ita nunc contingit ipsa in aliud planum transgrediente. Itaqve ut area *(aaaaa)* eius aestimetur, aestimand *(bbbbb)* aestimetur spatii qvod percurrit, (ideo ut supra fig. 1.) aestimandus tantum motus ad planum eius directus; is autem invenietur via centri gravitatis directa tantum aestimata. Ea enim ducta in ipsum mobile dabit spatium percursum *(3)* tangens circumferentiae | axe *gestr.* | AB *L* 5 est. *(1)* Itaqve *(2)* prorsus ut supra *(3)* directio *L* 7 unum *(1)* directum, seu *(2)* perpendicularem *L* 10 f. dabit *(1)* spatium. *(2)* su *(3)* superficiem *L* 12 exqvirere, *(1)* via utilis *(2)* aggrega *(3)* qvae *L* 18 subingressus, *(1)* et ob variantem perpetuo alius atqve alius *(2)* et *L* 19 utilis *erg. L*

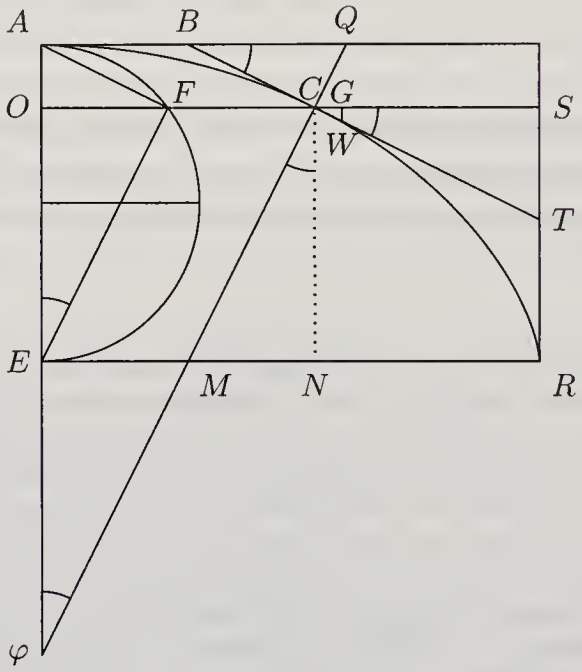
11 Demonstravit: Chr. Wren, *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici*, in: *Philosophical Transactions* IV Nr. 48 vom 21. Juni/1. Juli 1669, S. 961 f. Leibniz bezieht sich möglicherweise auf die Darstellung in J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, S. 556–567 (*WO* I S. 929–938); vgl. VII, 4 N. 34 S. 574.

Examinandus locus successivus solidi. 

Locus successivus prismatis vel cylindri ex AB in CD. est utique cylinder ipse ductus in BD. vel AC. si in recta axi ejus parallela feratur. Sed quod si aliter. An motum ejus in duos directum et transversum resolvemus. Sed hic non idem habebimus, ac si in ipsa linea ponamus moveri, nam 

AB non est $AC + CB$. Praeterea possumus idem solidum variis modis in infinita prismata sectum intelligi vel cylindros. Et videndum si diverso modo secando alio calculo, eandem semper obtineamus loci successivi summam, id enim necesse est. Videndum item an liceat simpliciter quando de solidi motu agitur viam centri gravitatis ducere in aream. Verum id quidem quando agitur verbi gratia de elevatione seu in linea recta perinde enim erit, ac si corpus ex centro gravitatis suspensum fuerit elevatum. Sed haec alias exactius discutienda.

Notanda quae hic de Cycloide.



[*Fig. 7*]

9 elevatione *(1)* Exam *(2)* elevati⟨o⟩ *(3)* locus enim successivus *(4)* seu *L*

11 alias: vgl. z. B. *Nova de constructionibus* (Cc 2, Nr. 1434), dat. 4. Juni 1676.

Curvae Cycloidis et omnium partium habetur dimensio et centrum gravitatis. Momentum scilicet ex AB, habebitur ipsis $BC \sqcap AF$ applicatis in O. Fit enim Parabola. Momentum ex AE habebitur ipsis φC. translatis in O. Jam ob Triangula sim. $\underset{\smile}{EFA}$ et $\underset{\smile}{\varphi OC}$ erit $\frac{\varphi C}{EA} \sqcap \frac{OC}{AF}$. et erit $\varphi C \sqcap \frac{OC, 2a}{AF}$ sive $\varphi C \sqcap \frac{OF\,2a + FC\,2a}{AF}$. Jam $\frac{OF\,2a}{AF}$ haberi possunt. Eorum enim summa dat parabolam, restat tantum $\frac{FC\,2a}{AF} \sqcap v$. Jam Triangula: $\underset{\smile}{CNM}$ sim. $\underset{\smile}{CGW}$ erit $CN, GW \sqcap CG, NM$. Est autem $NM \sqcap OF$. Ergo opus est OF in CG. Est autem CG differentia tum ipsarum OF, tum ipsarum FC. OF in suas differentias semper habentur. Fit enim semiquadratum ultimae OF. Eadem OF in differentias FC: Quid aliud sunt quam sinus arcubus insistentes, qui habentur, habetur. Sed haec jam patent, quia datur CN in GW aliunde. Nobis vero id non quaeritur sed $\frac{FC\,2a}{AF}$. Hoc sic inveniemus. Quia CS complet FC. arcum, et EF chorda est complementi, ideo pro $\frac{FC}{AF}$ quaeramus $\frac{CS}{EF}$ quae est aequalis $\frac{CT}{AE \sqcap 2a}$. Quaeritur ergo CT ad S. ad habendam $C\varphi$ ad O. Sed aliunde omnes $C\varphi$ ad O, + omn. CT ad S. dant momentum curvae ex AE, + mom. curvae ex RS, id est curvam cycloidis ductam in ER. circumferentiam. Habetur autem curva cycloeidis, ergo et rectangulum hoc ex circumferentia in curvam ex data circumferentia; ergo ex data circumferentia habentur $C\varphi$ ad O; + CT ad S. Ergo alterutrum eorum tolli potest. Inventa sic aequatione, restabit unicum cujus valor substituatur in superiori, ubi invenimus $\frac{FC}{AF}$ esse necessarium, et hoc quoque habebitur, unde oritur notabile ad inveniendum momentum Curvae cycloidis ex AE. vel SR. opus esse circumferentia circuli, nulla vero ejus portione quod mirum, et affine illi[s] quae ostendit Hugenius de cycloidis ratione temporis. Hinc jam centrum gravitatis cycloidis semper haberi potest etiam durante evolutione.

---

1 *Dazu, unter Fig. 7:* MQ in CG differentiolas arcuum si datur, datur curva cycloidis nempe secans falsa in Elementum curvae circuli. Unde methodus generalis pro talibus curvis.

---

20 ostendit: Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 42–58 [Marg.] (*HO* XVIII S. 158 bis 187). 24 nempe: vgl. VII, 4 N. 29 prop. 4 S. 522 u. S. 524.

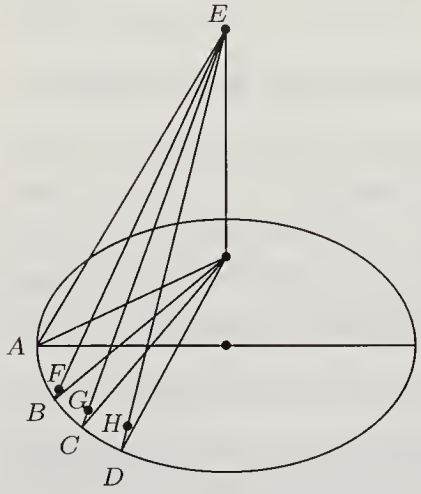
78. SUPERFICIES CONI SCALENI

24. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 6. 1 Streifen von ca 21 x max. 3,8 cm. 9 Z. auf Bl. 6 r°. Bl. 6 v° leer. Bl. 6 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 311 (VII, 1 N. 32; VII, 3 N. 64; Cc 2, Nr. 1456; Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2°. Cc 2, Nr. 1426

24. Maji 1676

Superficies Coni Scaleni



[*Fig. 1*]

Singularis inquisitio in superficiem Coni Scaleni ope viae centri gravitatis. Arcus Circuli *ABCD.* et *E* punctum in sublimi, unde fila *EA. EB. EC. ED.* quorum differentiae *FB. GC. HD.* in rectis *EFB*, *EGC*, *EHD* sumtae. Ponamus lineas rigidas esse *EA*, *FB*, *GC*, *HD*, ita dispositas ut figura ostendit, et *EA* translatam in *EF* secum auferre *FB*, et *EF* translatam in *EG* secum auferre *GC*, et *EG* translatam in *EH* secum auferre *HD.* ita ut semper tangat arcum. Patet hoc modo describi superficiem coni Scaleni, si puncta *AB. BC. CD.* infinite parvo absint intervallo. Quod si jam aestimetur quomodo durante motu mutetur centrum gravitatis totius *A. FB. GC. HD.* viaque ejus sive linea inveniatur, ea in summam horum ducta dabit superficiem coni Scaleni.

Idem locum habet pro omnibus conoeidibus scalenis, etiamsi basis non sit arcus Circuli.

7 24. Maji 1676 *erg. L* 8 Superficies ... Scaleni *erg. L* 16 et | EGH *ändert Hrsg.* | translatam *L*

23 dabit: Die Behauptung ist nicht richtig.

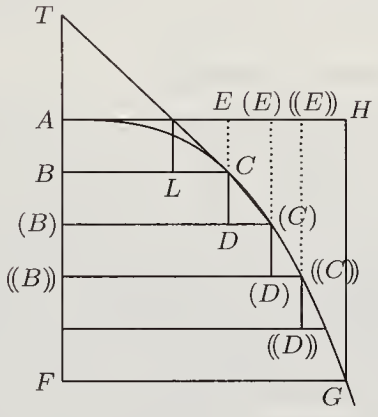
79. ANALYSIS TETRAGONISTICA

26. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 442–443. 1 Bog. 2°, aus dem das obere Drittel von Bl. 442 ausgeschnitten ist. 2 S. auf Bl. 442 u. 1 1/3 S. auf Bl. 443. Am oberen Rand von Bl. 442 r° Rest einer Notiz algebraischen Inhalts ohne Bezug zum Haupttext (= S. 548 Z. 14 f.).
Cc 2, Nr. 1427

26 Maji 1676

Analysis Tetragonistica



[*Fig. 1*]

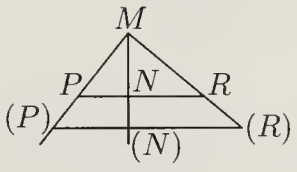
In qualibet curva, in qua TB intervallum tangentis ad AB. constantem habet rationem[,] etiam rectangulum BCD ad rectangulum $ED(C)$ constantem habebit rationem, seu eam quam $(B)(C)(D)$ ad $(E)(D)((C))$ unde non mirum si totum spatium ad totum spatium constantem habet rationem. Unde habemus has quadraturas sine ulla figurae transmutatione in novam.

Rem prius demonstrabo: $TB \sqcap \frac{z}{v}AB$. ex hypothesi, z existente numero constante. Jam $TB, D(C) \sqcap BC, CD$. Ergo explicando TB erit $\frac{z}{v}AB, D(C) \sqcap BC, CD$. Ergo rectangulum BC, CD, ad rectang: $AB, D(C)$ vel $EC.D(C)$ ut numerus ad numerum seu ut z

8 26 Maji 1676 *auf Bl. 443 r° erg. L* 9 Analysis Tetragonistica *erg. L*

ad v. Ergo et summa horum rectangulorum, seu spatium $CBFGC$ ad spatium $CEHGC$ eodem erit modo nempe ut z ad v.

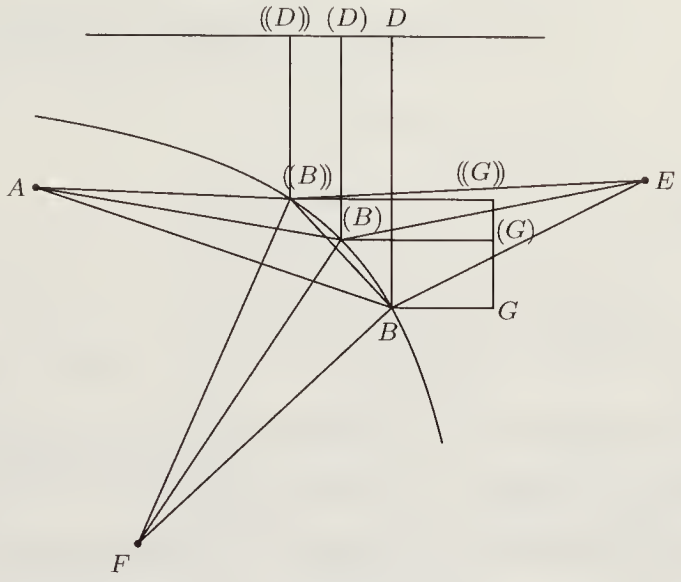
Hinc jam nova Analyseos quadraturarum via aperitur, nimirum Omnes paraboloides et Hyperboloeides uno ex capite quadrantur, quia in illis Rectangula sub abscissis et differentiis ordinatarum, habent constantem rationem ad ordinatas in differentias abscissarum. Sint rectangula abscissarum in diff. ord. ut MN. Erunt [rectangula] ordinatarum in diff. absciss. ut NP. Haec pro his, sed generalius[:] Sint ordinatae y. abscissae x. differentiae abscissarum β. ordinatarum ω. Sint PN ut $y\beta$ et NR ut $x\omega$. Erit spatium $CBFGC$ ad spatium $CEHGC$ ut spatium $PN(N)(P)P$ ad spatium $RN(N)(R)R$. cum NP ad NR ut $(N)(P)$ ad $(N)(R)$. Infinitae fiunt figurae quadrabiles; quarum omnium quadratura, ut ita dicam resolvitur in quadraturam Trianguli. Credibile est ergo adhuc infinitas alias inveniri posse, si non sint ejusdem rationis $y\beta$ et $x\omega$, sed uno verbi gratia procedente, ut ordinatae trianguli PN, alterum procedat ut ordinatas parabolae. Et sic credibile est ex sola hac applicatione, si scilicet sint $x\omega$ ad $y\beta$ ut applicatae parabolae ad abscissas debere infinitas iterum oriri curvas novas, ut ex relatione ordinatae Trianguli ad abscissas infinitae ortae sunt. Et infinities infinitae habebuntur curvae, quadrabiles novorum semper graduum quibus forte continebuntur quadrabiles omnes. Primus gradus Quadrabilium fuit paraboloeidum et Hyperboloeidum, cum eadem est ratio seu cum ut applicatae Trianguli. Proximus gradus infinitarum, cum sunt $x\omega$ et $y\beta$ ut ordinatae paraboloeidum ad abscissas. Hactenus dubitatum fuit an ullae essent figurae quarum non figura ex paraboloeidibus et Hyperboloeidibus penderet. Hic ecce novae prodeunt. Quae novae rursus alias dabunt et ita in infinitum. Praeterea hac methodo reducentur figurae ad quadraturam circuli, et Hyperbolae quando ex illis pendent, ut si PN sit applicata Trianguli NR Hyperbolae, figura in qua hoc contingeret penderet ex quadratura Hyperbolae. Poterit hoc modo fieri forte, ut figura aliqua pendet ex se ipsa, (vel pendente ex se ipsa) et habeatur aequatio.



[*Fig. 2*]

5 ordinatas | seu *ändert Hrsg.* | differentias *L* 7 f. NP. *(1)* vel sunt ordin *(2)* | Haec ... generalius *erg.* | sint *L* 15 parabolae *(1)* ita una sola figura *(2)* Et *L* 23 ex *(1)* parabolis *(2)* paraboloeidibus *L*

3 nova ... via: vgl. III, 1 N. 73$_3$ S. 362 f. 11 *Fig. 2*: Eine gestrichene Vorstufe wird nicht wiedergegeben.

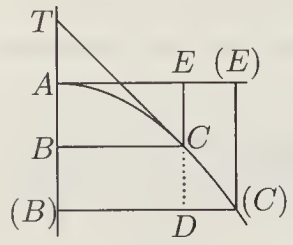


[*Fig. 3*]

Item possunt aliae fieri resolutiones, ut si tale quid eveniat in relatione inter Triangula $AB(B)$ et Rectangula: $DB(B)(D)$. item Triangula ex diversis sumta centris, ut A. et E. Imo possunt ea etiam esse ab eadem curvae parte. Si enim detur ratio sectoris $AB(B)((B))$ ad sectorem $FB(B)((B))$ utique dabitur segmentum $B((B))(B)B$. Poterunt et misceri triangula et rectangula ejusdem lateris ut $EB(B)$ et $GB(B)(G)$. item rectangula et rectangula ejusdem lateris, ut $GB(B)(G)$ et $DB(B)(D)$. Servit ingens ista varietas ad instituendam analysin in figura data.

Hoc amplius fieri posset, ut ad se invicem referentur rectangula vel Triangula quae tamen non ad eandem curvae portionem sumantur; sed inverse, et tunc absolvendo donec utrobique in unum coeant, et una progressio finiat ubi altera coeperit mutuo. Tunc ea via serviet, ad certas determinatas figurarum portiones, seu totas figuras, certo modo sumtas inveniendas; ejus enim ope non aliter portiones inveniri possunt sed tantum tota. Ut si in prima figura sit ECL certae relationis ad $((B))((C))((D))$, et ita porro coeundo donec veniatur ad relationem $ED(C)(E)$ ad $(E)(D)((C))$. Tunc si relatio ista est ut figurarum quadrabilium habebitur tota figura, non vero portiones. Idem de triangulis quoque et rectangulis aliis quomodocunque semper locum habet et hoc quidem modo spes est posse aliquas figuras quadrari ex toto, quarum partes certam quadraturam non ferunt constantem, qualis alioquin daretur si directe procedi possit.

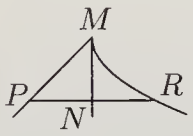
3 item *(1)* rectangula *(2)* Triangula L



[*Fig. 4*]

Caeterum nonnihil exemplis haec applicando, et primum generaliter consideremus: $ax^2 + bxy + c^2x \sqcap ey^2 + d^2y + f^3$ unde $2axt + bty + c^2t \sqcap 2ey^2 + d^2y - bxy$ et: $t \sqcap \frac{2ey^2 + d^2y - bxy}{2ax + by + c^2}$. Et $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. erit $\sqcap \frac{2ey + d^2 + bx}{2ax + by + c^2}$. et fiet: $2ax\beta + by\beta + c^2\beta \sqcap 2ey\omega + d^2\omega + bx\omega$. Ponamus $e \sqcap 0$. ut y habeatur pure, et fiet: $y \sqcap \frac{d^2\omega + bx\omega - 2ax\beta - c^2\beta}{b\beta} \sqcap \frac{ax^2 + c^2x - f^3}{d^2 - bx}$. Et fiet denique: $\omega \sqcap b\beta ax^2 + b\beta c^2x - f^3\beta b; + \overline{2ax + c^2}, d^2 - bx, \beta,, \smile d^4 - b^2x^2$. Sed hic calculus nimis prolixus.

Sumamus potius particularia, et videamus an methodus quaedam inveniri possit, qua fiat, ut posita $CB(B)D \sqcap v$ sit $DE(E)(C) \sqcap \frac{v^2}{a}$. Primum certum est curvam talem



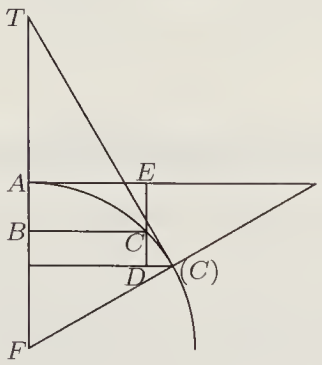
[*Fig. 5*]

non fore paraboloeidem nec Hyperboloidem; deinde erit $AECA$ ad $ABCA$ ut MNR ad MPN. seu ut trilineum parabolicum ad Triangulum, ejusdem altitudinis. Est autem $PN \sqcap MN$. et sit $PN \sqcap v$. $NR \sqcap \frac{v^2}{a}$. Erit $MPN \sqcap \frac{v^2}{2}$. et $MNR \sqcap \frac{v^3}{3a}$. Ergo erit $AECA$ ad $ABCA$ ut $2v$ ad $3a$. seu ut $2y\beta$ ad $3a$. Habemus $v \sqcap y\beta$. et $x\omega \sqcap \frac{v^2\beta^2}{a^2}$. $ABCE \sqcap xy$. $\int \overline{y\beta}$ ad $\int \overline{x\omega}$ ut $2y\beta$ ad $3a$ et $\int \overline{y\beta} + \int \overline{x\omega} \sqcap xy$. Ergo $\int x\omega \sqcap xy - \int y\beta \sqcap 3a \int y\beta \smile 2y\beta$. Ergo $\frac{2xy^2\beta}{3a + 2y\beta} \sqcap \int y\beta$. Si y potuisset ita ut restitissent solum x et β. habuissemus hinc inversa methodo figuram determinatam; sed forte id fieri non potest et

1 applicando, *(1)* et | in *erg.* | Circulo primum experiamur aliqva *(2)* et *L* 2 consideremus: *(1)* $x^2 + 2xy$ *(2)* $lx^2 + bxy + c^2x$ *(a) + (b)* $-d^2y$ *(aa) + (bb)* $-e^3$ | $\sqcap 0$ unde transponendo *streicht Hrsg.* | fiet: $2ltx+$ *(aaa)* 2b *(bbb)* $bty + c^2t \sqcap -bxy-$ *(3)* ax^2+ *L* 13 $\sqcap \frac{v^3}{3a}$ *(1)* | ergo *streicht Hrsg.* | posita AB $\sqcap$ v erit *(2)* ergo *L*

4 erit $\sqcap$: Auf der rechten Seite müsste es im Zähler $-bx$ lauten. Leibniz rechnet mit dem falschen Vorzeichen konsequent weiter bis Z. 7. 15 $2y\beta$ ad $3a$: Der Kehrwert $\frac{3a}{2y\beta}$ wäre richtig. Dadurch ergibt sich in Z. 16 für $\int y\beta$ statt $\frac{3axy}{3a + 2y\beta}$ ein fehlerhafter Ausdruck.

infinitae sunt figurae satisfacientes. Minime tamen licet y pro arbitrio assumere. Nondum ergo satisfactum, nec exemplum tale invenimus.



[*Fig. 6*]

Videamus nunc in conicis, ut analysin datae figurae hoc modo tentemus. In Circulo est $C(C) \sqcap \frac{FC, \beta}{BC}$ seu $\frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Ergo Triangulum $FC(C) \sqcap \frac{a^2\beta}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$ et $BCD \sqcap \beta\sqrt{a^2 - x^2}$. Sit $\beta\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap \varphi v$. $\sqrt{a^2 - x^2}[\sqcap] \frac{v\varphi}{\beta}$ et $a^2 - x^2 \sqcap \frac{v^2\varphi^2}{\beta^2}$. et $FC(C) \sqcap e\varphi$. Ergo $\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap \frac{a^2\beta}{2e\varphi}$. et $a^2 - x^2 \sqcap \frac{a^4\beta^2}{4e^2\varphi^2}$ et fiet: $a^4 - 2a^2x^2 + x^4 \sqcap \frac{a^4v^2\varphi^2\beta^2}{4e^2\varphi^2\beta^2}$. et $a^2 - x^2 \sqcap \dagger \frac{a^2v}{4e}$. Ergo $x^2 \sqcap \frac{4ea^2 \dagger a^2v}{4e}$. et $x \sqcap \frac{a}{2}\sqrt{4 \dagger \frac{v}{e}}$. Sed hic analysi nostrae difficilis objicitur nodus quod scilicet x reperitur non per solam v sed per $\frac{v}{e}$. Est tamen in nostra potestate alterutram earum v. et e. explicare. Neque enim necesse est ut alterutra ipsarum v. vel e. sit ad Triangulum, sed possumus aliquam earum sumere pro arbitrio, modo illius sic haberi possit summa. Ponamus ergo $e \sqcap \varphi$. Aequari scilicet constanti φ, adeoque Triangula illa $FC(C)$ esse aequalia, eorum summa seu figura MNP paginae superioris erit rectangulum et habebitur x absolute, $x \sqcap \frac{a}{2}\sqrt{4 \dagger \frac{v}{a}}$ vel aequatio erit: $4x^2a \sqcap 4a^3 \dagger a^2v$. Quaeritur differentia ipsarum x. Ponimus ipsarum v differentiam esse ψ: Quaeramus differentiam ipsarum x^2, quod fit tantum quaerendo TB tangentem

---

4 f. *Daneben:* $FB \sqcap x$. $BC \sqcap y$.

10 v *(1)* sed per *(2)* | vel *ändert Hrsg.* | per *(a)* solam *(b)* $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{e}}$ *L* 17–542,1 qvaerendo *(1)* tangentem *(2)* TB | tangentem *erg. Hrsg.* | figurae *L*

---

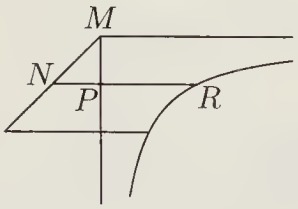
9 $\sqcap \dagger \frac{a^2v}{4e}$: Der Nenner müsste $2e$ lauten. Dies wirkt sich, zusammen mit weiteren Versehen, bis S. 542 Z. 6 aus.

figurae, cujus talis esset aequatio, fingendo AB esse $v.$ et BC esse $x.$ fingendo scilicet interim et figura priore huc utendo, ne nova opus sit, fiet $\dot{+}8x^2a \sqcap ta^2$ et $\dot{+}\frac{8x}{a} \sqcap \frac{t}{x} \sqcap \frac{\psi}{dx \sqcap \beta}$ et $\beta \sqcap \frac{\dot{+}a\psi}{8x}$. Et erit $\beta^2 \sqcap \frac{a^2\psi^2}{x^2} \sqcap \frac{v^2\varphi^2}{a^2 - x^2}$. et $a^4\psi^2 - a^2\psi^2x^2 \sqcap x^2v^2\varphi^2$. et $x^2 \sqcap \frac{a^2\psi^2}{v^2\varphi^2 + a^2\psi^2} \sqcap \frac{4a^3 \dot{+} a^2v}{4a}$. Ergo $4v^2\varphi^2a - 4a^3\psi^2 \dot{+} v^3\varphi^2 \dot{+} a^2\psi^2v$ [$\sqcap 0$]. Habemus figuram ex quadratura Circuli pendentem sed non sufficienter expressam, scilicet relatione tantum ad differentias suas, $\psi.$ exprimuntur ipsae $v.$ aut potius $d\overline{v} \sqcap \psi.$ et $d\overline{v}^2 \sqcap \frac{4v^2\varphi^2a \dot{+} v^3\varphi^2}{\dot{+}a^2v - 4a^3}$. Ex his datis quaeritur $v.$ Sed ea inventa nihil aliud habebitur quam figura pendens ex circuli quadratura.

Difficile ergo saepe etiam in datis figuris facere ejusmodi analyses. Idemque semper fiet, quotiescunque in valorem ipsius x, ingredietur utraque tam $v.$ quam $e.$ Quod si alterutra earum ingrediatur tantum, tunc manente altera indeterminata ut e, poterit haec quae ingreditur ut v sumi pro arithmetica, et ejus differentia $\psi.$ erit $\sqcap \varphi.$ Et invenietur relatio inter $v.$ et $e.$ sine alia indeterminata. Itaque ex pluribus analysibus possibilibus eligendae eae, quibus valor ipsius $x.$ habetur per solam $v.$ vel per solam $e.$ Fateor nihil aliud ex hac analysi haberi, quam novam figuram ex datae quadratura pendentem, vel contra. Spes tamen magna est ingentis ex ea fructus, ob primi casus foecunditatem.

Nota quandocunque ipsae BCD sunt in reciproca ratione ipsarum $ED(C).$ tunc momentum omnium $ED(C)$ ex AB erit constans quantitas (scil. posita CD constante) factum ex BC, in $ED(C)$, quod est semper constans; $+$ factum ex ED in $\frac{D(C)}{2}.$ seu $+$ momentum omnium $\frac{D(C)^2}{2}$ ex vertice. Sed hoc obiter. Illud interim didici quod non putabam, ne in analyticis quidem figuris omnia esse in potestate, nec posse verbi gratia semper inveniri relationem inter BCD et $ED(C)$, id est figuram cujus ordinatae verbi gratia sint ad abscissas ut $ED(C)$ ad $BCD.$

Imo corrigo me nunc et arbitror errorem ex eo ortum quod β explicare volui, nec ponere constantem, aliamve, quasi scilicet x non possit sumi arithmetica aliave pro arbitrio, imo videtur nisi assumatur quaestionem esse frivolam, et relationem fore aliam atque aliam. Audacter ergo ponamus $\beta \sqcap \varphi.$ Fiet statim: $\frac{a^2}{2e} \sqcap v.$ ipsis itaque $e.$ seu exiguis arcubus positis arithmetice proportionalibus (idem enim est ac si id dicas de Triangulis, erunt



[*Fig. 7*]

rectangula BCD harmonice proportionalia seu BCD erunt ipsis $FC(C)$ reciproca). Ergo si NP ⊓ MP ut $e.$ et PR ut $v.$ erit curva R hyperbola. Sed quoniam ita haberetur quadratura circuli ex Hyperbolae quadratura et contra, imo et spatium Hyperbolicum infinitum, quae omnia absurda videntur, ideo redeundum ad superiora, et negandum, id procedere quia positis $\beta.$ constantibus seu x arithmeticis ipsae v non sunt arithmeticae.

$\not\propto, \sqrt{\beta^2+\omega^2}$ ⊓ $e\not\propto.$ $\sqrt{a^2-x^2}\beta$ ⊓ $va.$ $\dfrac{a\beta}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ⊓ $\sqrt{\beta^2+\omega^2}$ et $\dfrac{a\not{^2}\beta}{\sqrt{\cdots}}$ ⊓ $e\not\propto.$ Ergo $a\beta^2$ ⊓ $aev.$ et a^2-x^2, β^2 ⊓ $v^2a^2.$ et β^2 ⊓ $\dfrac{v^2a^2}{a^2-x^2}$ ⊓ $ev.$ et va^2 ⊓ $a^2e-x^2e.$ β^2 ⊓ $ev.$ et x^2 ⊓ $\dfrac{a^2e-va^2}{e}$. Ubi tamen non est satis datorum, ut possit adhuc semel inveniri aliquid, cujus ope habeatur aequatio in qua extent non nisi e et $v.$ Nec vero licet β pro arbitrio assumere, tunc enim frustra utemur $e.$ et $v.$ quia non erunt amplius liberae, sed resolvendae. Itaque nescio an sint aliae praeter paraboloeides Curvae, in quibus absolute possit inveniri, quia tamen ipsa β includit $x.$ Ita ideo tota res huc redit: $d\overline{x}^2$ ⊓ $ev.$ et x^2 ⊓ $\dfrac{a^2e-va^2}{e}$. Ope harum duarum aequationum tollenda x, unde fiet: $\int \overline{\sqrt{ev}}$ ⊓ $a\sqrt{\dfrac{e-v}{v}}$. cujus figurae quadratura pendet ex quadratura Circuli. Interea methodus ista utilissima ad quaestiones tangentium inversas, ista enim figura utique certa est et exhibet relationem de qua quaeritur.

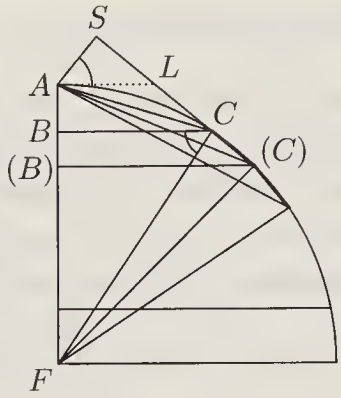
---

15 *Am Rand, mit* $\int \overline{\sqrt{ev}}$ ⊓ $a\sqrt{\dfrac{e-v}{v}}$ *durch einen Hinweisstrich verbunden:* Nondum certum quod haec aequatio sit ad curvam unicam[,] est enim forte ad infinitas.

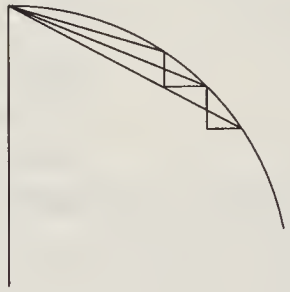
1 proportionalia *(1)* itaqve ex dato qvad *(2)* seu *L* 10 ⊓ $\dfrac{a^2e-va^2}{e}$. *(1)* ubi tantum opus est $\beta.$ sumi talem *(2)* ubi *L*

---

15 ⊓ $a\sqrt{\dfrac{e-v}{v}}$: Richtig wäre $a\sqrt{\dfrac{e-v}{e}}$.



[*Fig. 8a*]

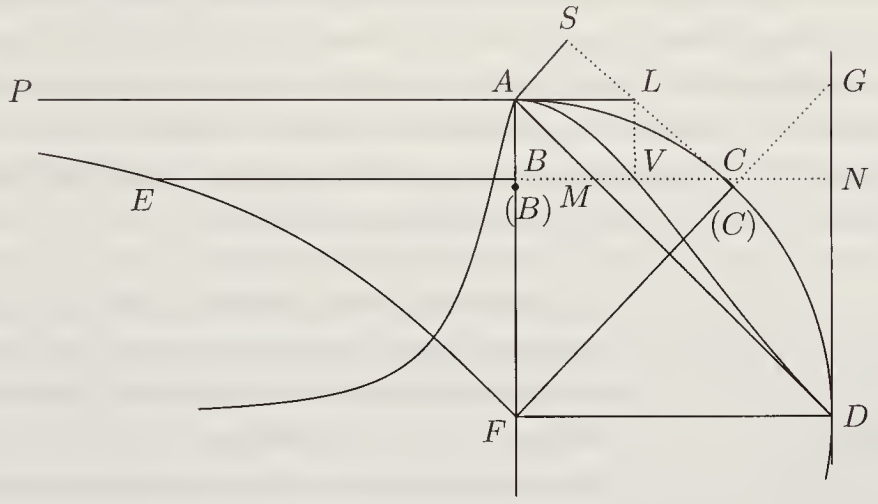


[*Fig. 8b*]

An ergo sic ob ipsam β operam ludere analysis videtur? Fatendum est, nisi unus forte casus adhuc prodesse possit cum duo Triangula conferuntur diversa, ex diversis centris. Ut in circulo ex F centro communiter dicto et A vertice. Sit $FB \sqcap x$. et $B(B) \sqcap \beta$. Erit $C(C) \sqcap \frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. quod ductum in $\frac{a}{2}$ dabit Triangulum rectangulum $F(C)C \sqcap \frac{a^2\beta}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \sqcap e\varphi$. Si ex A tangenti productae $(C)C$ occurrat L. erit AL in $B(B)$ aequalis duplo Triangulo $AC(C)$.

7–545,1 AC(C) *(1)* jam si *(a)* AB $\sqcap$ *(aa)* a *(bb)* y. est 2ay *(b)* BC $\sqcap$ y. *(aa)* erit AL $\sqcap$ *(aaa)* $\frac{2ay^2}{a^2 + y^2}$ *(bbb)* y. vel $\sqcap$ *(bb)* erit AB. *(cc)* et Triangulum AC *(dd)* et Triangulum AC(C) erit $\frac{a\beta\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 + a^2 - x^2}$. $\sqcap v\varphi$. fiet $\frac{v}{e} \sqcap \frac{a^2 - x^2}{2a^2 - x^2} \frown \sqrt{a^2 - x^2}$. seu $\frac{v}{e} \sqcap \frac{y^3}{a^2 - y^2}$ Unde rursus jungendo in unum aeqvationem pro valore y. et pro valore β redibit difficultas prior Qvaeramus AS perpendicularem ad *(aaa)* LC *(bbb)* C(C) AS *(aaaa)* $\sqcap$ *(bbbb)* : AL :: *(aaaaa)* AC *(bbbbb)* BC seu y : FC seu a. ergo AS $\sqcap$ *(aaaaaa)* $\frac{2ay^3}{a^2 + y^2}$ *(bbbbbb)* $\frac{2y^3}{a^2 + y^2}$ sit C(C) constans reddenda seu $\frac{a\beta}{y} \sqcap$ *(aaaaaaa)* ψ *(bbbbbbb)* λ posita *(aaaaaaaa)* ψ *(bbbbbbbb)* λ constante fiet: $\frac{a\lambda}{2} \sqcap e\lambda$. qvare e in hoc casu etiam constans et $\lambda y^3 \smile a^2 + y^2 \sqcap v\lambda$. ergo *(aaaaaaaaa)* et *(bbbbbbbbb)* $y^3 \smile a^2 + y^2 \sqcap v$. sed restat difficultas prior, sciendum est enim quomodo *(aaaaaaaaaa)* ipsa *(bbbbbbbbbb)* ipsa y. progrediatur. eqvidem *(aaaaaaaaaaa)* $\frac{v}{\beta}$ *(bbbbbbbbbbb)* $\frac{y}{\beta} \sqcap \frac{a}{\lambda}$. et *(2)* Si | AΛ *ändert Hrsg.* | sit L

Si AL sit h. erit $AB \sqcap \frac{2ah^2}{a^2+h^2}$. Ergo $a^2x + h^2x \sqcap 2ah^2$. et $a^2x \sqcap 2ah^2 - xh^2$ et $h^2 \sqcap \frac{a^2x}{2a-x}$. et $h \sqcap a\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$. Jam $AS : AL :: y : a$. Erit $AS \sqcap x \sqcap AB$. ut constat. Ergo fiet: $xa\beta \smile \sqrt{a^2-x^2} \sqcap v\varphi$. et $a^2\beta \smile \sqrt{a^2-x^2} \sqcap e\varphi$. Et fiet v ad e, ut x ad a. Et video nostram methodum non omnino usu carere.



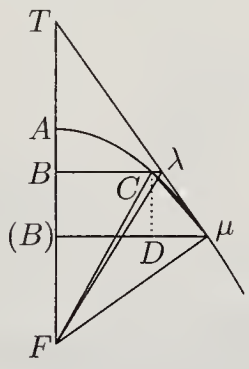
[*Fig. 9*]

Ope centrorum; nimirum certum est $\frac{AS}{2}$ in $C(C)$ esse ad $\frac{F(C)}{2}$, $C(C)$ ut AS ad $F(C)$ id est ut x. ad a. Jam si $BV \sqcap AL$ erit $VB(B) \sqcap v\varphi$. Et si $BE \sqcap FG$ erit $EB(B) \sqcap FC(C)$ eritque $EB(B)$ ad $VB(B)$ seu e ad v seu $e\varphi$ ad $v\varphi$ ut $FA \sqcap FC$ ad AB. Ducta recta AMD. Videndum an quia ordinatae sint ut a ad x. sint summae seu figurae $ABEP$ ad fig. ABM, seu $\int e$ ad $\int v$, ut $\int a$ ad $\int x$ seu ut figurae rectang. ABN, et Triang. ABM. Quod si verum esset haberetur quadratura. Sed id verum non est. Alioqui darentur quadraturae omnes multis modis ut $\frac{a^2}{x}$ ☽ ad $\frac{a^3}{x^2}$ ⊙ ut x ad a. Datur autem $\int ⊙$. Ergo si esset $\int ⊙$ ad $\int$ ☽ ut $\int a$ ad $\int x$. daretur etiam Quadratura Hyperbolae.

1 Ergo *(1)* | h ⊓ *streicht Hrsg.* | *(2)* a^2x+ *L*

1 Ergo: Leibniz benutzt im Folgenden $AB = x$ statt wie bisher $AB = a - x$. Dadurch werden die Ausdrücke für $v\varphi$ und $e\varphi$ in Z. 3 falsch; die Fehler heben sich bei der anschließenden Quotientenbildung auf.

Videndum est tamen adhuc an posito $\frac{e}{v} \sqcap \frac{a}{x}$. certo constante modo componatur ratio $\frac{\text{summ. } e}{\text{sum. } v.}$ ex ratione $\frac{\int a}{\int x}$. Ut si adhuc justius dicatur $\frac{\text{summ. } e\, d\overline{x}}{\text{summ. } v\, d\overline{x}} \sqcap \frac{\int a\, d\overline{x} \sqcap a \int dx \sqcap ax}{\int \overline{xdx} \sqcap \frac{x^2}{2}} \sqcap \frac{2a}{x}$. Sed quoniam nondum inventus modus derivandi Unum ex altero, nec satis scio, utrum id fieri possit, et utrum constans aliqua sit derivatio: Itaque restat unicus analyseos nostrae (praeter inversas methodos hinc ducendas) fructus hic ut sumtis punctis pro arbitrio, et directricibus atque angulis pro arbitrio, quaeratur, possintne aliquando reperiri rectangula vel triangula ita assumta, ut constantem habeant rationem. Quae inquisitio analytica sive determinata est sive in nostra potestate, generaliter enim possimus punctum eligere quodlibet et directricem eligere quamlibet.



[*Fig. 10*]

Nimirum non loquendum tantum de exiguis istis ad portiones tangentium infinite parvas Triangulis, sed aestimanda etiam res ad portiones majores tangentium et chordas, ut $FC\mu$. ad $BC\mu(B)$ vel $CB(B)D$. Sed videndum an non quicquid tale est. Debeat semper in tangentibus etiam apparere. Tantum videndum an nihil referat, quomodo $AB \sqcap x$ et $\beta \sqcap B(B)$. explicentur.

Et primum pro certo videtur si verbi gratia $CB(B)\mu$ ad $F\lambda\mu$ constantem habet rationem. Id semper appariturum in infinite parvis quoque. Videamus $x\beta + \beta^2$ ad $\frac{z}{a}x\beta + \frac{z}{a}\beta^2$. Vides eodem modo appariturum etsi ponas β infinite parvam. Eodem modo credo apparebit, si constans ratio sit, nihil referre debere.

Haec ergo methodus analytica plane determinata est. In qualibet figura generali enim pro ipsa calculo enumerare licet omnes possibiles Triangulorum aut rectangulorum collationes; sumtis pro arbitrio punctis fixis seu centris; angulis ordinatarum, et directricibus. Et quando jam ante constat id fieri non posse, quando scilicet constat generalem non

2 $\frac{\text{summ e d}\overline{\text{x}}}{\text{summ a d}\overline{\text{x}}}$ *L ändert Hrsg.* 19 in *(1)* tangentibus qvoqve *(2)* infinite *L* 25 constat *(1)* portiones *(2)* generalem *L*

19 *Fig. 10*: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.

posse inveniri figurae quadraturam; tunc tentandum superest an non id obtineri possit diversa et a se invicem remota vel ut ita dicam opposita Triangula et rectangula inter se jungendo primum unius seriei, ultimo alterius seriei; talis enim methodi ope haberetur figura tota, etsi non singulae partes. Itaque pro analysi quadraturarum haec videtur via maxime naturalis.

Videatur variis modis quomodo in Triangula et parallelogramma resolvi possit uno calculo generali. Et utendo initio non infinite parvis sed ordinariis, nempe Triangulis aut Trapeziis aut scalaribus figuris, examinetur an non aliquando eorum sit progressio transcendens inde cum certum est non posse generalem inveniri quadraturam. Ut jam factum in Hyperbola Circulo et Ellipsi. Ubi examinandi modi quibus id maxime apparet, ut progressio Hyperbolae portionum redit ad sectionem rationis[,] Circuli ad sectionem anguli, altiores ad alias. Videndum scilicet ad quod problema redeat aequaliter secare curvae portionem datam, seu polygonum regulare ei inscribere, aliaque id genus. Inde enim naturalissime incipietur, eamque in rem analytica quaedam paranda est via. Ea enim videtur vera Clavis, quia statim ostendit Quadraturarum generalium possibilitatem, et omnia tentamenta praescindit, quae eam dare posse videbantur: Nec dubitandum videtur rem redituram ad totidem progressiones, quot sunt radicum aequationum determinandarum modi scilicet nunc ponendo $x \sqcap a$ pro Hyperbola, nunc $x \sqcap a + b$ pro circulo et ita videndum quae figurae sectae construant omnes aequationes, ubi $x \sqcap a + b + c$. Et ut revocatur Hyperbola ad Curvam parabolicam[,] Circulus ad Circularem, ita non videtur dubitandum et caeteras ad quasdam curvas certa ratione redituras. Quod si jam inventa est in figura portionum progressio, seu solutio problematis: datam figurae portionem aequaliter dividere, in certum partium numerum, similesque, vel etiam bisecare vel ei polygonum regulare circumscribere, vel spatium scalare adscribere, quod sit regulare, aliaque id genus; tunc superest ut videamus an non certa ratione duae diversae portiones diversis locis inter se jungi possint ut fiat progressio aliqua cujus haberi possit summa. Notabile erit si sit saltem non transcendens, sed non sufficiens, quia tunc reducetur totius inventio rursus ad alterius progressionis summationem.

---

25 f. NB.

6 et *(1)* rectangula resolvi possit *(2)* parallelogramma *L* 7 nempe *(1)* polygo *(2)* Triangulis *L* 11 sectionem *(1)* angu *(2)* rationis *L* 12 f. secare *(1)* Hyperbolae aut Elli *(2)* curvae *L* 17 qvod *L ändert Hrsg.*

Videndum quomodo illa methodus polygonorum regularium, et spatiorum scalarium regularium in Ellipsi et Hyperbola ad alias produci possit curvas; tentanda res in illis figuris quarum habetur sectio et dimensio, ut facilius artificium naturae intelligatur; nimirum condenda theoremata quibus curvarum anguli et similia intercedant et opus est quaeri maxima Triangula inscripta portionum; vel alia id genus; ut tandem veniatur ad aliquid constans. Haec methodus si succedit vel exhibet quadraturam generalem vel quadraturae generalis impossibilitatem, et si succedit, aequationem saltem transcendentem exhibet quadratricis, ut prior seu superior nostra si succedit exhibet quadraturam; nunquam vero probat impossibilitatem quadraturae generalis. Habet tamen hoc prae altera, ut enumerari possint omnes modi possibiles; quibus scilicet inveniri possint eandem habentia rationem Triangula vel parallelogramma, ut si non succedat, certum sit non posse illa ullo modo inveniri Triangula vel parallelogramma constantem rationem habentia.

[*Rest einer algebraischen Notiz ohne Bezug zum Haupttext*]

Si $\frac{a^2}{b} \sqcap \frac{b}{c^2}$. erit et $\sqcap \frac{a}{c}$ ☿. Nam $\odot$ ☽ $\sqcap$ ☿^{2}. At $\odot$ ☽ $\sqcap \odot^2 \sqcap$ ☽^{2}. Ergo $\odot^2 \sqcap$ ☽$^2 \sqcap$ ☿^{2}. Ergo $\odot \sqcap$ ☽ $\sqcap$ ☿. positis tamen omnibus affirmativis.

8 prior *(1)* non exhibet qvadratura *(2)* seu *L* 14 *(1)* $\frac{a}{b} \sqcap \frac{b}{c}$ Si $\frac{a^2}{b} \sqcap \frac{b}{c^2}$. erit *(a)* $\frac{a}{c} \sqcap$ *(b)* $\frac{b}{c^2} \sqcap \frac{a^{\langle 2 \rangle}}{b}$ *(2)* Si *L*

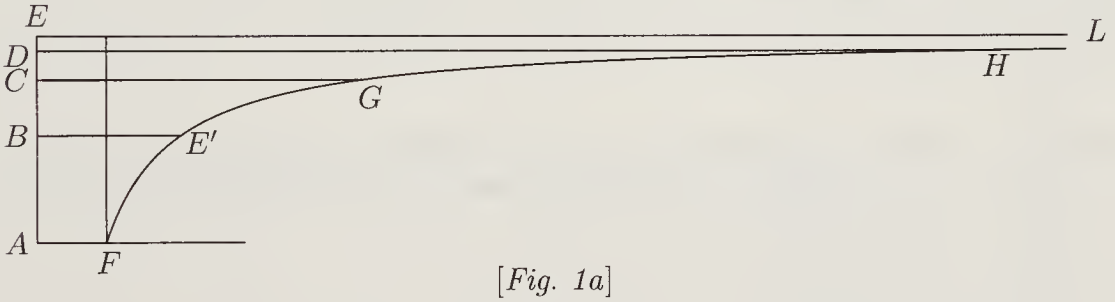
80. QUADRATURA HYPERBOLAE PER LOGARITHMOS. TENTAMENTUM DE QUADRATURA CIRCULI

27. Mai 1676

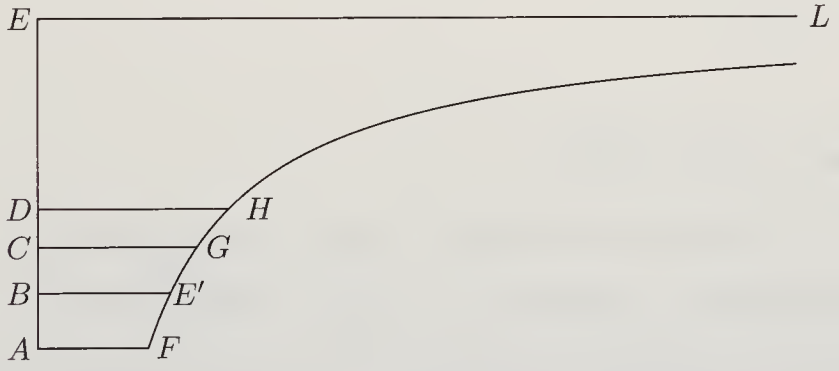
Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 317. 1 Zettel ca 21 x 10,7 cm. 1 S. auf Bl. 317 r°. Auf Bl. 317 v° Cc 2, Nr. 1428 B (Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1428 A

[*Leibniz*]
27 Maji 1676.

Quad. Hyp. per Logarithm.
Tentamentum de quad. Circ.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

9 27 Maji 1676. *erg. L* 10 f. qvad. ... Circ. *erg. L*

12 f. *Fig. 1a ... 1b*: Leibniz hat in beiden Figuren und im zugehörigen Text zwei verschiedene Punkte mit E benannt. Zur besseren Unterscheidung wird jeweils einer mit E' bezeichnet.

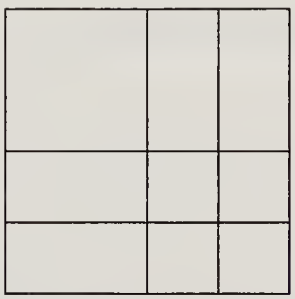
Si *A. B. C. D. E.* geometrice proportionales *ABE′F*, *BCGE′* esse aequales verum non est. Sed ita si *ED. EC. EB. EA* sint geometrice proportionales spatia *DCGH. CBE′G. BAFE′* erunt aequalia. Sed non debet adjici spatium infinitum *LEDH*. Hoc etiam provenit ope serierum infinitarum. Ex hac aequalitate demonstrabitur spatium Hyperbolicum esse data quantitate majus. Inferius tamen cuilibet infinities sumtae.

$$\frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{16} \sqcap \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{16}\ \frac{5}{32} \text{ etc. } \frac{z}{2^z} + \frac{z-1}{2^{z-1}} + \frac{z-2}{2^{z-2}} \text{ etc. } \sqcap 4.$$

$$\frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{16}\ \frac{5}{32} \text{ etc. } \frac{z}{2^z}\ \frac{z-1}{2^{z-1}}$$

[*Leibniz oder Tschirnhaus*]



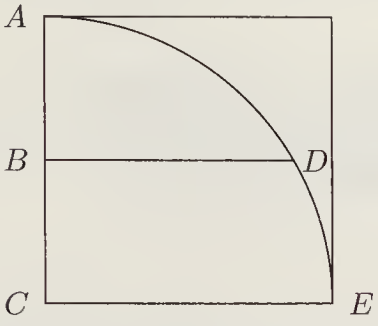
[*Fig. 2*]

8 *Darüber, Leibniz:* 100,000

1–5 Si ... E. *(1)* arithmetice *(2)* geometrice ... ABEF, | ACGF *ändert Hrsg.* | esse ... geometrice | aeqvales *ändert Hrsg.* | spatia ... sumtae *erg. L* 8 $\frac{5}{32}$ etc *(1)* $\frac{100,000}{2^{100,000}}$ *(2)* $\frac{z}{2^z}$ *L*

1 Si *A. B. C. D. E.*: Gemeint ist wohl, dass *AB*, *AC*, *AD* und *AE* in geometrischer Proportion sein sollen. 6 $\sqcap \frac{3}{2}$: Der korrekte Wert ist $3+\frac{1}{16}$. In den folgenden beiden Zeilen unterlaufen Leibniz weitere Versehen. Das Bildungsgesetz der betrachteten Folge lautet richtig $a_z = \sum_{k=1}^{z} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{z-1} \frac{z-k}{2^{z-1+k}}$. Es gilt $\lim_{z\to\infty} a_z = 4$.

[*Leibniz und Tschirnhaus*] [*Tschirnhaus*] $\sqrt{}$



[*Leibniz*] 2 3

[*Tschirnhaus*] *a* *b*

[*Fig. 3*]

[*Leibniz*]

Si ope curvae rationalis ex circulo ortae inveniri posset certa ratio, inter duas series infinitas duo circuli segmenta, ut *ABD* et *BCED* exprimentes (ut in hyperbola hoc fit) haberetur circuli quadratura, et exprimeretur ejus quantitas tantum per signum quadraticum $\sqrt{\dots}$.

Saepe dum exemplorum rationem sive demonstrationem, vel etiam si fieri posset refutationem quaerimu⟨s⟩ invenimus demonstrationem generalem.

6–9 Si ... inter *(1)* duo qvaedam circ *(2)* duas ... $\sqrt{\dots}$ *erg. L*

4 *Fig. 3*: Die Punktbezeichnungen *A* u. *B* stammen von Tschirnhaus, *C*–*E* von Leibniz.
8 exprimeretur: Die Behauptung ist nicht richtig.

81. THEOREMATA CENTROBARYCA PLANE NOVA
1. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 134. 1 Streifen von ca. 20,6 x 1,9 cm. 4 Z. auf Bl. 134 r°. Bl. 134 v° leer. Bl. 134 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XV 1 Bl. 24 (VII, 1 N. 30), dat. 5. Juni 1676, einen Streifen eines Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1432

1. Juin. 1676.

Inveniri poterunt T h e o r e m a t a C e n t r o b a r y c a p l a n e n o v a , si non ponantur lineae directionis parallelae sed concurrentes, tunc enim quae aequaliter distant a fulcro, non ideo aequiponderabunt. Debet tamen hoc novo considerandi modo idem semper provenire centrum gravitatis quod ante. Videndum.

9 f. distant *(1)* ab aliqvo | puncto *streicht Hrsg.* | *(2)* a fulcro *L*

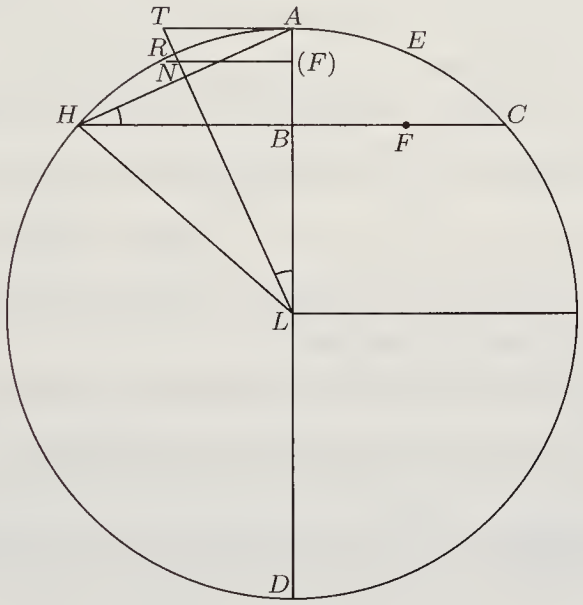
82. QUADRATURA CIRCULI EX CENTRO GRAVITATIS DESCRIPTI

4. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 10–11. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 11v° und 8 Z. (= S. 556 Z. 1–4) auf Bl. 11r°. — Auf dem restlichen Bogen eine Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus vorwiegend zum Thema Kreisquadratur (Cc 2, Nr. 1472; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1471, 1473

⟨4⟩ Jun. 1676

Quadratura circuli
ex centro gravitatis descripti.



[*Fig. 1*]

Sit arcus Circuli quilibet AEC, $\sqcap$ a. Diameter AD, δ. Circumferentia π. AB sinus versus v. Centri gravitatis arcus, a diametro ABD distantia (in sinu sumta) BF quam vocabimus g.

8 ⟨4⟩ *(1)* Ju⟨li⟩ *(2)* Jun. 1676 *erg. L* 9f. quadratura ... descripti *erg. L*

9f. Quadratura ... descripti: vgl. A. TACQUET, *Cylindricorum et annularium liber V*, 1659 (in der uns zugänglichen Ausgabe von 1669 prop. 33 u. 38, S. 131 f. sowie die zugehörige Fig. 45).

Constat ex demonstratione Archimedis, momentum arcus ex diametro a quo incipit esse $\frac{v\delta}{2} \sqcap m$. Superficies autem arcus revolutione circa hanc diametrum genita, est ad momentum hoc, ut peripheria ad diametrum; hanc superficiem vocemus s. Erit $\frac{s}{m} \sqcap \frac{\pi}{\delta}$. $\frac{\widehat{v\delta}}{2}$

et pro m ponendo ejus valorem $\frac{v\delta}{2}$ fiet $\frac{2s}{v} \sqcap \pi$.

Aliunde autem constat eandem superficiem aequari arcui ducto in viam centri gravitatis, seu arcui ducto in peripheriam circuli cujus radius est BF. Hanc ita investigabimus; erit illa via centri gravitatis c, ad peripheriam circuli circa AD, nempe ad π, ut BF dupla diameter ejus seu $2g$. ad diametrum AD; seu ad δ. Ergo $\frac{c}{\pi} \sqcap \frac{2g}{\delta}$. seu $c \sqcap \frac{2g\pi}{\delta}$. quae c. ducta in arcum dabit ac vel $\frac{2g\pi a}{\delta} \sqcap s$. Quem valorem illius s. substituendo in aequatione $\frac{2s}{v} \sqcap \pi$. fiet: $\frac{2ac}{v} \sqcap \pi$. adeoque $c \sqcap \frac{\pi v}{2a}$. Ponatur jam nota esse ratio arcus a ad peripheriam, ita ut sit $\frac{\pi}{a} \sqcap$ numero r. cognito, erit $c \sqcap \frac{vr}{2}$. Ergo recta quae sit [ad] sinum versum, ut arcus duplus est ad peripheriam aequabitur circumferentiae circuli, cujus radius sit distantia centri gravitatis arcus, a diametro.

Si sit arcus HAC. $\sqcap 2a$. sinus rectus duplicatus sit $2\omega \sqcap HC$. ejus momentum ex sinu recto est $\frac{2\omega\delta}{2}$ seu $\omega\delta$. Ejus centrum gravitatis sit (F). $B(F) \sqcap g$. via centri

6 investigavimus *L ändert Hrsg.* 13 f. diametro (*1*) Sit jam arcus heptagoni. Ponatur data esse ⟨Lon⟩ (*2*) Inventa esse peripheria circuli, adeoqve π. esse qvantitas cognita. Utiqve et arcus heptagoni datus erit is erit $\frac{\pi}{7}$. (*3*) Si *L*

---

1 Constat: Der folgende Satz entspricht Prop. I aus Bl. PASCAL, *Traité des sinus du quart de cercle*, 1658, S. 1 (*PO* IX S. 61 f.). Er lässt sich u. a. aus ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* I, prop. 42 herleiten. 3 diametrum: Richtig wäre radium. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler wirkt sich bis S. 555 Z. 5 aus, beeinträchtigt die allgemeine Überlegung jedoch nicht. 5 Aliunde: s. P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VIII, S. 147. 12 arcus ... peripheriam: Es müsste peripheria est ad arcum duplum heißen. 15 est: Richtig wäre $\omega\delta - 2a(\frac{\delta}{2} - v)$. Der Fehler wirkt sich zusammen mit einem weiteren Versehen bis S. 555 Z. 5 aus und beeinträchtigt auch die allgemeine Diskussion. Insbesondere hätte sich die letzte Gleichung in S. 555 Z. 5 bei richtiger Rechnung aufgelöst.

gravitatis c. erit $2ca \sqcap \omega\pi$, pro v sinu verso paulo ante substituendo nunc ω sinum rectum. Ergo $c \sqcap \frac{\omega\pi}{2a}$. Sit $\frac{\pi}{2a} \sqcap r$ erit $c \sqcap r\omega$. Et $\omega \sqcap \frac{c}{r}$. Porro $B(F) \sqcap g$. et $\frac{2g}{c} \sqcap \frac{\delta}{\pi}$. $AB \sqcap v$. $A(F) \sqcap v - g$. $av - ag \sqcap$ se[g]m. dupl. AHA. Jam $\overset{\frown}{} + LHA \sqcap \frac{a\delta}{2,2}$. Ergo $2\overset{\frown}{} + 2LHA \sqcap \frac{a\delta}{2}$. Jam $2\overset{\frown}{} \sqcap av - ag$. et $2LHA \sqcap \frac{\omega\delta}{2}$ ergo $2av - 2ag + \omega\delta \sqcap a\delta$. Porro $g \sqcap \frac{\delta}{2\pi}c$. et $c \sqcap r\omega$. Ergo $g \sqcap \frac{\delta r\omega}{2\pi}$ fietque $2av - 2a\frac{\delta r\omega}{2\pi} + \omega\delta \sqcap \frac{a\delta}{2}$. et pro v ponendo: $\sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ habebitur aequatio in qua sola supererit ω, quae proinde poterit semper inveniri ex data Quadratura Circuli, et relatione arcus ad circumferentiam, aequatione plana quod est absurdum. Non ergo poterit inveniri quadratura circuli. Sed ne in calculo tanti momenti erremus omnia ab integro ordiemur.

Diameter $AD \sqcap \delta$. Peripheria $\sqcap \pi$. Arcus $AH \sqcap a$. Sinus versus $AB \sqcap v$. Sinus rectus $HB \sqcap \omega$. Momentum arcus AH ex tangente verticis AT est duplum segmentum AHR. $\overset{\frown}{} \sqcap \overset{\frown}{\triangle} - \overset{\cdots}{\triangle}$ et $\overset{\cdots}{\triangle} \sqcap \frac{\omega\delta}{2}$. Nam $AHL \sqcap AL$ in HB. Porro $\overset{\frown}{\triangle} \sqcap \frac{\text{Arcus}}{2}$

Segm. Sect. ALH ALH

in rad. seu $\frac{a\delta}{4}$. Ergo $2\overset{\frown}{}$ segm. $\sqcap \frac{a\delta}{2} - \omega\delta$, arcus momentum ex AT. Ergo $A(F) \sqcap \frac{\delta}{2} - \frac{\omega\delta}{a}$. Per (F) ducatur recta ipsi BH parallela, transibit per centrum gravitatis, ducatur et LR arcum bisecans in R, transibit etiam per centrum gravitatis. Ergo duae hae rectae se secabunt in N. centro gravitatis. Sunt autem anguli T, R, L, A. et A, H, B. aequales ergo Triangula HBA (LAT vel) $L(F)N$ similia. Ergo $\frac{L(F)}{(F)N} \sqcap \frac{HB \sqcap \omega}{BA \sqcap v}$. $L(F) \sqcap \frac{\delta}{2} - A(F)$. Ergo $L(F) \sqcap \frac{\omega\delta}{a}$. Ergo $(F)N \sqcap \frac{\not{\omega}\delta v}{\not{\omega}a}$. sed nihil hinc novi.

7 f. aeqvatione plana *erg. L*

12 et: Der folgende Ausdruck für das Dreieck ALH müsste $\frac{\omega\delta}{4}$ lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter.

Ex his quatuor, Radio, sinu, angulo, Circumferentia circuli descripta a centro gravitatis arcus circa diametrum quo finitur, rotati, uno dato, dantur caetera; plane.

Ex his, radio, arcu, sinu, radio circumferentiae supra dictae, seu distantia centri gravitatis arcus a diametro dato uno dantur caetera, plane.

1 (*1*) Dato angulo | (id est relatione arcus ad (*a*) diametrum (*b*) peripheriam) *erg.* | et sinu, datur recta qvaedam circumferentiae circuli | cuiusdam *erg.* | aeqvalis. plane Dato arcu et (*aa*) sinus (*bb*) sinu datur radius huius circuli; plane (*2*) Si dentur, radius, sinus, angulus (*3*) Ex *L*

1–4 Ex ... plane: Bei beiden Sätzen muss der Kreisradius gegeben sein, die Behauptungen gelten dann jeweils nur für die drei letztgenannten Größen.

83. CENTRUM GRAVITATIS ARCUS CIRCULI

[4. Juni – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 170. 1 Ausschnitt von max. 20,4 x 2,4 cm. Linke Schnittkante schräg, obere Schnittkante geschwungen. 6 Z. auf Bl. 170 r°. Bl. 170 v° leer. — Bl. 170 bildete ursprünglich mit VII, 1 N. 31 einen Teil eines Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1288

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum Januar bis August 1676 belegt. N. 83 greift die in N. 82 S. 554 Z. 1–10 hergeleitete Beziehung zwischen via centri gravitatis und sinus versus eines um den Kreisdurchmesser rotierenden Kreisbogenstücks einschließlich eines dortigen Fehlers im Vorfaktor auf. Das Stück dürfte demnach kurz nach dem auf 4. Juni 1676 datierten N. 82 entstanden sein.

Centrum gr. arcus circuli.

Quidam arcus circuli rectae aequalis.

Invenire rectam cuidam arcui circuli aequalem.

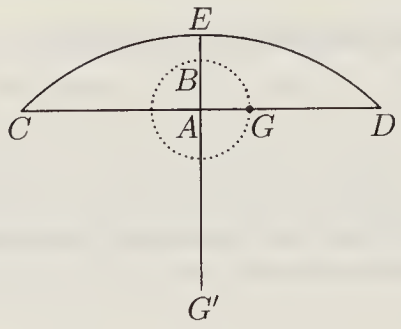
Subtensa CD aequatur circumferentiae BG circuli novi centro A radio AB descripti posito B esse centrum gravitatis arcus. Tacquet demonstravit in casu semicirculi. Imo reperio jam regulam esse talem: Arcus ED rotetur circa EA. Ejus centri gravitatis ab EA distantia sit AG. Via centri gravitatis, seu circumferentia cujus radius AG, erit ad EA

15 *Über* circumferentiae: (an duplo. ℜ.)

12 Centrum ... circuli *erg. L* 13 quidam ... aeqvalis *erg. L* 14 invenire ... aeqvalem *erg. L* 15 subtensa | arcus circuli CED *erg. u. gestr.* | CD *L* 17 talem: *(1)* circumferentia circuli *(2)* arcus *L* 18 ad *(1)* AD sinum *(2)* EA *L*

15 aequatur: Die anschließende Behauptung ist im Allgemeinen nicht korrekt. Im Falle eines Halbkreises CED gibt sie die Aussage aus A. Tacquet, *Cylindricorum et annularium liber V*, 1659 (in der uns zugänglichen Ausgabe 1669, prop. 33, S. 131) wieder, sofern man den von Leibniz in Z. 19 nachträglich in Erwägung gezogenen Faktor 2 nicht dem Kreisumfang, sondern der Länge der Sehne CD zuordnet.

18–558,3 Via ... descripti peripheriam: Richtig wäre $\frac{2\pi\overline{AG}}{\overline{EA}} = \frac{2\pi\overline{G'E}}{\widehat{ED}}$; vgl. N. 82 S. 554 Z. 10.



[*Fig. 1*]

sinum versum, ut arcus ED duplicatus, est ad totius circuli centro G'. radio $G'E$ descripti peripheriam; ergo requiritur ut nota sit ratio arcus ED. ad peripheriam. Demonstratio facilis quia momentum arcus ex EA, est radius in EA.

2 duplicatus *erg. L*

1 *Fig. 1*: Leibniz hat in Figur und Text die Punktbezeichnung G doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird einer der Punkte mit G' bezeichnet. 3 Demonstratio: s. N. 82 S. 554 Z. 1–10.

84. NOVA METHODUS TANGENTIUM

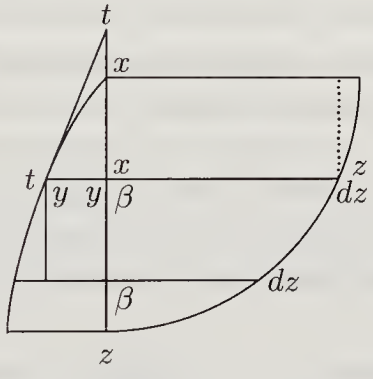
26. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 10 Bl. 1. Ca 2/3 Bl. 2°, Unterkante schräg geschnitten. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1 v° leer. Bl. 1 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 346 u. 347 (VII, 3 N. 60) einen vollständigen Bog. 2° abzüglich eines Streifens von max. 21,5 x 2 cm oberhalb von Bl. 346. — Gedr. : 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 49–50; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 116–118.
Cc 2, Nr. 1452

26 Jun. 1676

Nova Methodus Tangentium

Circa Methodum tangentium directam pariter et inversam, multa praeclara habeo. Cartesii methodus tangentium, nititur duabus radicibus aequalibus, nec locum habet, nisi cum omnes quantitates indeterminatae calculum ingredientes explicabiles sunt per unam, nempe abscissam. At vera methodus tangentium generalis est per differentias. Ut scilicet ordinatarum (directarum vel convergentium) quaeratur differentia. Unde fit, ut etiam quantitates alioqui calculo non subjectae, subjiciantur calculo tangentium, modo earum differentiae sint cognitae.



[*Fig. 1*]

9 26 Iun. 1676 *erg. L* 10 Nova ... Tangentium |, et impossibilitas qvadraturae circuli et series *(1)* conv *(2)* substitutrices *gestr.*| *erg. L*

19 et impossibilitas: Der gestrichene Teil der Überschrift bezieht sich auf VII, 3 N. 60.

Ut sit aequatio trium indeterminatarum, in qua x abscissa, $y.$ ordinata; et $z.$ arcus circuli, cujus sinus complementi sit $x.$ verbi gratia aequatio: $b^2y \sqcap cx^2+fz^2$. Pro sequente y invenienda loco x sumatur $x+\beta.$ et pro $z,$ sumatur $z-dz.$ Est autem $d\overline{z} \sqcap \frac{\beta r}{\sqrt{r^2-x^2}}$ posito [r esse radium circuli] et sumemus, $z-\frac{\beta r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Ergo $b^2(y) \sqcap cx^2+2cx\beta \boxed{+c\beta^2}$ $+fz^2-\frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2-x^2}} \boxed{+\frac{f\beta^2 r^{[2]}}{r^2-x^2}}$. Unde jam differentia inter y et (y) erit:

$$\dagger b^2y \dagger b^2(y) \sqcap \boxed{\dagger\overline{cx^2+fz^2}}, \dagger\overline{\boxed{cx^2}+2cx\beta\boxed{+fz^2}-\frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2-x^2}}} \sqcap b^2d\overline{y}.$$

Ergo $\frac{d\overline{y}}{\beta} \sqcap \frac{\dagger 2cx\sqrt{r^2-x^2}\dagger 2fzr}{b^2\sqrt{r^2-x^2}} \sqcap \frac{t}{y} \sqcap \frac{tb^2}{cx^2+fz^2}$. Unde et curvae flexus seu sinuatio poterit inveniri. Prout scilicet nunc $\not{2}cx\sqrt{r^2-x^2}$, nunc $\not{2}fzr$ praevalet. Tunc enim incipit ordinata quae a parte antea erat major, fieri minor, cum aequantur.

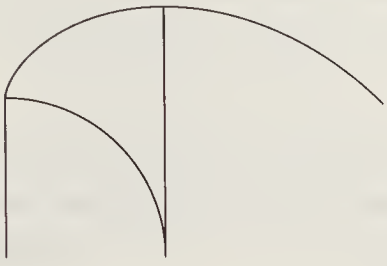
Idem est si aliae quoque quantitates indeterminatae plures, ut logarithmus, aliaeque ingrediantur, utcunque sint affectae, ut si sit aequatio: $b^2y \sqcap cx^2+fz^2+xzl.$ posito z esse arcum. l logarithmum. x sinum complementi arcus, y numerum logarithmi, radio et unitate existente $b.$ vel $r.$ Idem est, quandocunque indeterminata transcendens ex dimensione quadam vel quadratura inexplorata deducta est.

Caeterum ex his jam praeclara emergunt auxilia pro Methodo tangentium inversa. Nimirum aequationes generales seu indefiniti gradus poterunt fieri, initio quidem ex duabus tantum indeterminatis, $x.$ et $y.$ Sed si hoc modo res non succedit, quod conditis tabulis, quales expeto, facile apparebit, tunc, poterit assumi litera alia una pluresve; ejusque differentia assumi pro arbitrio formula quaevis, quo facto necesse est utique tandem reperiri formulam qualis desideratur; adeoque curva quae satisfaciat, ejus vero

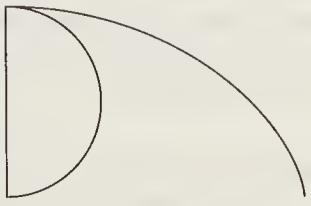
2 sinus *(1)* versus *(2)* complementi *L* 4 $-\frac{\beta r}{\sqrt{r^2-z^2}}$ *L ändert Hrsg.* 4 $\boxed{+2c\beta^2}$ *L ändert Hrsg.* 5 $-\frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2-z^2}} \boxed{+\frac{c\beta^2 r}{r^2-z^2}}$ *L ändert Hrsg.* 7 flexus *(1)* contrarius *(2)* seu *L* 8 f. ordinata | qvae *gestr., erg. Hrsg.* | *(1)* antea erat *(2)* a *L*

7 $\sqcap \frac{t}{y}$: Richtig wäre $\frac{dy}{\beta}=\frac{y}{\sqrt{t^2-y^2}}$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

descriptio earum literarum exhibitiones, id est summas differentiarum pro arbitrio assumtarum, postulabit. Inventa semel curva hanc quam postulamus tangentium proprietatem habente, facilius erit postea simpliciores ejus constructiones invenire.



[*Fig. 2a*]



[*Fig. 2b, gestrichen*]

Illud quoque commodi habemus ut possimus pluribus uti quantitatibus Transcendentibus sed inter se condependentibus exempli causa quae omnes ex quadratura Circuli aut Hyperbolae pendeant. Ex his speculationibus etiam apparebit possintne quadraturae aliae ad quadraturam Circuli et hyperbolae reduci. Caeterum cum inventio maximorum et minimorum utilis sit ad polygonorum inscriptionem et circumscriptionem. Hinc etiam istis transcendentibus magnitudinibus adhibitis poterunt Series inveniri convergentes, earumque eodem modo quaeri terminationes; seu quantitates eodem modo compositae. Tametsi tunc non ita facile sit ratiocinari de impossibilitate. Imo vero eodem modo. Tantum non video quomodo possimus invenire an non v. g. ex Circuli quadratura inveniri possit aliqua summa, quando nulla quantitas ex circuli magnitudine pendens calculum ingressa est.

2 postulabit *(1)* Ut qvaeratur curva *(2)* Inventa *L* 9 minimorum *(1)*, seu p *(2)* necessaria *(3)* utilis *L* 9 f. etiam *(1)* mechanicis isti *(2)* istis *L* 15 est | sed tunc facile puto *(1)* inveniri posse, ut *(2)* posse effici ut ingrediatur, qvaerendo *gestr.* | *L*

15 ingressa est: Leibniz setzt die Überlegung in VII, 3 N. 60 fort.

85. QUADRATURAE EX SUMMIS ORDINATARUM

[28. Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 433. 1 Ausschnitt von max. 21,5 x 5,5 cm. 9 Z. auf Bl. 433 v°. Bl. 433 r° leer. Bl. 433 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 24 u. 25 (VII, 3 N. 61) ein vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1449

Datierungsgründe: Der Text von N. 85 wurde im selben Duktus und in derselben Tinte im Anschluss an den Haupttext des auf den 28. Juni 1676 datierten Stückes VII, 3 N. 61_1 geschrieben, der Haupttext des auf den 29. Juni 1676 datierten N. 61_2 steht auf LH 35 XII 1 Bl. 29. N. 85 dürfte also am selben Tag wie VII, 3 N. 61_1 entstanden sein.

Quadraturae ex summis ordinatarum

Non inelegans observatio circa quadraturas, ex summis ordinatarum:

Sit $x \sqcap \sqrt{y^2+\sqrt{b+y^2}}+\sqrt{y^2-\sqrt{-b+y^2}}$ fiet $x^2 \sqcap y^2\boxed{+\sqrt{\begin{cases} b \\ +y^2 \end{cases}}}+y^2\boxed{-\sqrt{\begin{cases} b \\ +y^2 \end{cases}}}+ 2\sqrt{b} \sqcap 2y^2+2\sqrt{b}$. ad Hyperbol.

$x^2+2bx \sqcap dy^2+ey+f$. vel $x \sqcap \sqrt{dy^2+ey+f+b^2}-b$ et $x^2 \sqcap dy^2+ey+f-2[b]\sqrt{\cdots+b^2}+b^2$

etc. Sed ita nihil novi pro x^2. Interim hoc notabile, in ejusmodi aequationibus, ut $x^2+2bx \sqcap y$ etc. ubi in altera parte y. non radicem nec fractionem ingreditur, semper ex dato momento ex axe, seu ex data omnium x^2 summa, haberi figurae aream, et contra. Nam $\int x^2 \sqcap \int \overline{dy^2+ey+f}-2b\int x$. Haberi autem potest $d\int y^2+e\int y+\int f \sqcap \frac{dy^3}{3}+\frac{ey^2}{2}+fy$. Ergo si habeatur $\int x$. habebitur $\int x^2$. et contra, cum eorum summa vel differentia sit cognita. Idem si altius assurgant aequationes de summis cubicis, intelligendum.

11 Quadraturae ... ordinatarum *erg. L* 13 $\sqrt{y^2+\sqrt{b+y^2}}+$ *(1)* $\sqrt{y^2-\sqrt{b+y^2}}$ *(2)* $\sqrt{y^2-\sqrt{-b+y^2}}$ *L* 15 +f. | et *(1)* $x^2 \sqcap$ *(2)* $x^2+bx+\frac{b^2}{4}$ *(3)* $x^2+2bx+b^2 \sqcap dy^2+ey+f+b^2$. seu $x+b \sqcap \sqrt{dy^2+ey+f+b^2}$ *gestr.* | vel *L*

13 $x \sqcap$: Der von Leibniz teilweise korrigierte Ansatz (vgl. N. 54_1 S. 401 Z. 5 u. N. 54_2 S. 403 Z. 7) müsste $x=\sqrt{y^2+\sqrt{y^4-b}}+\sqrt{y^2-\sqrt{y^4-b}}$ lauten. Der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.

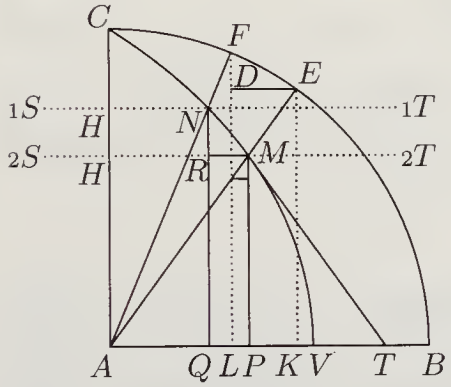
86. DE QUADRATRICE

Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 234–235. 1 Bog. 2°. Von Bl. 234 wurde unten ein Abschnitt von 21,9 x max. 10,3 cm entfernt (= N. 87), oben fehlt ein Ausriss von 10,5 x max. 2,5 cm. Haupttext: 2 S. auf Bl. 235 v°, 235 r°. Zusatz: 2/3 S. auf Bl. 234 v°. Notiz (in Zusammenhang mit N. 87): 7 Z. auf Bl. 234 r°. — An der Risskante auf Bl. 234 r° Rest fremden Textes: „⟨—⟩ figuram".
Cc 2, Nr. 1464 A, B, 00

Junii 1676.

De Quadratrice.



[*Fig. 1*]

Quadratricis natura in eo consistit, ut sit motus Regulae ST ex N. in RM. servato parallelismo, proportionalis motui radii AF circa centrum A, per arcum FE, circuli $CFEB$. posito AF transire per N, et AE per M. Proportionalis inquam in ratione radii AC, ⊓ r. ad peripheriae quadrantem CFB. Ergo $\frac{NR}{FE} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{r}{\pi}$ et $\frac{MP}{\text{arc. } EB} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{r}{\pi}$. $MP \overset{(3)}{\sqcap} \frac{r}{\pi} a$ ex 2. $FE \overset{(4)}{\sqcap}$

16 *Am Rande:* Rad. r. Peripheriae quadr. CFB ⊓ π. EB ⊓ arc. EK sinus ⊓ y. AK sinus compl. ⊓ v. AP ⊓ p. AQ ⊓ $\overline{2p}$. FE ⊓ $d\bar{a}$. DE ⊓ LK ⊓ $d\bar{v}$. FD ⊓ $d\bar{y}$ ⊓ β. RM ⊓ $d\bar{p}$. NR ⊓ $d\bar{m}$. m ⊓ MP.

10f. Qvadratrice. | sub finem de centrobarycis novis *gestr.* | Qvadratricis *L* 15 AM per N *L ändert Hrsg.* 20 sinus | versus *ändert Hrsg.* | ⊓ v. *L* 20 ⊓ p | NQ *ändert Hrsg.* | ⊓ $\overline{2p}$ *L*

10 Quadratrice: Die Aufzeichnung knüpft an die Diskussion der Quadratrix in I. Barrow, *Lectiones geometricae*, 1672, S. 83 [Marg.] an; Fig. 1 entspricht im Wesentlichen Barrows Figur 119, Gleichungen 17 und 19 sind direkt aus dem Werk übernommen. Vgl. Leibniz' Marginalien zu Barrows *Lectiones geometricae* N. 43 S. 303 Z. 2. 22 centrobarycis novis: N. 87.

$d\overline{a}$. et $NR \overset{(5)}{\sqcap} \frac{r}{\pi} d\overline{a} \sqcap d\overline{m}$. Ob Triangula AMP, AEK similia erit $AM : MP :: AE : EK$.
$: \frac{ra}{\pi} :: r : y$

Ergo $AM \overset{(6)}{\sqcap} \frac{r^2 a}{\pi y}$. et $AM^2 \overset{(7)}{\sqcap} \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$. Unde junctis

$\frac{r^4 a^2}{\pi^2 y^2}$ [⊓] $p^2 + \frac{r^2 a^2}{\pi^2}$. et $p \overset{(8)}{\sqcap} \frac{ra}{\pi y}\sqrt{r^2 - y^2} \sqcap HM$ ordinata quadratricis. Jam $\overline{AE}^2 - \overline{EK}^2 \overset{(9)}{\sqcap} AK^2$. et $y \overset{(10)}{\sqcap} \sqrt{r^2 - v^2}$. Erit $p \overset{(11)}{\sqcap} \frac{rav}{\pi\sqrt{r^2 - v^2}}$.
$r^2 - y^2 \sqcap v^2$

5 $\int \overline{pd\overline{a}} \sqcap \int \overline{\frac{ravd\overline{v}}{r^2 - v^2}}$ area quadratricis.

$\frac{d\overline{a} \sqcap EF}{d\overline{v}} \sqcap \frac{r}{y}$. et $d\overline{a} \overset{(12)}{\sqcap} \frac{rd\overline{v}}{y}$ et $a \overset{(13)}{\sqcap} \int \overline{\frac{rd\overline{v}}{y}}$. Inventa AP seu p. inveniatur jam AQ. seu $\overline{2p}$. Erit $\overline{2p} \overset{(14)}{\sqcap} \frac{ra\sqrt{r^2 - y^2 - 2y\beta} + \frac{r^2 d\overline{v}}{y}\sqrt{r^2 - y^2 - 2y\beta}}{\pi y + \pi\beta}$. Unde habe-

---

3 *Unter* $p \overset{(8)}{\sqcap} \frac{ra}{\pi y}\sqrt{r^2 - y^2}$: $\int \overline{pd\overline{a}}$ area quadratricis.

4 *Am Rande:* Pro $r^2 - v^2$. pone y^2 et $y \sqcap \frac{rd\overline{v}}{d\overline{a}}$. Fiet $p \sqcap \frac{rav}{\pi r \frac{d\overline{v}}{d\overline{a}}}$ seu $p \sqcap \frac{vad\overline{a}}{rd\overline{v}}$.

Horum quaeritur summa. Ergo quaeritur $\int pd\overline{a} \sqcap \int \overline{\frac{vad\overline{a}^2}{rd\overline{v}}}$ et $d\overline{a}^2 \sqcap \frac{r^2 d\overline{v}^2}{r^2 - v^2}$. Ergo posito $d\overline{v} \sqcap$ constanti quaeritur: $\int \overline{\frac{var}{r^2 - v^2}} d\overline{v}$. Hinc jam per infinitam seriem haberi potest area quadratricis sed ipsa ex momentis.

5 $\int \overline{\text{pd}\overline{\text{a}}}$ ... qvadratricis *erg. L* 7 jam | NQ *ändert Hrsg.* | seu *L*

---

9 $p \sqcap \frac{vad\overline{a}}{rd\overline{v}}$: Richtig wäre $p = \frac{vada}{\pi dv}$. Der daraus berechnete Ausdruck für $\int pda$, der bis auf einen Vorfaktor die eigentlich durch $\int pdm$ bestimmte Fläche unter der Quadratrix gibt, wird dadurch fehlerhaft. Dies wirkt sich im Haupttext nur in Z. 5 aus.

tur $\overline{2p} - p \overset{(15)}{\sqcap} RM$. Et quoniam NR ad RM, ut MP ad PT. seu $PT \overset{(16)}{\sqcap} \frac{RM, MP}{NR}$. Ex purgata 15. per 8. et 14. habebimus denique $AT \overset{(17)}{\sqcap} \frac{AM^2}{AV}$. sive $AT \overset{(18)}{\sqcap} \frac{p^2 + m^2}{\frac{r^2}{\pi}}$. Nam $AV \overset{(19)}{\sqcap} \frac{r^2}{\pi}$. Ergo $AT \overset{(20)}{\sqcap} \frac{\pi p^2 + \pi m^2}{r^2}$. At per 11. est $p^2 \overset{(21)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2 \overline{r^2 - y^2}}{\pi^2 y^2}$ et $m^2 \overset{(22)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2}{\pi^2}$. Ergo $AT \overset{(23)}{\sqcap} \frac{\boxed{r^2} a^2 \overline{r^2 - y^2} + \boxed{r^2} a^2 y^2}{\pi y^2 \boxed{r^2}}$ adeoque $AT \overset{(24)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2}{\pi y^2}$. seu AT ad AV ut a^2 ad y^2, seu in duplicata ratione arcus ad sinum. $PT \sqcap \frac{r^2 a^2}{\pi y^2} - p \overset{(25)}{\sqcap} \frac{EB}{AT} - \frac{EK}{AP}$

$\frac{r^2}{\pi}$

v

$\frac{r^2 a^2}{\pi y^2} - \frac{ra\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi y}$. Jam MP ad PT, ut $\overset{(26)}{RN}$ ad RM. Ergo $RM \overset{(27)}{\sqcap} \frac{r^4 a^2 d\overline{v}}{\pi^2 y^3} - \frac{r^2 d\overline{v}}{\pi y}$

seu m

seu $\frac{r}{\pi} a$

$\frac{r^3 a d\overline{v} v}{\pi^2 y^2}$. Horum ergo datur summa. Ergo si [summa] unius ex iis nempe posterioris detur, dabitur et prioris: at priori dato per 34 datur figura. Quod dabitur ex ipso per v. diviso. Detur summa summarum producti.

Porro ex his patet tangentem ad quadratricem non posse duci, quin detur ratio quadrantis ad radium et arcus ad sinum.

Hactenus linearum valores habemus: Nunc quaedam circa spatii dimensionem tentabimus. $pd\overline{m} \sqcap \frac{r^3 a d\overline{v}}{\pi^2 y^2} \sqrt{r^2 - y^2}$. $PT d\overline{m} \sqcap \underset{m}{MP}\, d\overline{p}$. seu $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{d\overline{p}}{d\overline{m}}$. $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{AT - AP}{MP \sqcap m}$.

2 per *(1)* 11 *(2)* 8 *L* 3 per | 11. *ändert Hrsg.* | est *L* 7–9 Horum ... diviso *(1)* differentiarum *(2)* detur ... producti *erg. L* 10 f. detur *(1)* ratio composita ex duabus, *(2)* ratione *(3)* ratio ... radium *(a)* et duplicata arcus *(b)* et *L*

---

6 $RM \overset{(27)}{\sqcap}$: Auf der rechten Seite fehlt der Faktor $\frac{\pi}{ar} = \frac{1}{MP}$; das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

$AT \sqcap \frac{r^2a^2}{\pi y^2}$. Ergo $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{d\overline{p}}{d\overline{m}} \overset{(28)}{\sqcap} \frac{r^2a^2 - p\pi y^2}{m\pi y^2}$ et fiet: $d\overline{p}m \sqcap \frac{r^2a^2}{\pi y^2} d\overline{m} - pd\overline{m}$. sive $d\overline{p}m + pd\overline{m} \overset{(29)}{\sqcap} \frac{r^2a^2 d\overline{m}}{\pi y^2}$. $\int \overline{d\overline{p}m} \overset{(30)}{\sqcap}$ spat. $VQNMV$. et $\int \overline{pd\overline{m}} \overset{(31)}{\sqcap}$ spat. $VAHNMV \overset{(32)}{\sqcap}$ spat. $VQNMV +$ $\underbrace{\text{rectang. } AHNQ}_{pm}$. Ergo per 29. 30. 32. erit duplum spatium $VQNM$, seu $2\int \overline{d\overline{p}m}, + pm \overset{[(33)]}{\sqcap} \frac{r^2}{\pi} \int \overline{\frac{a^2}{y^2} d\overline{m}}$. $d\overline{m} \sqcap \frac{r^2 d\overline{v}}{\pi y}$. per aeq. 5. 12. $a \sqcap r \int \frac{d\overline{v}}{y}$ per 13. Ergo $2\int \overline{m d\overline{p}} + pm \overset{(34)}{\sqcap} \frac{r^6}{\pi^2} \int \overline{\boxed{2} \int \overline{\frac{d\overline{v}}{y}}, \frac{d\overline{v}}{y^3}}$. Adde 27. Itaque ad aream Quadratricis habendam hac posteriore summa est opus.

Nimirum quaerenda est area figurae, in qua ad axem seu sinus versos vel complementi, applicentur quadrata arcuum, divisa per cubos sinuum. Videtur autem haec summa esse in potestate, quia posita $d\overline{v}$ constante idem est ac si dicas a te quaeri aream factam ex $\boxed{2} \overline{\int \frac{d\overline{v}}{y}}$ ductis in $\frac{d\overline{v}^3}{y^3}$. sive ex summae quadrato ducto in differentiarum cubos; seu $\int \overline{a^2 \text{ in } d\overline{a}^3}$. Illud utique certum est si ipsae AK. sumantur progressionis arithmeticae; figuram in qua arcus quadratum in differentiae arcus cubos ducatur fore homogeneam sive proportionalem figurae quadratricis duplici eo quo dixi modo. Ergo ex unius quadratura habetur altera (absolute, nullo amplius respectu habito ad $d\overline{v}$ constantem, quae rem

---

8 *Dazu oberhalb der Zeile:* Fuit error, in progressu detectus pagina sequenti.

10 *Unter* factam: error

9 dicas *(1)* curvam *(2)* a te qvaeri *(a)* figuram *(b)* aream *L* 11 $\int \overline{a^2 \text{ in } d\overline{a}^3}$. *(1)* pro $\frac{d\overline{v}^3}{y^3}$ scribatur z. fiet $\frac{d\overline{v}}{y} \sqcap \sqrt[3]{z}$ et pro $\int \overline{a^2 \text{ in } d\overline{a}^3}$. scribetur $\int \overline{\boxed{2} \int \overline{\sqrt[3]{z} \text{ in } z}}$. *(2)* Illud *L* 13 modo. *(1)* Hoc ergo demonstrato nihil qvaerandum amplius qvam sum *(2)* Ergo *L* 14 altera *(1)*. Hoc semel demonstrato jam constr *(2)* (absolute *L*

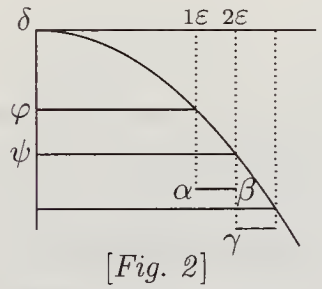
---

10 $\frac{d\overline{v}^3}{y^3}$: Der Übergang von $\frac{dv}{y^3}$ zu $\frac{dv^3}{y^3}$ ist, wie Leibniz auch später erkannt hat, nicht zulässig. Dies beeinträchtigt die anschließende Diskussion bis S. 567 Z. 19.

detexit tantum). Superest ergo inveniri hanc figuram in qua arcus ubique suae differentiae tali modo applicatur. $\frac{d\overline{v}^3}{y^3}$ sit $d\overline{z}$ erit $\frac{d\overline{v}}{y} \sqcap \sqrt[3]{d\overline{z}}$; et fiet figurae ordinata: $\underbrace{\boxed{2} \int \overline{\sqrt[3]{dz}} \text{ in } d\overline{z}.}_{\odot}$

cujus figurae quadratura habita demonstravimus haberi quadratricis quadraturam.

Quaerenda ergo hujus figurae ordinatam $\odot$ habentis descriptio. Ubi videndum ante omnia eademne prodeat curva, quomodocunque assumatur z. Ut si dicas $\int \overline{d\overline{z}}$ in $d\overline{z}$. seu z in $d\overline{z}$ fit enim Triangulum quodsi enim eadem prodiret figura semper tunc ista foret Parabola. Nam posita z. arithmetica fieret $d\overline{z}$ constans, ergo $\sqrt[3]{d\overline{z}} \sqcap d\overline{z}$ seu et $\int \sqrt[3]{d\overline{z}} \sqcap \int d\overline{z}$ et $\int d\overline{z} \sqcap z$. Ergo $\boxed{2} \int \overline{d\overline{z}} \sqcap z^2$. Ordinata ergo foret z^2 ad parabolam. Si sumatur z non arithmetica sed parabolica $\sqcap \frac{e^2}{2}$. fiet $d\overline{z} \sqcap e$ et $\int \overline{d\overline{z}}$ in $d\overline{z}$. erit $\frac{e^2}{2}$ in e. Videtur hoc eandem quam ante dare curvam, cum sit determinata quaedam tangentium proprietas, ut figura constatur ex ordinatis ad differentias applicatis, quae figura necessario dat Triangulum. Nam quoniam $\alpha\beta$ est aequalis ipsi $\beta\gamma$, ubique, erit $\delta\varepsilon \sqcap \varepsilon\alpha$, abscissa ordinatae. Si jam esset $\alpha\beta$ non aequalis $\beta\gamma$. sed si esset $\varepsilon\alpha$ talis, ut fierent semper $\beta\gamma$. radices cubicae ipsarum $\alpha\beta$, tunc dubito. Neque enim certum est hic eademne prodeat curva qualiscunque sumatur $\psi\varphi$ seu utcunque secetur $\delta\varphi$. Imo patet fore aliam, nam prout alia est $1\varepsilon 2\varepsilon$, seu $\alpha\beta$. alia habebitur $\beta\gamma$; aliae ergo ipsarum $\beta\gamma$ summae.



[*Fig. 2*]

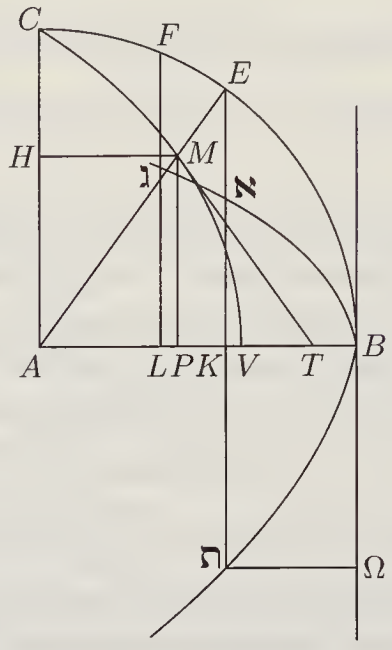
Res ergo sic non succedit. Et redibimus ad priora, ut quaeramus summam ex quadratis arcuum per sinuum cubos divisis et ad diametrum applicatis. Quod et aliter explicare

6 f. foret *(1)* etiam triangulum *(2)* Parabola *L* 11 f. Triangulum *(1)* Eodem modo sit qvaelibet figura facta ex *(2)* Nam *L* 14 esset *(1)* radix qvadratrica | ab *streicht Hrsg.* | ea *(2)* $\varepsilon\alpha$ *L* 15 $\alpha\beta$, *(1)* foret *(2)* tunc *(a)* video cessare *(b)* dubitandum *(c)* dubito. *(aa)* Ante omnia certum *(bb)* Neqve *L* 17 $\delta\varphi$. *(1)* Secetur δ —•—•— θ recta ut lubet in *(2)* Imo *L* 20 redivimus

1ε 2ε

L ändert Hrsg.

18 *Fig. 2*: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 3*]

poterimus, si fingamus aliam curvam Bאנ. cujus arcus Bא, Bנ sint ut arcuum circuli EB quadrata per cubos EK sinuum divisa. Hi arcus Bא applicentur ad $[L]K$ axem et fiat nova curva Bת. Figura BKתB ubique illa est quae arcubus Bא vel quadratricis areae supra dicto modo est proportionalis. Ejusdem curvae Bא momentum ex $B\Omega$ eidem proportionale, demto aliquo scilicet cognito nam ipsas KB, sinus versos insistere ipsis אB normaliter, vel אB in rectum extensis ipsas KB ⊓ תΩ applicari arcubus idem est. Porro momentum ipsarum אנ ex vertice idem est, ubicunque locentur, modo maneant inter parallelas, FL, EK. Itaque differentiae ex quadratis arcuum per sinus divisis; ducantur in sinus versos. $-\frac{a^2}{s^3}+\frac{\overline{2a}^2}{\overline{2s}^3}$. Est autem $\overline{2a} \sqcap a+\frac{d\overline{v}}{s}$. et $\overline{2s} \sqcap s+d\bar{s}$. Scribamus $-\frac{a^2}{s^3}+\frac{\overline{2a}^2}{\overline{2s}^3} \sqcap$ ל. Fiet

$$\text{ל} \sqcap \frac{\boxed{a^2} + \frac{2ad\overline{v}}{s}\boxed{+\frac{d\overline{v}^2}{s^2}}, s^3,, - a^2, \overline{\boxed{+s^3} + 3s^2d\bar{s}\boxed{+3sd\bar{s}^2} + \boxed{d\bar{s}^3}}}{s^6} \text{ seu } \text{ל} \sqcap \frac{2ad\overline{v} - 3a^2d\bar{s}}{s^4}$$

2 circuli *(1)* qvos ad *(a)* arcum *(b)* axem LK applicari *(2)* EB L

10 $-\frac{a^2}{s^3}+\frac{\overline{2a}^2}{\overline{2s}^3}$: Im Folgenden verwendet Leibniz s statt y für den sinus rectus EK.

⊓ א ג et quaeritur summa לv, seu $\frac{2ad\bar{v}v - 3a^2d\bar{s}v}{s^4 \sqcap \overline{r^2 - v^2}^2}$. Quaerenda forent primum $\frac{2ad\bar{v}v}{\overline{r^2 - v^2}^2}$. Quod posset forte inveniri si posset haberi $\frac{2ad\bar{v}}{\overline{r^2 - v^2}^2}$.

Et variae porro institui possent resolutiones, quas nunc omittam, ubi unum adhuc adjecero, ex dato momento figurae quadratricis $VPMV$, ex AB, haberi et ejus aream. Nam per superiora $\frac{MP}{PT}, \sqcap \frac{d\overline{m}}{d\overline{p}}$. At $PT \sqcap \frac{AM^2}{AV} - AP.$ seu $\frac{AM^2 - AP, AV}{AV}$. $AM^2 \sqcap$ $AP^2 + MP^2.$ seu $p^2 + m^2$. Ergo $PT \sqcap \frac{p^2 + m^2 - pAV}{AV}$. Ergo $\frac{d\bar{p}}{d\overline{m}}$ seu $\frac{PT}{MP \sqcap m} \sqcap$ $\frac{p^2 + m^2 - pAV}{AV, m}$. Ergo $AV, m, d\bar{p} \sqcap p^2 d\overline{m} + m^2 d\overline{m} - pAV d\overline{m}$ seu

$$\int \overline{AV m d\bar{p}} \quad \sqcap \quad \underbrace{\int \overline{p^2 d\overline{m}}} \quad + \quad \underbrace{\int \overline{m^2 d\overline{m}}} \quad - \quad \int \overline{pAV d\overline{m}}.$$

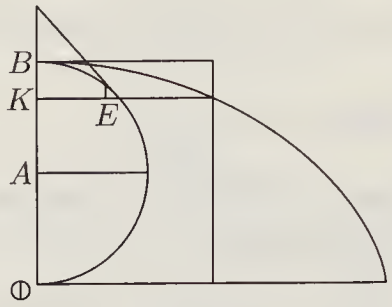
Cylind. sub spatio $VPMV$ in AV	⊓	duplo momento omn. HM ex CA proportionali solido circa HA	+	$\frac{m^3}{3}$	−	cylind. sub spatio $VAHMV$ in AV.

Ergo ex solido quadratricis circa axem datur figurae dimensio, et contra.

Pro ipso spatio $pd\overline{m}$ sic investigabimus. Invenimus $p \sqcap \frac{rav}{\pi y}$. et $d\overline{m} \sqcap \frac{rd\bar{v}}{\pi y}$. Fiet $pd\overline{m} \sqcap \frac{r^2 av d\bar{v}}{\pi^2 y^2}$ seu $\frac{r^2 av d\bar{v}}{\pi^2 r^2 - \pi^2 v^2}$. Omissa $\frac{r^2}{\pi^2}$. quaerenda summa seriei $\frac{av d\bar{v}}{r^2 - v^2}$. seu positis v sinubus rectis arithmetice proportionalibus quaerenda summa omn. $\frac{av}{r^2 - v^2}$. seu sum. $\frac{av}{r + v, r - v}$. Quod si ergo detur $\int \overline{\frac{av}{r + v}}$. item $\int \overline{\frac{av}{r - v}}$ dabitur area quadratri-

1 qvaeritur *(1)* figura cuius *(2)* summa *L* 2 forte *erg. L*

14 $d\overline{m} \sqcap \frac{rd\bar{v}}{\pi y}$: Auf der rechten Seite müsste $\frac{r^2 dv}{\pi y}$ stehen. Das Versehen wirkt sich wegen der anschließenden Vernachlässigung des konstanten Faktors nicht weiter aus.



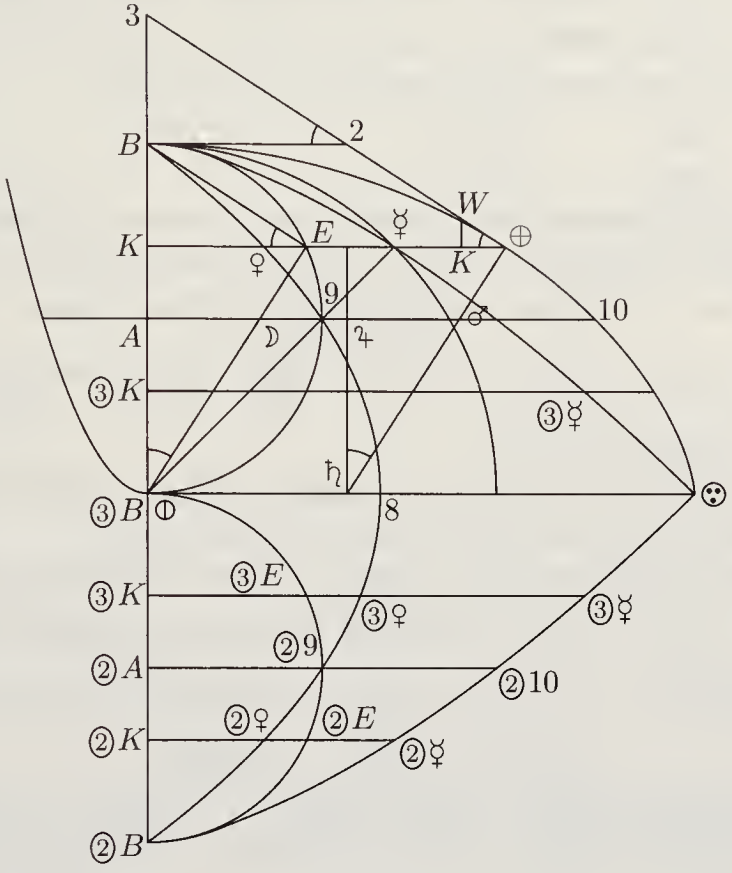
[*Fig. 4*]

cis. (Ordinata quadratricis $p.$ divisa per arcum dabit $\frac{v}{r^2 - v^2}$. quae habentur ex hyperbolae quadratura.) Pro $r + v$ scribatur λ. etiam arithmetica. Fiet: $v \sqcap \lambda - r$ et $\int \frac{av}{r+v} \sqcap \int \frac{a\lambda - ar}{\lambda}$. $\sqcap \int \overline{a} - \int \frac{ar}{\lambda}$. Superest ergo summa omnium $\frac{ar}{\lambda}$ quaerenda; seu arcus per arithmeticam divisi, seu summa omnium μ quae sint ad $\frac{r}{BA}$, ut arcus BE ad $\frac{\lambda}{\oplus K}$. Si fuisset $\lambda \sqcap r - v$ fuisset BK, pro $\oplus K$. Talis figura describenda ejusque quaerenda area; optime autem apparebit Cycloeide vel Evolutionali adhibitis, ubi linea arcus integra in comparationem cum aliis venit. Quaerenda figura quadraturae arcuum ad axem applicatorum. Ea autem haberi potest, est enim linea sinuum versorum quadratrix, quae haberi potest ex circuli quadratura, ejus differentiola est arcus. Quoniam autem res ad eam est reducta simplicitatem, puto dimensionem quadratricis adeo difficilem amplius non fore. Superest ut aliquando horum calculorum occasione rem eo reducam, ut non sit opus varias novas describere curvas, sed ut ipse calculus utiles describendas (in plerisque saltem casibus) ostendat.

6 eiusqve *(1)* qvaerendum momentum. *(2)* qvaerenda *L* 8 f. figura *(1)* summae *(2)* qvadraturae arcuum | ad axem applicatorum *erg.* |. Ea *L* 9 potest, *(1)* Eius vero differentiola | est *erg., streicht Hrsg.* | arcus *(2)* est *L* 10 eius *(1)* tangentes sunt arcus. *(2)* differentiola *L*

2 $\frac{v}{r^2 - v^2}$: Richtig wäre $\frac{v}{\sqrt{r^2 - v^2}}$; die $\frac{p}{a}dm$ hingegen sind (bis auf Vorfaktoren) gegeben durch $\frac{v}{r^2 - v^2}dv$, deren Summe somit auf die Hyperbelquadratur zurückführt.

[*Zusatz zu S. 569 Z. 14 – S. 570 Z. 14*]



[*Fig. 5*]

$AB \sqcap r$. BE arcus $\sqcap a$. $\Phi K \sqcap \lambda$. $\sqcap K☿$. $B☿⊙$ linea sinuum. Sit nova μ ad AB, ut a ad λ. Erit $\mu \sqcap A☽$. $\sqcap K♀$. $\sqcap ♄♂$. $B⊕⊙$ est Cycloeides.

4 $\sqcap ♄♂$ *erg. L* 4–572,1 Cycloeides *(1)* $♄⊕ \sqcap \Phi$E, est perpendicularis ad Cycloeidem $\frac{\mathrm{AB} \sqcap ♄♄}{\mu \sqcap ♄♂} \sqcap \frac{\mathrm{K}⊕}{\mathrm{KW}} \sqcap \frac{\mathrm{B2}}{3\mathrm{B}} \sqcap$ *(a)* ^{B} *(b)* $\frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{BK}} \sqcap$ *(aa)* $\frac{\Phi\mathrm{K}.}{\mathrm{KE} \sqcap \lambda}$ *(bb)* $\frac{\Phi\mathrm{K}.\lambda}{\mathrm{KE}}$ $\mu \sqcap \frac{\mathrm{ra}}{\lambda}$ *(aaa)* id est radius per sinum versum mu *(bbb)* Jam $\frac{\mathrm{AB}}{\mu} \sqcap \frac{\lambda}{\mathrm{KE}}$. erit $\mu \sqcap \frac{\mathrm{AB},\mathrm{KE}}{\lambda}$. si $\lambda \sqcap \mathrm{r} + \mathrm{v}$. fit $\mathrm{KE} \sqcap \sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{v}^2}$ ergo $\mu \sqcap$ *(2)* Omissa *L*

---

2 *Fig. 5*: Die Punktbezeichnung ☽ ist gegenüber der Vorlage vom Schnittpunkt von $\Phi☿$ mit $A10$ zu demjenigen von ΦE mit $A10$ verschoben worden ($A☽ = ♄♂$). Leibniz hat die Verläufe der Kurven $B☿⊙$ (linea sinuum) sowie $B♀98$ (definiert durch $K♀ = \frac{ra}{\lambda}$) nicht korrekt wiedergegeben; die Figur orientiert sich an Leibniz' Darstellung. 4 $\mu \sqcap \ldots \sqcap ♄♂$: Im Allgemeinen ist $\mu = K♀$ ungleich $A☽ = ♄♂$.

Omissa cycloide tantum ipsas $K\varsigma$ consideremus. Earum momentum ex $\odot$ habetur. Est enim $\mu\lambda \sqcap ra$. Ergo momentum omnium μ seu $K\varsigma$ ex $\odot$ aequatur spatio $BK\mathfrak{P}B$. Continuetur linea sinuum $B\mathfrak{P}\odot$ usque ad $②\mathfrak{P}②B$ ut sit utrobique similis eodem modo, $B\varsigma 98$ in $②9, ②\varsigma②B$. Eodem modo constituatur et $③K.③E.③\varsigma$.

$③K③\varsigma$ in $\odot③K \sqcap ③K③\mathfrak{P}$.
$K\varsigma$ in $\odot K \sqcap K\mathfrak{P}$

Ergo totius $②B\odot 8②9②B$ momentum ex $\odot 8 \sqcap$ spatio sinuum, $②B\odot\odot②10②B$.

Equidem $\odot③K + \odot K \sqcap \odot B$. et $K\mathfrak{P} + ③K③\mathfrak{P} \sqcap$ semicircumferentiae seu $\odot\odot$. Sed quod inde $①\mu \frown 2r - v,, + ③\mu v \sqcap \pi$. Ergo: $2r①\mu \sqcap +①\mu v - ③\mu v + \pi$. $①\mu, ①\lambda$ seu $\odot K, K\varsigma \sqcap rK\mathfrak{P} \sqcap r①a$ per superiora ubi $①\mu \sqcap \frac{r①a}{①\lambda}$. $③\mu③\lambda$ seu $③\mu 2r - ③\mu①\lambda$ seu $\odot③K, ③K③\varsigma, \sqcap r③K③\mathfrak{P} \sqcap r③a$.

Jam $K\mathfrak{P} + ③K③\mathfrak{P}$, seu $①a + ③a \sqcap 2\pi \sqcap \odot\odot$ quia $K\mathfrak{P}$ arc. BE et $③K③\mathfrak{P}$ arc. $E9\odot$. At hi duo arcus simul $\sqcap$ semicircumferentiae $B9\odot \sqcap \odot\odot \sqcap 2\pi$.

Ergo $2r\pi(\sqcap 2r\overline{①a + ③a}) \sqcap ①\mu①\lambda + ③\mu 2r - ③\mu①\lambda$. Est autem $\int \overline{①\mu①\lambda} \sqcap \int \overline{①a}$.

Ergo $\int \overline{2r\pi} \sqcap \int \overline{①a} + 2r \int \overline{③\mu} - \int \overline{③\mu①\lambda}$. Eodem modo $\int \overline{2r\pi} \sqcap \int \overline{③a} + 2r \int \overline{①\mu} - \int \overline{①\mu③\lambda}$ et $\boxed{2\int \overline{2r\pi}} \sqcap \boxed{\begin{matrix} +\int \overline{①a} \\ +\int \overline{③a} \end{matrix}} \begin{matrix} +2r \int \overline{③\mu} - \int \overline{③\mu①\lambda} \\ +2r \int \overline{①\mu} - \int \overline{①\mu③\lambda} \end{matrix}$. Si de totis loquamur jam $2r \int \overline{③\mu} \sqcap 2r \int \overline{①\mu}$ in totis. Sed si de totis loquamur, in $\int \overline{①\mu③\lambda}$ et $\int \overline{③\mu①\lambda}$ etiam est

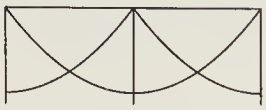
---

9 *Dazu am Rande:* $\odot B \sqcap 2r$. $\odot K \sqcap ①\lambda$. $BK \sqcap \odot③K \sqcap 2r - ①\lambda \sqcap ③\lambda$. $K\varsigma \sqcap ①\mu$. $③K③\varsigma \sqcap 3\mu$. $\odot\odot \sqcap 2\pi$. $K\mathfrak{P} \sqcap ①a$. π arcus quadrantis $③K③\mathfrak{P} \sqcap ③a$.

2 ex |ς *ändert Hrsg.*| aeqvatur *L* 4 f. ③K.③E.③ς. *(1)* patet momentum omnium *(2)* omnes *(a)* A *(b)* ③K③Q, in A③K. aeqvari spatio *(aa)* ☹3B②A②10☹ *(bb)* ☹⊙②A②10☹ Rursus omn. *(3)* ③K③ς *L* 7 Ergo ... ②B⊙☹②10②B *erg. L*

---

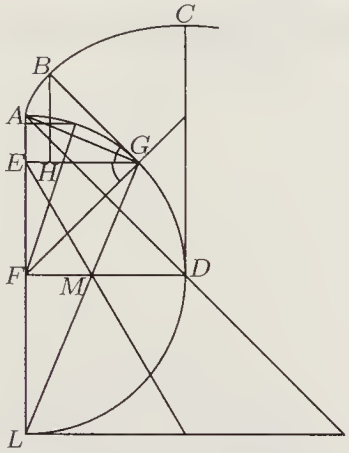
9 inde: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung müsste $2r\pi$ stehen. Leibniz benutzt ab Z. 14 den korrekten Ausdruck, unterschlägt dann aber bei Ersetzung der $\mu\lambda$ durch a einen Faktor r.



[*Fig. 6*]

quasi quoddam complementum. Una quaeque enim ①λ etiam est ③λ et una quaeque ①μ etiam est ③μ. Sed nihil hinc, et video nihil hinc haberi.

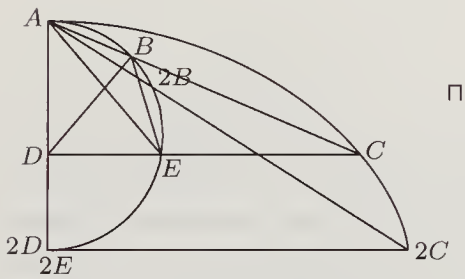
Si integrum $B8②B$ sumas redibunt simul et ordinatae et abscissae sumtis abscissis BK. $B③K$. $B②K$.



[*Fig. 7*]

Sit ABC curva circuli evolutione descripta[,] erit BG arcus. $\frac{EF+FL}{FL} \sqcap \frac{EF}{FM}$. Ergo $\frac{EF}{FL} \sqcap \frac{EF-FM}{FM}$. $FM \sqcap \frac{FL, EF}{EF+FL}$.

[*Notiz*]



[*Fig. 8*]

$2\overset{\frown}{CA} \sqcap \overset{\frown}{AECA}$. $\overset{\frown}{ABCA} \sqcap \overset{\frown}{ACA} - \overset{\frown}{ABA}$. et $\overset{\frown}{ACA} \sqcap \overset{\frown}{ABCA} + \overset{\frown}{ABA}$ et $\underbrace{\overset{\frown}{AECA}} \sqcap ②\overset{\frown}{ABCA} + 2\overset{\frown}{ABA}$.

$\boxed{\overset{\frown}{ABCA}} + \underbrace{\overset{\frown}{BECB}}$

$\underbrace{AEC} - \underbrace{\overset{\frown}{ABE}}$

AD in $EC - ABE - \overset{\frown}{BEB}$

3 f. haberi. *(1)* Res aliter instituenda momenta sumendo *(2)* Si L

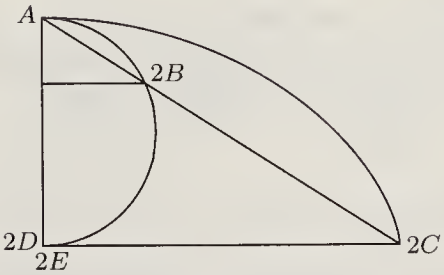
---

7 $\sqcap \frac{EF}{FM}$: Im Allgemeinen wäre $\frac{EG}{FM}$ richtig. $EG = EF$ gilt im in der Zeichnung wiedergegebenen Spezialfall, den Leibniz konsequent weiterrechnet. 15 AD in EC: Richtig wäre $\frac{AD \cdot EC}{2}$. Leibniz benutzt den fehlerhaften Ausdruck konsequent weiter, notiert in S. 574 Z. 4 allerdings das korrekte Resultat für die Zykloidenfläche.

Ergo $\underbrace{AD \text{ in } EC}$ ⊓ $\widehat{ABCA} + 2\widehat{ABA} + ABE + \widehat{BEB}$

in $2E$. est duplex circulus ⊓ $\underbrace{\widehat{ABCA} + \widehat{ABA}}$ [*bricht ab*]

semicirc.



[*Fig. 9*]

Figura Cycloeidis est tres semicirculi. Ergo retorta ejus est Circulus.

4 *(1)* Cycloeides *(2)* figura | Cycloeides *ändert Hrsg.* | est *L*

6 *Fig. 9*: Eine weitere gestrichene Zykloidenskizze wird nicht wiedergegeben.

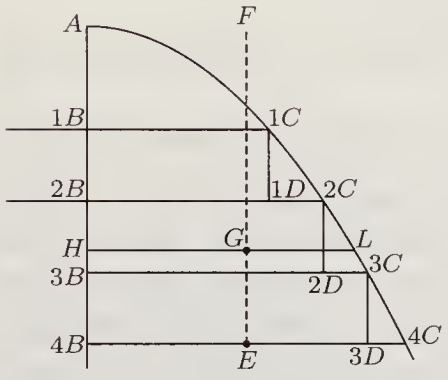
87. NOVA CENTROBARYCA

Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 37 V Bl. 50. Ca 1/3 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 50 r°. Bl. 50 v° leer. Geringe Textverluste durch Papierschäden am Rand. — Bl. 50 bildete ursprünglich zusammen mit N. 86 einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1474

Junii 1676

Nova Centrobaryca



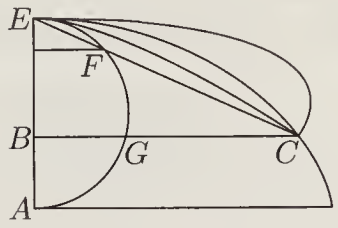
[*Fig. 1*]

Regula rigida descendit per $1B1C$. $2B2C$ etc. Ex $1B1C$ progressa in $2B2D$, ibi secum assumit $1D2C$, et facta $2B2C$ simul progrediuntur ambo in $3B2D$, ubi rursus assumta $2D3C$ fit $3B3C$, quae procedit in $4B3D$. et ita porro. Ajo aream percursam viae centri gravitatis omnium $1B1C$, $1D2C$, $2D3C$, $3D4C$ etc. in omnium summam $4B4C$ ductae, aequari. Primus situs omnium est $1B1C$, $1D2C$, $2D3C$, $3D4C$. Momentum eorum ex AB est semper idem durante motu, seu ultima $4B4C$ bisecta in E. centrum gravitatis cadet in rectam per E transeuntem axi AB parallelam, EF. Via ergo centri gravitatis hujus rectae portio est. Novissimum punctum viae erit ipsa E. Tunc enim omnes in directum jacebunt seu erunt in recta e⟨t⟩ tantum ergo primo opus est puncto viae G. id est centro gravitatis primi status. Quod punctum G jam video fore in recta HGL. aream $1C1B4B4C1C$ id est momentum mobilis in primo situ, bisecante. Et erit GE in $4B4C$ ⊓ huic areae. Hinc videtur data area semper dari bisectionem; applicando

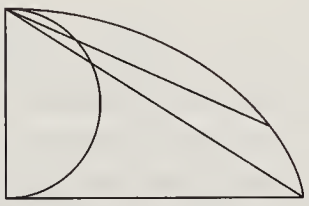
7 Iunii 1676 *in anderer Tinte erg. L*

23 aream ... bisecante: Die Linie HGL teilt die Fläche $1C1B4B4C1C$ im Allgemeinen nicht in zwei gleiche Stücke. Außerdem ist das Moment der aus den horizontalen Linienstücken $1B1C$, $1D2C$, $2D3C$, $3D4C$ bestehenden Ausgangskurve bezüglich der horizontalen Achse gleich der Fläche zwischen Achse und Kurve. Leibniz rechnet mit der Aussage zur Teilung der Fläche bis zum Schluss der Aufzeichnung weiter.

aream basi, seu dividendo aream per basin vicissim qui in binas partes aequales seca⟨ri⟩ potest; aream invenire potest. Sed hoc diligentius excutiendum, quod si verum est, sane mirabile est.



[*Fig. 2a*]



[*Fig. 2b*]

Hinc sequeretur innumeras novas fieri posse dimensiones. Sequeretur posse cycloeidem in binas partes aequales secari geometrice, recta basi parallela, area quae ex quad. circuli pendet, per basin quae pendet ex eadem, divisa; quotie⟨ns⟩ erit quantitas pure geometrica. Cycloeides est tres semicirculi. Circulus est semicircumf. in semirad. (seu quadrans in ra⟨d⟩). Ergo semicirculus est semicircumf. in $\frac{\text{rad}}{4}$. Ergo tres semicirculi erunt semicircumf. in $\frac{3\,\text{rad}}{4}$. Divide per semicircumf. fit $3\frac{\text{rad}}{4}$. Erit AB $\frac{3\,\text{rad}}{4}$ et BC bisecabit cycloeidem. Jam ECE segmentum Cycloidis aequatur figurae sinuum dimidio, adeoque ex circuli quad. habetur. Ex eadem habetur Triangulum EBC. Ergo et eorum summa. At haec adhuc semel habetur, videndum an aequatio fiat identica. Si vera nostra propositio quaelibet figura quadrabilis poterit per parallelas bisecari, quadrisecari, in octo secari partes etc. Et contra quae bisecari potest poterit quadrari. Jam spatium hyperbolicum saepe per parallelas nonne bisecari potest, adeoque et quadrari? Ideo his non fido. Si verum esset quod diximus posset arcus quidam circuli rectificari.

17 bisecari, *(1)* trisecari *(2)* qvadrisecari *L* 20 rectificari. | Nam linea sinuum ⟨bis⟩ *gestr.* | *L*

9 Cycloeides ... semicirculi: s. die diesbezügliche Notiz in N. 86 S. 573 Z. 10 – S. 574 Z. 5.
9 f. semicircumf. in semirad.: Die Kreisfläche entspricht dem Produkt aus Halbkreisumfang und Radius. Leibniz rechnet mit dem fehlerhaften Wert konsequent weiter. Insbesondere ist dadurch auch die Lage der Linie BC in Fig. 2a nicht korrekt wiedergegeben.

88. DE EXPONENTIBUS ET INDICIBUS AD QUADRATURAS APPLICATIS. DE MAXIMIS ET MINIMIS. CURVA HASTARIA. METHODUS TANGENTIUM INVERSA

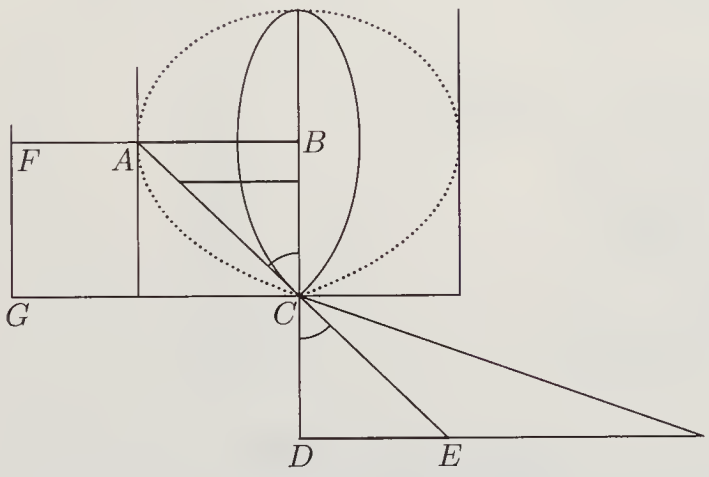
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 445 u. 447. 1 Bog. 2°. 4 S. Teil 1 ist wahrscheinlich während eines Gesprächs entstanden.
Cc 2, Nr. 1470

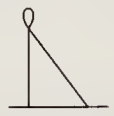
Jun. 1676.

De exponentibus et indicibus ad quadraturas applicatis.
De Maximis et Minimis. Curva Hastaria.
Method. tang. invers.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

[*Fig. 1c*]

8 *Daneben:* De Maximo et Minimo et quaedam de Methodo tangentium inversa logarithmis, indicibus, seriebus infinitis.

14 *Dazu am oberen Rand:* Quaestio de maximo transmutari sic potest in quaestionem de minimo, sit AB maxima ordinatarum ex Curva in CB erit FA minima ordinatarum ex Curva in GF.

8 Jun. 1676. *erg. L* 9–11 De ... invers. *erg. L*

$$\begin{array}{ll} \sqrt{AC^2 - AB^2} & \\ \vee & \\ \frac{CD}{\cancel{CE}} \sqcap \frac{CB}{AC} & AC + CE \sqcap AE \\ \wedge & \\ AE - AC & CD \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{AB}{AC} \sqcap \frac{DE}{\cancel{CE}} & DE \sqcap \sqrt{CE^2 - DC^2} \\ & \wedge \\ \sqcap AE - AC & AE^2 - 2AE, AC + AC^2 \end{array}$$

$$\frac{CD}{AE - AC} \sqcap \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AC}$$

$$\frac{AB}{AC} \sqcap \frac{\sqrt{AE^2 - 2AE, AC + AC^2 - DC^2}}{AE - AC}$$

$$AB^2, \overline{AE - AC}^2 \sqcap \overline{AE - AC}^2, AC^2,, - DC^2, AC^2$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} \sqcap \frac{\overline{AE^2 - 2AE, AC; + AC^2} - DC^2}{\underbrace{AE^2 - 2AE, AC + AC^2}}$$

$$\overline{AE - AC}\boxed{2}$$

---

6 f. *Daneben:*

$$\frac{CD}{AE - AC} \qquad \boxed{AE} \qquad CD \overline{\qquad\qquad} AE$$

$$AB$$

$$AC$$

$$\frac{AB}{AC} \sqcap \frac{CE}{CD} \qquad CE \sqcap AE - AC$$

14 *(1)* $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$ *(2)* $\frac{\text{AB}}{\text{AC}} \sqcap \frac{\text{CE}}{\text{CD}}$ | CE *gestr., erg. Hrsg.* | $\sqcap$ AE − AC *L*

---

14 $\frac{AB}{AC} \sqcap \frac{CE}{CD}$: Die falsche Gleichung geht nicht in den Text ein.

$$DC^2, AC^2 \sqcap AC^2, \overline{AE - AC}^2 - AB^2, \overline{AE - AC}^2$$

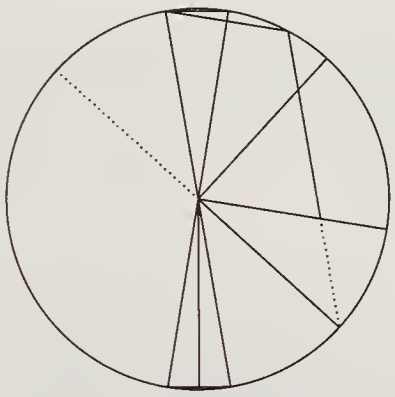
$$\frac{\boxed{DC^2}, AC^2}{AC^2 - AB^2} \sqcap \overline{\boxed{AE} - AC}^2 \qquad \frac{CD^2}{\overline{AE - AC}\boxed{2}} \times \frac{AC^2 - AB^2}{AC^2}$$

$$DC^2, AC^2 \sqcap AE^2 - 2AE, AC + AC^2 \qquad \overline{AE - AC}^2 \sqcap \frac{AC^2, CD^2}{AC^2 - AB^2}$$

$$\frac{AC^2 - AB^2}{- AE^2, AB^2 + 2AE, AC, AB^2 - AC^2, AB^2} \sqcap DC^2, AC^2$$

$$+AE^2 AC^2 - 2AE, AC^3 + AC^4$$

$$\frac{-DC^2, AC^2,, + AE^2 AC^2, -2AE, AC^3 + AC^4}{+AE^2, -2AE, AC + AC^2,} \sqcap AB^2$$



[*Fig. 2*]

$$\frac{z}{a+z} \times \frac{a^2 - z^2}{b+z}$$

$$bz + 2z^2 \sqcap a^2 \boxed{-z^2}$$

$$\frac{z}{a+z} \qquad \frac{a-z}{b-2z} \qquad \frac{a+z}{b+2z}$$

$$\frac{z}{a+z} \sqcap \frac{a^2 - z^2}{b^2 - 4z^2}$$

$$b^2 z \boxed{-z^3} \sqcap a^3 - az^2 + a^2 z \boxed{-z^3}$$

---

2 *Nebenbetrachtung, gestrichen:*

$$AE - AC$$

$$\bigvee$$

$$\frac{CE}{AE - AC} \sqcap \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AC}$$

9 2 *erg. L* 10 f. *Faktoren* 2 *und* 4 *in den Nennern erg. L*

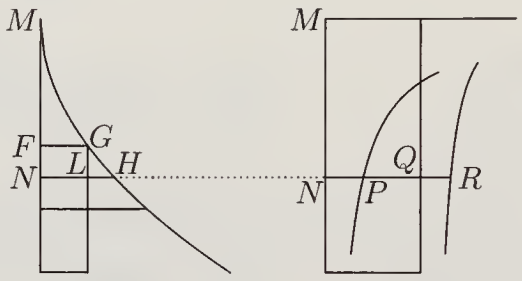
[*Zusatz zu S. 579 Z. 7*]

$AB \sqcap \frac{AC}{AE-AC}\sqrt{AE^2-2AE,AC+AC^2,,-DC^2}$ vel brevius $AE-AC$, est CE.

Ergo $AC \sqcap AE-CE$. Ergo $AB \sqcap \frac{AE-CE}{CE}\sqrt{CE^2,-DC^2}$.

$AB \sqcap y$. $AE \sqcap a$. $DC \sqcap c$. $CE \sqcap e$. $\frac{y^2e^2}{a^2-2ae+e^2} \sqcap e^2-c^2$. $\frac{ye}{a-e}\boxed{2}, \sqcap e+c, e-c$.

$y^2 \sqcap e+c, e-c, \frac{\overline{a-e}^2}{e^2}$. Examinandum quando: $\frac{e^2-c^2,\overline{a-e}^2}{e^2}$, omnium possibilium maxima, ad examinandum quando AB maxima. Nam si y maxima, etiam y^2 maxima, e est magna etiam e^2-c^2 est magna, sed contra $\frac{a-e}{e}\boxed{2}$ est parva.

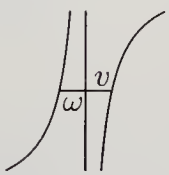


[*Fig. 3*]

$MN \sqcap e$. $NH \sqcap e^2$. $FG \sqcap NL \sqcap c^2$ et $LH \sqcap e^2-c^2$. $\frac{a-e}{e}\boxed{2} \sqcap \frac{a^2}{e^2} - \frac{2a}{e}+1$.

$\sqcap PR \quad QR \quad [N]R+NQ$

Ergo examinandum quando rectangulum ex PR in LH est omnium possibilium maximum. Sit ωv rectangulum. Sint ω ascendentes, v descendentes quaeritur rectangulum maximum. Sit $z \sqcap \dagger\omega \dagger v$ et $\omega \sqcap \dagger z+v$. et $\omega v \sqcap \dagger zv+v^2$. Ponamus ω esse majus et v minus. Erit ωv maximum, tum cum z maximum, tum cum v maximum, quae inter se pugnant, et concilianda ex posita ⟨val⟩orum natura.



[*Fig. 4*]

10 f. maximum, *(1)* a + b ⌢ a ⊓ a² + ba. Hac tantum rectangulum tanto ma *(2)* Sit L
13 ⊓ †zv + v². *(1)* qvod erit maximum, si v est maximum et *(2)* qvod redditur maius minus *(3)* ponamus L

[*Zusatz zu S. 580 Z. 5, von dort mit Hinweisstrich verbunden*]

Pro y^2 ponamus ψ. Fiet $\psi e^2 \sqcap e^2a^2 - 2e^3a + e^4 - c^2a^2 + 2c^2ae - c^2e^2$ et ordinando erit $\psi e^2 \sqcap e^4 - 2ae^3 + a^2e^2 + 2c^2ae \langle - \rangle c^2a^{\langle 2 \rangle}$ et ordinando ad tangentes:

$$\begin{array}{r} -c^2 \\ te^{\not 2} \sqcap 4e^{\not 3} - 6ae^{\not 2} + 2a^2\, e^{\not 2} + 2c^2a\not{e} \\ -2c^2 \\ -2\psi \end{array}$$

et pro $2\psi e^2$ ponendo ejus valorem, fiet:

$$te^2 \sqcap \; 2\textcircled{4}e^4 \; - 2\textcircled{6}ae^3 \; \boxed{+2a^2e^2} + \; \boxed{2c^2ae}$$
$$\boxed{-2e^4} \; \boxed{+ \; 4\,ae^3} \; \boxed{\begin{array}{l} -2c^2\,.. \\ -2a^2e^2 \\ +2c^2\,.. \end{array}} - 2\textcircled{4}c^2ae + 2c^2a^2$$

Jam quando tangens axi parallela ipsa t est minima seu indivisibilis ergo omittatur. Et fiet $\not 2e^4 - \not 2ae^3 - \not 2c^2ae + \not 2c^2a^2 \sqcap 0$ seu $0 \sqcap e^2 - ae, e^2,, - ae + a^2, c^2$ quae dividi potest per $e - a$, (nam $e - a$ non potest esse aequationis radix, quia e certo minor quam a) et fiet $e^3 - ac^2 \sqcap 0$.

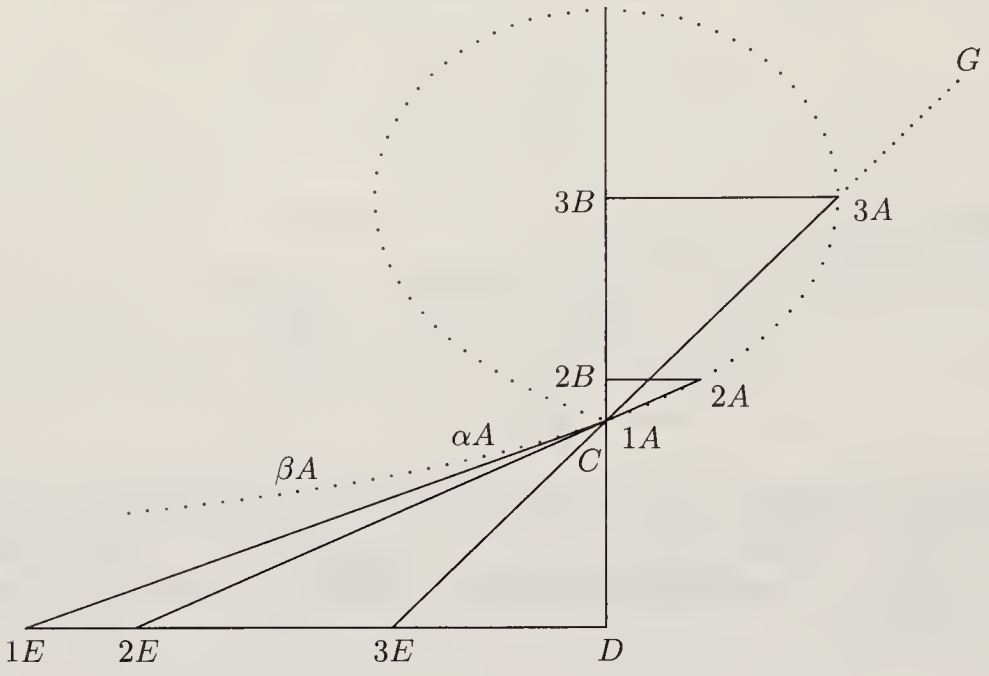
15 Error puto quia hac regula tangentium est solum pro ordinatis et abscissis parallelis.

11 f. $+2c^2$ .. *(1)* necessario e, est infinite parva *(2)* iam ... est *(a)* infinita ergo *(b)* minima *L* 14 major *L ändert Hrsg.*

16 Error: Der Einwand ist nicht gerechtfertigt; das Ergebnis für die maximale Ordinate ist korrekt, wie Leibniz auch später selbst in S. 584 Z. 10–12 feststellt.

[*Teil 2*]

La Piqueline.



[*Fig. 5*]

Pique AE. dont un bout demeurre tousjours dans la ligne 1*E*2*E, sur la terre elle meme tousjours couchée sur l'epaule DC,* vel *D*1*A la pointe A, décrira la courbe Piqueline,* 1*A*.2*A*.3*A. etc. On demande la plus grande largeur de la courbe, ou la plus grande ordonnée* 3*B*3*A.*

---

3 *Am linken oberen Rand:* Video hanc lineam non nisi alterius esse partem. Et scilicet longior hasta quam *EA.* procedens in *G* indefinite. punctoque in *E.* manente in *ED* plano hasta semper incumbente in humero *CD.* puncto in hasta notato *A.* Describatur curva transiens per puncta 3*A*, 2*A*, 1*A*, *αA*, *βA* etc. quae est asymptotos ipsi *ED.*

---

3 *Fig. 5*: Eine nicht gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

$CD \sqcap c$. $EC \sqcap e$. $AE \sqcap a$. $CA \sqcap a - e$. $AB \sqcap y$. $ED \sqcap \sqrt{e^2 - c^2}$. $\frac{AB \sqcap y}{CA \sqcap a - e} \sqcap \frac{ED}{CE \sqcap e}$. Ergo $\frac{y}{a-e} \sqcap \sqrt{\frac{e^2 - c^2}{e}}$. Quaeritur y omnium maxima: Si y sit omnium maxima, erit etiam y^2, omnium maxima. Novum ergo faciamus $i\psi \sqcap y^2$. et fiet $\frac{i\psi}{a^2 - 2ae + e^2} \sqcap \frac{e^2 - c^2}{e^2}$. et quaeritur ψ omnium possibilium maxima. Hic utile foret methodum tangentium habere, qui non tunc solummodo succedat, cum ψ. et e. sunt una abscissa ex quodam axe, altera ordinata normalis, sed tunc etiam cum convergentes adhibentur cum ordinatis, ut AB et CE. ubi AB ordinatae CE, convergentes, sed hoc obiter. Nunc vero quoniam de maximo tantum et minimo agitur, utamur Huddenii methodo: Multiplicando per crucem, fiet: $i\psi e^2 \sqcap a^2e^2 - 2ae^3 + e^4$,, $- a^2c^2 + 2ac^2e - c^2e^2$. Abjiciatur cognita, reliqui termini per numerum dimensionum ipsius e, multiplicentur, divisisque omnibus per e, fiet: $i\psi 2e \sqcap 2a^2e - 6ae^2 + 4e^3 - 2ac^2 + 2c^2e$. Sed quoniam ita adhuc opus esset ope prioris aequationis ex hac nova tollere ipsam ψ. ideo satius erit ab initio ordinata aequatione ita multiplicare, ut tollatur ψ. Ordinata ita stabit:

$$\begin{array}{ccccccc} e^4 & - 2ae^3 & + a^2e^2 & + 2ac^2e & - a^2c^2 & \sqcap & 0. \\ & & - c^2 & & & & \\ & & - i\psi & & & & \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & & \end{array}$$

---

1 f. *Daneben:* Aliter: $\frac{AB \sqcap y}{CB \sqcap v} \sqcap \frac{CD \sqcap c}{ED}$.

Am Rande: $CB \sqcap v$. $AC \sqcap \sqrt{v^2 + y^2}$. $e \sqcap a - \sqrt{v^2 + y^2}$.

$$\begin{array}{c} ED \sqcap \sqrt{+a^2 - 2a\sqrt{v^2 + y^2} + v^2 \boxed{-c^2}}. \\ \begin{array}{cc} -c^2 & +y^2 \end{array} \\ \odot \end{array}$$

Pro $a^2 - c^2$, ponamus d^2. Fiet $ED \sqcap \sqrt{d^2 - 2a, AC + AC^2}$.

---

8 Huddenii: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507. 11 $-2ac^2 + 2c^2e$: Richtig wäre $+2ac^2 - 2c^2e$. Leibniz setzt im Folgenden noch einmal neu an.

et fiet: $\not 2e^4 - \not 2ae^3 - \not 2ac^2e + \not 2a^2c^2 \sqcap 0$. quae aequatio dividi potest per $e - a$, fiet: $e^3 - ac^2 \sqcap 0$. seu $e \sqcap \sqrt[3]{ac^2}$. Sit $a \sqcap \frac{cf^3}{i^3}$. foret $e \sqcap \frac{cf}{i}$. Si autem datae sint a. et c, patet tantum inter a et c. inveniendas duas medias proportionales $c.\ e.\ \frac{e^2}{c}.\ a.$ Scilicet erit e minor duarum mediarum proportionalium inter c et a.

Constructio:

Curvae Hastariae maximam latitudinem invenire: Centro E, radio $C3E$, minore duarum proportione mediarum inter CD altitudinem humeri, et AE, hastae longitudinem, describatur circulus, qui lineam horizontalem DE, secabit in $3E$, ex $3E$, per C trajicatur hasta $3E3A$ eritque $3A$ punctum maximi curvae in latitudinem excursus, quaesitum.

Notabile hic est, quod idem prodit quod pagina praecedente, ubi methodo Tangentium usus eram, quasi ipsae EC non essent convergentes, sed ex eadem recta abscissae aut ordinatae parallelae; alterum, quod mihi videtur ex his agnosci posse cum generaliter de maximis et minimis, et de tangentibus nullo ad ordinatas respectu agitur, videndum esse, quousque Slusiana Methodus sufficiat Huddeniana generalior est, et in omnem apta casum.

Illud quoque praeclarum in Huddenii methodo, quod ipsa maxima quaesita, hoc loco ψ. tractatur instar cognitae, quod habet rationem, quia ipsa unica est; imo idem futurum non dubito, etsi maxima ψ. ad quadratum aliamve potentiam unam pluresve assurgeret quod mihi valde notabile videtur.

---

1 *Daneben, gestrichen:* Nota si pateremus fieri e majus [*bricht ab*]

2 *Nebenbetrachtung:* Sit $c \sqcap 1$. $f \sqcap 2$. $a \sqcap 8$. fiet $e \sqcap 2$.
Unterhalb von Fig. 5: $DC \sqcap 1$. $AE \sqcap 8$. $3EC \sqcap \sqrt[3]{8} \sqcap 2$. Erit $3B3A$ omnium BA maxima.

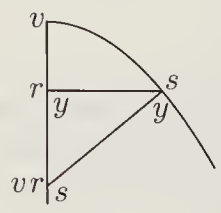
17–19 NB.

---

14 Slusiana: s. *An Extract of a Letter from the Excellent Renatus Franciscus Slusius*, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059).

[*Teil 3*]

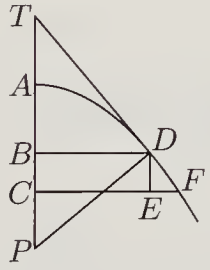
Methodus tangentium inversa:



[*Fig. 6*]

$r^2 + y^2 \sqcap s^2$. et $r^2 \sqcap a^2 - y^2$. fiet: $a^2 \boxed{-y^2 + y^2} \sqcap s^2$ unde s constans.

$r^2 + y^2 \sqcap s^2$. Sit $r^2 \sqcap a^2$. fiet $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. ad Parabolam. Quam aequationem si quis ad duas radices aequales accommodare vellet; ob s maximam is eo ipso determinaret y ad certum casum, non ergo amplius maneret locus. Sed idem foret ac si in curva cujus ordinata s. abscissa y. (aliterve) maximam quaereret ordinatam s. quod a nostra quaestione est alienum. r. non est constans sed variabilis, et v, et s. sunt constantes. $v^2 - 2vx + x^2, +y^2 \sqcap s^2$. Sit $v \sqcap x + b$. cujus aequationis ope tollatur v. Fiet: $v \sqcap x - b$. et erit $x^2 - 2bx + b^2, -2x^2 + 2xb + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Fiet: $b^2 + y^2 \sqcap s^2$. ad Parabolam. Sit $v^2 - 2vx + x^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $a^2 - x^2 + y^2 \sqcap s^2$. $s^2 - a^2 \sqcap y^2 - x^2$ seu $\frac{s+a}{y-x} \sqcap \frac{y+x}{s-a}$ quae curva supponit quadraturam circuli.



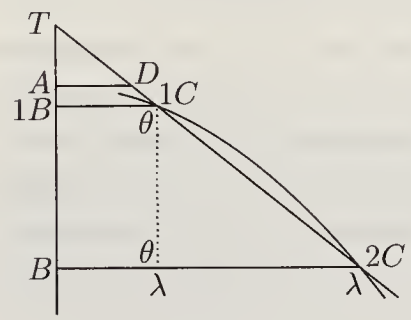
[*Fig. 7*]

Inventa generali omnium ordinatarum expressione, pura rationali, videtur hinc quoque aliquid duci posse ad methodum tangentium inversam. Sit $y \sqcap bx + cx^2 + dx^3$ etc. $AB \sqcap x$. $BD \sqcap y$. $dx \sqcap \beta$. $\sqcap 1$ erit $dy \sqcap 1b + 2cx + 3dx^2$ etc. $TB \sqcap t$. et $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta 1}{dy}$. Ergo $t \sqcap \beta \frac{bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.}}{1b + 2cx + 3dx^2 \text{ [etc.]}} \sqcap \frac{y}{d\bar{y}}$. Quaeritur curva in qua: BP sit $\sqrt{a^2 - x^2}$. Sit curva haec: seu $y \sqcap bx + cx^2$ etc. Habemus t ex hoc dato, ut et $d\bar{y}$. Dividamus per y^2, fiet: $\frac{1}{d\bar{y}y} \sqcap BP$ at idem $BP \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$ ergo $a^2 - x^2, d\bar{y}^2 y^2$

4 f. constans, | Ecce circulus inversus *gestr.* | $r^2 + y^2 \sqcap L$ 15 omnium *(1)* curvarum exp *(2)* ordinatarum L

21 $\frac{1}{d\bar{y}y} \sqcap BP$: Richtig wäre $BP = ydy$ $(dx = 1)$.

$\sqcap 1$ seu $y^2 \sqcap \frac{1}{a^2 - x^2, d\overline{y}^2}$ vel $y^2 d\overline{y}^2 \sqcap \frac{1}{a^2 - x^2}$. Dividatur per $a^2 - x^2$, habebitur series infinita aequalis priori; in qua valores y quadrat⟨i⟩ ducuntur in valorem $d\overline{y}$ quadratum. Finiatur alicubi, et aequationis instituendae causa, ut possit manere x. Comparentur termini terminis, ita literae *b. c. d.* etc. invenientur, quod quaerebatur.



[*Fig. 8*]

Videtur methodus Huddenii adhuc brevior Slusiana, ad tangentem vel perpendicularem facile una incognita tantum inveniendam, cum Slusiana relinquat duas: Sit $TB \sqcap t$. $A1B \sqcap x$. $TA \sqcap \theta$. $AD \sqcap \lambda$. $TB \sqcap \theta + x$. $1B1C \sqcap y$. $\frac{y}{\theta + x} \sqcap \frac{\lambda}{\theta}$. erit $y \sqcap \frac{\lambda\theta + \lambda x}{\theta} \sqcap \lambda + \frac{\lambda x}{\theta}$. Hic valor ipsius y substituendus ubique in aequatione data determinanda ad duas radices aequales ut inveniantur λ. et θ. Hoc in omnibus succedit, sed inprimis est aptum infinitis rationalibus ut in aeq. $y \sqcap bx + cx^2 + dx^3$ etc. scribetur:

$$\begin{array}{rrrrr} \lambda \sqcap - & \frac{\lambda}{\theta} & x + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} & & \\ + & b & . & & \\ 0 & \langle 1 \rangle & 2 & 3 & \end{array}$$

sive $\frac{\lambda}{\theta} \sqcap 1b + 2cx + 3dx^2$ etc. Pro $\frac{\lambda}{\theta}$ sufficit scribi γ. est differentia ipsius ordinatae.

Hinc generalis calculus pro invenienda differentia:

$y \sqcap \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc. } \mathfrak{D}}{f + gx + hx^2 + lx^3 \sqcap \odot} \sqcap \lambda + \frac{\lambda}{\theta} x$ unde fiet:

2 ducitur *L ändert Hrsg.* 6 facile *(1)* | sine *streicht Hrsg.* | ulla *(2)* una *L* 13 rationalibus *erg. L*

8 f. $TA \sqcap \theta$. $AD \sqcap \lambda$: Leibniz verwendet θ und λ zusätzlich zu den in Fig. 8 eingezeichneten Größen auch für TA und AD. Wegen $\frac{AD}{TA} = \frac{\lambda}{\theta}$ (λ und θ wie in der Figur markiert) ist die folgende Rechnung dennoch korrekt.

$$\begin{array}{r|l} +a & +b\ \textcircled{x} + c\ \textcircled{x^2} + d\ \textcircled{x^3} - \frac{l\lambda}{\theta}\ \textcircled{x^4} \sqcap 0. \\ -f\lambda & -\frac{f\lambda}{\theta} \ . \ -\frac{g\lambda}{\theta} \ .. \ -\frac{h\lambda}{\theta} \ ... \\ & -g\lambda \ . \ -h\lambda \ .. \ -l\lambda \ ... \\ 0 & 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \\ & x^0 \qquad x^1 \qquad x^2 \qquad x^3 \end{array}$$

unde $\lambda \sqcap \dfrac{\begin{array}{cccc} 1\frown & +b\ 2\frown & +c\,x\ 3\frown & +d\,x^2 - 4\frac{l\lambda}{\theta}x^3 \\ -\frac{f\lambda}{\theta} & -\frac{g\lambda}{\theta} \ . & -\frac{h\lambda}{\theta} \ .. & \end{array}}{1g + 2hx + 3lx^2} \sqcap \begin{array}{c} \mathfrak{D} \\ \overline{\odot} \\ \bigvee \\ y - \frac{\lambda}{\theta}x \end{array}$. Fiet $\mathfrak{D}$ determinata ad 2 radices sit signum $\overline{\mathfrak{D}}$ et $\odot$ determ. sit sign. $\overline{\odot}$. $\dfrac{\overline{\mathfrak{D}} - \overline{\odot}x\frac{\lambda}{\theta}}{\overline{\odot}} \sqcap \lambda \sqcap \dfrac{\mathfrak{D}}{\odot} - \dfrac{\lambda}{\theta}x$. unde $\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{D}}}{\overline{\odot}} - \dfrac{\mathfrak{D}}{\odot}}{\overline{\odot}x - x} \sqcap \dfrac{\lambda}{\theta}$ unde patet quomodo per regressum invenienda $\dfrac{\mathfrak{D}}{\odot}$ ex data $\dfrac{\lambda}{\theta}$, aut exacte, aut quando id rationaliter fieri non potest, per seriem infinitam, appropinquantem quantumlibet.

Aequationes notabiles: $a + bx + cx^2 + dx^3$ etc. $\sqcap$ $\mathfrak{D}$ determinata ad duas radices aequales dat: $b + 2cx + 3dx^2$ etc. $\sqcap \overline{\mathfrak{D}}$. Ducatur hoc in illud fiet $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{D}}$. Ajo $\int \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{D}}$ id est $\int \overline{\mathfrak{D}\,d\,\mathfrak{D}} \sqcap \dfrac{\mathfrak{D}^2}{2}$. Itaque

$$\left.\begin{array}{rl} & a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \\ \text{per} & b + 2cx + 3dx^2 \text{ etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left.\begin{array}{rl} & a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \\ \text{per} & a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \end{array}\right\} \smile 2$$

prorsus ut x in 1+2+3+4+5+6 etc. $\sqcap \dfrac{x^2}{2}$. Eodem modo puto esse $a+bx+cx^2+dx^3$ etc. in

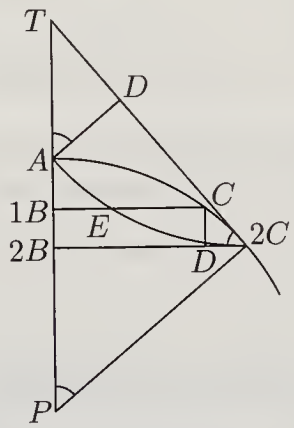
6 f. ad 2 radices *erg. L*

---

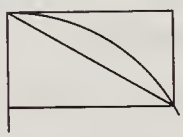
7 $\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{D}}}{\overline{\odot}} - \dfrac{\mathfrak{D}}{\odot}}{\overline{\odot}x - x}$: Im Nenner müsste es $\dfrac{\overline{\odot}x}{\overline{\odot}} - x$ heißen. 15 puto esse: Die anschließende Behauptung ist nicht zutreffend.

$b+3cx+6[d]x^2+10[e]x^3$, ⊓ $\frac{\overline{a+bx+cx^2+dx^3}\,\boxed{3}}{3}$ imo ista diligentius excutienda. Est hoc determinatio ad tres radices aequales. Eadem res videtur redire debere, si $b+2cx+3dx^2$ etc. rursus multiplicetur per 0. 1. 2. 3. 4. etc. fiet $2c+6dx+12$ etc. Horum dimidium dat numeros triangulares: $1c+3dx+6$ ... etc. Videndum quomodo id possit conciliari cum directa multiplicatione per 0. 1. 3. 6. quia initio multiplicari potest: $a+bx+cx^2$ etc. Plura ex his satis mira duci possint. Videndum et si radices non sint aequales, sed differentiam habeant certam, quid fiat. Item reciproce, qualesnam sint illae aequationes, et ad quid determinentur si multiplicata ordine per numeros quadratos, debeant manere nihilo aequales. Aliaque id genus quae quaeri possint infinita.

[*Teil 4*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

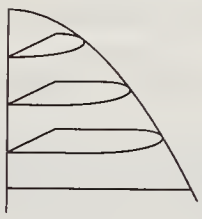
Sit v.g. AD ⊓ $A1B$ quaeritur curva AB ⊓ x. CD ⊓ $d\overline{x}$. $D2C$ ⊓ $d\overline{y}$. $\frac{T1B}{1B1C}$ ⊓ y ⊓ $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}$. et $T1B$ ⊓ t ⊓ $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}y$. TA ⊓ $t-x$ ⊓ $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}y-x$. $\frac{AD}{TA}$ ⊓ $\frac{\sqrt{d\overline{x}^2+d\overline{y}^2}}{d\overline{y}}$. et AD ⊓ $\frac{\sqrt{d\overline{x}^2+d\overline{y}^2}}{d\overline{y}}$, ⌢

13 $\frac{AD}{TA}$ ⊓: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ stehen. Leibniz rechnet mit dem falschen Ausdruck konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt.

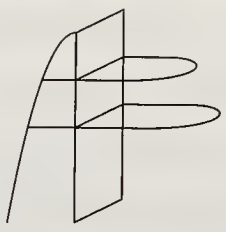
$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}y - x \sqcap x$. Unde: $\frac{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}d\bar{x}y - \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}d\bar{y}x}{d\bar{y}^2} \sqcap x$. Quaeritur relatio inter x. et y. ex hac aequatione: constat eam esse ad Circulum. Sed hoc nisi nossemus non facile devinaremus. $d\bar{x}y - d\bar{y}x \sqcap \frac{xd\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. Ergo $\underbrace{\int \overline{d\bar{x}y} - \int \overline{d\bar{y}x}} \sqcap \int \overline{\frac{xd\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}}$.

id est duplum segmentum

Si generalis reddi posset doctrina, quod indicum additio exhibeat summam facti serierum, praeclare ista omnia possent solvi. Non video quomodo possit reperiri curva, quae det indices, ut Logarithmica exponentes. Exempli causa satis videmus indicem quantitatis $\sqrt[2]{ax}$ esse $\frac{1}{2}$. Sed indicem quantitatis $\sqrt{ax + a^2}$ quomodo exhibebimus? Eum vero scimus dari ex supposita circuli Quadratura. Quod si ergo generaliter demonstrari posset Indices ejusmodi esse veras quantitates exprimibiles utcunque, aut motu aliquo descriptibiles; et Tetragonismos ipsis esse proportionales, vicissemus. Imo indices ejusmodi sunt etiam pro affectis, ut si dicamus: $x^2 + bx \sqcap y^2$. erit $x \sqcap \boxed{e}\overline{b.c.y}$. Itaque ejusmodi problemata methodi tangentium inversae redirent ad indices.



[*Fig. 11a*]



[*Fig. 11b*]

Area ductuum exprimeretur summa indicum: Certum est experimento et demonstratione id succedere in curvis Analyticis simplicibus: Si jam ostendi posset ex generali omnium ordinatarum per series infinitas expressione, eas quodammodo revocari posse ad analyticas, res foret manifesta. Sed res vel ideo difficilis, quia id quod indicem dicimus

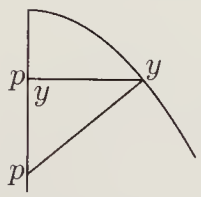
3 $\sqcap \frac{\mathrm{xd\bar{y}^2}}{\sqrt{\mathrm{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}}$. *(1)* Est autem differentia inter $\mathrm{d\bar{x}y}$ et $\mathrm{d\bar{y}x}$. idem qvod duplum segmentum, seu idem qvod AC2CEA. *(a)* qvod est ad $\mathrm{xd\bar{y}}$ *(b)* id vero est ad *(2)* Ergo *L* 7 qvomodo *(1)* aliqva curva *(2)* exhibebimus *L* 9 esse *(1)* realia *(2)* veras *L* 14 f. et demonstratione *erg. L* 15 simplicibus: *(1)* | jam *streicht Hrsg.* | qvaelibet curva Analytica *(2)* Si | jam *erg.* | ostendi *L*

determinandum paulo strictius. et ista e, alia atque alia erit pro varie assumtis b. c. y. Substituatur ubique in locum ipsius x, valor assumtus: $\boxed{e}\overline{b.c.y}$ et fiet: $\boxed{2e}\overline{b.c.y} + [b]\boxed{e}\overline{b.c.y} \sqcap y^2$ in assumto ipsius y. valore. Non potuit credo omitti y. et assumi tantum b verbi gratia nam sic potuissemus b sumere pro unitate, et evanesceret etiam e, seu fieret 1. Dubito tamen adhuc ea de re, interim videndum si sit: $b^e + b^{2e}c + b^{3e}d + b^{4e}f$ etc. $\sqcap$ g. possitne generali aliquo calculo inveniri e. $g - b^e \sqcap b^e$. dabit $e \sqcap \frac{g - b^e}{1} - \frac{g^2 - 2gb^e + b^{2e}}{2b^1} + \frac{g^3 - 3g^2, b^e + 3g, b^{2e} - b^3}{3b^2}$ etc. posito esse e, logarithmum a b. supposita aliqua certa unitate (unde cessat difficultas paulo ante mota). Rursus $g - b^{2e}c \sqcap b^e c$. seu $\frac{g}{c} - b^{2e} \sqcap b^{2e}$. eadem prodibunt quae ante, pro valore ipsius e, tantum pro g scribetur $\frac{g}{c}$, et pro b^e, scribetur b^{2e}; et ita de caeteris, omnibus. Quod si jam omnes illi valores addantur, vel sibi adimantur, utique semper innumerae novae aequationes habebuntur infinitae, non tamen ideo video me $\underline{e}$ habere pure. Caeterum ex hac sola consideratione infinitis modis habebitur $\underline{e}$. adeoque et x. et ipsarum b. c. e. relatio. Sed nondum satis simplex haec methodus. Aliud interim index quam logarithmus.

Caeterum hinc praeclarae de indicibus inveniendis habebuntur rationes ex ductuum areis. ex. g. $\int \overline{\sqrt{a+x} \text{ in } \sqrt{x}}$ aequale $\overline{e + \frac{1}{2}x}$. si $\boxed{e}x \sqcap \overline{a+x}$. Tantum videndum an haec ratiocinatio sit pro totis velut pro partibus arearum; ergo hinc inveniri potest index ω, si sit $\boxed{\omega}x \sqcap \sqrt{a-x}$ id est ex dato indice e, datur index ω. quia $\int \overline{\sqrt{a+x} \text{ in } \sqrt{x}}$, datur ex $\int \overline{\sqrt{a+x} \text{ in } \sqrt{a-x}}$, utraque enim est ad circulum. Re semel generaliter stabilita infinita hinc haberi poterunt nova. Videndum an indicum natura in eo consistat, ut eorum ope explicatio fieri possit, ut in numeris combinatoriis, ut si sit $\boxed{4}x$. ponendo $x \sqcap y + b$. fiet $\boxed{4}x \sqcap y^4 + 4y^3b + 6y^2b^2 + 4yb^3 + b^4$. Quaeritur, quomodo id fiat sit $\boxed{\frac{1}{2}}x$. id est $\sqrt{x}$ item si sit $\boxed{e}x$. Est aliqua haud dubie in numeris combinatoriis proprietas, quae generalis reddi possit.

Caeterum stabilitis indicibus pulcherrime habebitur methodus tangentium inversa. Pone enim in aequatione: esse $\int \overline{d\bar{x}y} - \int \overline{d\bar{y}x} \sqcap \int \frac{[x]d\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. Jam $\int \overline{d\bar{x}y}$ est area figurae, seu omnium y ad axem applicatorum. Sit index $\boxed{e}$, $\int \overline{d\bar{x}y} \sqcap x^e$ ordinata scil. Curvae quadratricis, quae si subtrahatur a rectangulo yx, fiet $\int \overline{d\bar{y}x}$. Ergo $2, x^e - xy$ ($\sqcap \int \overline{d\bar{x}y} -$

$\int \overline{d\bar{y}x}) \sqcap \int \frac{\overline{xd\bar{y}^2}}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. Ponamus esse $y \sqcap x^\omega$. fiet $\int \overline{d\bar{y}} \sqcap x^\omega$. et $\int \overline{d\bar{y}^2} \sqcap x^{2\omega}$. Ponamus esse x. progressionis arithmeticae, fiet: index ab x. erit 1. puto et dx erit constans. His positis tantum ex priori ω. facile habetur $\int xd\bar{y}^2$, quia $d\bar{y}^2$ index, est solum 2ω. si index a $d\bar{y}$ est ω. Superest, ut inveniamus indicem $\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}$. Sed hoc satis difficile, ut autem res in talibus procedat melius generali indicum contemplatione demonstrata, opus erit varias postea aequationes generales ex natura curvae in genere ductas adjicere, ut relationes ad varios axes etc.



[*Fig. 12*]

Si esset $p \sqcap x^\omega$. et $y \sqcap x^e$. sitque ω. cognita, e, incognita. constat esse $\int p \sqcap \frac{y^2}{2}$. et erit $\left[\frac{1}{2}\right] x^{2e} \sqcap \int \overline{x^\omega}$. Haec omnia sunt examinanda diligentius. Huc illud pertinet si sit $c^e \sqcap x$. seu si e. logarithmus, valor logarithmi erit puto: $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{3c^2} - \frac{x^4}{4c^3}$ etc. $\sqcap e$. Logarithmus

---

1–3 *Am Rande:*

8–10 *Am Rande, ohne eindeutigen Bezug zum Text:*

16 *Zur Lesart:* $\mathfrak{Y}$

1 $\sqcap \int \frac{\overline{\mathrm{xd\bar{y}^2}}}{\sqrt{\mathrm{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}}$. *(1)* | est autem: *streicht Hrsg.* | index de de y *(2)* ponamus *L* 2 puto *erg. L*

10 f. logarithmus, *(1)* | c. *streicht Hrsg.* | unitas *(2)*, valor *L*

---

1 fiet: Der folgende Schluss von $\int dy$ auf $\int (dy)^2$ ist nicht zulässig.

ipsius x^2. erit $\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2c} + \frac{x^6}{3c^2} - \frac{x^8}{4c^3}$ etc. ⊓ $2e$. Unde illud admirabile. Posterius esse duplum. Multiplicatio et divisio numerorum fit additione et subtractione Logarithmorum; involutio et extractio Numerorum fit multiplicatione logarithmorum. Quaeritur quid fiat in numeris ductu logarithmi in se ipsum aut extractione radicis Logarithmi, ac denique quid fiat in logarithmis additione numerorum cogitandum posse fieri logarithmos logarithmorum in infinitum. Itaque si logarithmi logarithmorum v.g. duplicentur habebitur potestas. Imo videndum quid sint medii inter logarithmos et numeros. Si summis duplis etiam differentiae duplae, ergo $-x + x^2 - x^3$ etc. dimidium ⟨ip⟩sius: $-x^3 + x^5 - x^7$ etc. Sed hoc falsum.

2 et divisio *erg. L* 2 et subtractione *erg. L* 6 si *(1)* addantur *(2)* logarithmi *L*
6 f. habebitur *(1)* indicis *(2)* potestas *L*

89. DE SUMMIS PER CALCULUM INVERSUM EX DIFFERENTIIS, DEQUE METHODO TANGENTIUM INVERSA; ET QUADRATURAE CIRCULI IMPOSSIBILITATE

Juli 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 448. 1 Bl. 2°. 2 S. Auf Bl. 448 v° verworfene Notiz, tlw. gestrichen bzw. vom Haupttext überschrieben (= S. 597 Z. 14–17).
Cc 2, Nr. 1482

Jul. 1676.

De summis per calculum inversum ex differentiis, deque Methodo tangentium inversa; et quad. Circ. im⟨pos⟩sibilitate.

$$y \sqcap \frac{b+cx}{m+nx}.\ d\overline{y} \sqcap \dagger\frac{b+cx}{m+nx} \dagger \frac{b+cx+c\beta}{m+nx+n\beta} \sqcap \frac{\dagger\overline{b+cx}\,n\beta \dagger \overline{m+nx}\,c\beta}{\boxed{2}\overline{m+nx}}.$$

$$d\overline{y} \sqcap \dagger\frac{b+cx+ex^2}{m+nx+px^2} \dagger \frac{\begin{matrix} b+cx & +ex^2 \\ +c\beta & +e2x\beta \\ \boxed{+e\beta^2} & \end{matrix}}{\begin{matrix} m+nx+ & px^2 \\ n\beta & p2x\beta \\ & \boxed{p\beta^2} \end{matrix}}$$

$$[\sqcap]\ \frac{\dagger\overline{b+cx+ex^2}, n\beta+2p\beta x,, \dagger\overline{m+nx+px^2}, c\beta+2e\langle x\beta\rangle}{\boxed{2}\overline{m+nx+px^2}}$$

Hinc jam apparet regula generalis:

$$\mathrm{☿}\ y \sqcap \frac{D[\sqcap]b+cx+ex^2+fx^3+gx^4}{E[\sqcap]m+nx+px^2+qx^3+rx^4}.\ \text{Erit}$$

$$\odot\ \frac{d\overline{y}}{\beta} \sqcap \frac{\begin{matrix} \dagger\overline{b+cx+ex^2+fx^3+gx^4}, & \overline{n+2px+3qx^2+4rx^3},, \\ \dagger\overline{c+2ex+3fx^2+4gx^3}, & \overline{m+nx+px^2+qx^3+rx^4} \end{matrix}}{\boxed{2}\overline{m+nx+px^2+qx^3+rx^4}}\ [\sqcap]\ \frac{F}{G}$$

9–11 De *(1)* Me *(2)* summis ... im⟨pos⟩sibilitate. *erg. L* 16 f. $+qx^3+px^4$ *L ändert Hrsg. dreimal* 17 $+3qx^2+4px^3$ *L ändert Hrsg.*

Idem aliter investigemus ope methodi ordinariae:
$ym + nxy + px^2y \sqcap b + cx + ex^2$. Determinando ad tangentes:
$ym + nxy + px^2y \sqcap ct + 2etx - nty - 2pxty$. Ergo $\frac{y}{t} \sqcap \frac{c + 2ex, -ny - 2pxy}{m + nx + px^2} \sqcap \frac{d\overline{y}}{\beta}$.
Prodibunt quae ante.

Sit jam formula data: $\mathfrak{D}\, z \sqcap \frac{(A)\, s + tx + vx^2}{(B)\, \theta + \lambda x + \mu x^2} \sqcap d\overline{y}$. Quaeritur y.

Ante omnia autem ut haec formula z in aeq. $\mathfrak{D}$ formulae $d\overline{y}$ in aeq. $\odot$ comparetur opus est ut B multiplicando reddatur quadratus, nimirum vel jam per quadratum divisibilis est B, et tunc reliquum tantum adhuc semel in se multiplicandum ($\omega^2 v$ in v) vel si non est: ipse B. multiplicandus in se; scilicet tam numerator quam nominator per eundem, ut fiat nominator quadratus. Porro idem infinitis modis fieri potest ut fiat nominator quadratus, semper altiores atque altiores formulas adhibendo in quas tam numerator quam nominator ducatur. Proba elegans Calculi hic habetur, formula per quam multiplicatur tam numerator quam nominator, est integer utique.

Hinc aequatio $zB \frown F \sqcap \mathfrak{D}F$ (posito F esse multiplicatorem qui facit ut BF sit quadratus). Ergo sequitur vel esse $zB \sqcap \mathfrak{D}$, vel esse $F \sqcap 0$. Videndum an hinc etiam inventa y signo $\mathfrak{P}$ tam nominator quam numerator dividi possit per F vel per $\int \overline{F}$, vel aliud quiddam, necesse est enim F influere. Hoc enim posito si semper posset dividi etiam D et E cum dividi potest $F.G.$ vel cum $A.B.$ multiplicata est; tunc ponamus divisionem omnem in $D.E.$ jam esse factam, seu reducta esse ad terminos minimos; non poterit $F.G.$ amplius dividi; e⟨r⟩go necesse est ut comparatio cum $\frac{A}{B}$. institui possit sine ulla multiplicatione. Ergo jam haberemus pro certo, nullius figurae rationalis summam haberi posse, nisi nominator sit quadratus, et statim praeterea sciri poterit quousque assurgat figura summatrix, adeoque facile erit instituere comparationes.

Hoc semel posito admiranda sequerentur compendia in methodo tangentium inversa; eaque tam certa ac determinata foret quam directa, determinato quippe semper gradu,

11 tam | nominator *ändert Hrsg.* | qvam *L* 13 f. utiqve. *(1)* Hinc $d\overline{y}$ | seu z *erg.* | duos habet valores unum integrum per qvem facta est multiplicatio, alterum fractum, qvi fuit multiplicatus, patet ex aeqvatione qvae hoc modo duas habebit radices unam *(2)* Hinc *L*

14 $zB \frown F \sqcap \mathfrak{D}F$: Leibniz verwechselt A und $\mathfrak{D}$; es müsste AF und in der folgenden Gleichung $zB \sqcap A$ heißen. Das Versehen hat keine weiteren Auswirkungen.

cum quo comparandum. Certum est impossibile esse ut fractus sit summator integrorum, vel integer fractorum. Examinandum an possibile sit, ut indivisibilis sit summator divisibilium, nec video quomodo id fieri possit.

$d\overline{y} \sqcap \dfrac{\text{ǂ}D, d\overline{E} \text{ ǂ } Ed\overline{D} \sqcap F}{E^2 \sqcap G}$. posita $y \sqcap \dfrac{D}{E}$. sive erit $d\overline{y} \sqcap \text{ǂ}\dfrac{Dd\overline{E}}{E^2} \text{ ǂ } \dfrac{d\overline{D}}{E}$. Si $d\overline{y}$ deprimi potest necesse est aliquo divisore ipsius E, dividi posse D vel $d\overline{E}$ vel $d\overline{D}$ vel aliquo divisore ipsius E^2; dividi potest $Dd\overline{E}$, item $Ed\overline{D}$, si divisor ipsius E^2 sit non-quadratus, nec divisibilis per quadratum, imo primus. Tunc cum eo dividi possit E adeoque et ED, necesse est per eum et dividi posse $Dd\overline{E}$. Ergo dividet vel $d\overline{E}$ vel D cum sit primus; non dividet $d\overline{E}$, quia dividit E. Puto autem E, et $d\overline{E}$ non posse habere divisorem communem. Quo semel demonstrato, ut fieri posse puto, sequeretur dividere D. Ergo si F. et G. habent divisorem communem primum, etiam D. et E. habebunt contra hypothesin, posuimus enim ad simplicissimos reducta.

Ut autem demonstretur ipsas E et $d\overline{E}$ non habere divisorem communem tantum demonstrandum est: $a + bx + cx^2 + dx^3$ etc. et $1b + 2cx + 3dx^3$ [etc.] non habere posse communem divisorem utcunque explicentur *b. c. d.* etc. Quod vel hinc videtur probari posse quia $d\overline{E}$ eadem futura est, qualiscunque sit litera a, sed nondum hoc satis clare. Si posset fieri multiplicatio fieret

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
 & & 1b & + & 2cx & + & 3dx^2 & & +dx^3 & +cx^2 & + & bx & + & a & \text{ƒ}\frac{1}{3}x & \boxed{+c} & + & \frac{1}{3}c \\
 & & & & f & + & gx & & \boxed{3dx^2} & +2cx & + & 1b & & & & \boxed{-\frac{2}{3}c} & & \\
\hline
 & + & 1bgx & + & 2cgx^2 & [+] & 3dgx^3 & & -\frac{3}{3}dx^3 & -\frac{2}{3}cx^2 & - & \frac{1}{3}bx & & & & & & \\
+1fb & + & 2cfx & + & 3fdx^2 & & & & & \boxed{3dx^2} & + & 2cx & + & 1b & & & & \\
\hline
a & + & bx & + & cx^2 & + & dx^3 & & & -\frac{1}{3}cx^2 & - & \frac{2}{3}bx & - & \frac{1}{3}b & & & &
\end{array}
$$

4–12 *Nebenbetrachtung, durch Strich abgetrennt:* $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2 + 2\beta y \boxed{+\beta^2}} \sqcap \dfrac{2\beta y}{y^4} \sqcap \dfrac{2\beta}{y^3}$

7 imo primus *erg. L* 16 litera a, *(1)* imo etsi absit; omittamus ergo; nam adeo *(2)* sed *L*

18–22 Bei der Division unterläuft Leibniz ein Rechenfehler, der in die folgende Bestimmung von a und b eingeht, die weitere Überlegung aber nicht beeinträchtigt.

Ergo $g \sqcap \frac{1}{3}$ et $f \sqcap \frac{a}{b}$. Ergo debet esse $a \sqcap \frac{1}{3}b$. $b \sqcap c^2$. Atque ita in infinitum poterit determinari quando possint habere divisorem communem; habebitur enim progressio satis elegans. Si longior assumatur formula et per eam dividatur. Sed hinc jam illud saltem necessario colligitur; E et $d\overline{E}$ non posse habere divisorem commune⟨m⟩ nisi simplicissimum, eumque unicum seu semel. Itaque si data sit formula $d\overline{y}$ vel $\frac{A}{B}$ non potest A et B, nisi per formulam simplicem, ut $gx + f$. ad complendum quadratum ipsius B. vel si jam B. quadratus est, $\boxed{2}\overline{gx+f}$, multiplicari. Habemus ergo pulcherrime determinatam hic methodum Tangentium inversam. Nec dubito quin idem se extendat in genere ad alias omnes ejusmodi comparationes methodi tangentium inversae. Quodsi autem nulla extet in rerum natura curva Analytica aequabilis quae satisfaciat quaestioni; quaerenda erit aliqua forte ex data Circuli quadratura quae satisfaciat, quod semper fieri posse video hoc modo pulcherrime: Sit valor datus hic:

$$y \sqcap \frac{D \sqcap a + bx + cx^2,, + h\pi + l\pi^2 + k\pi^3}{E \sqcap m + nx + px^2}$$ ubi quia $d\overline{\pi} \sqcap \frac{1}{1+x^2}$. posito π arcu circulari. Ideo $d\overline{y}$. nullam continebit π cum non sit π in nominatore. Et

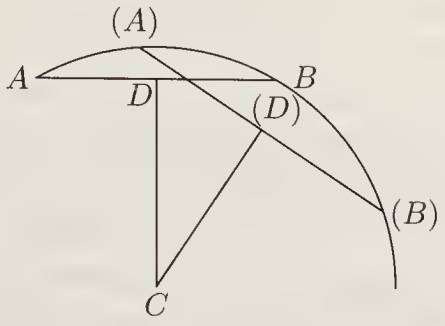
$$d\overline{y} \sqcap \frac{\dagger Dd\overline{E} \dagger Ed\overline{D}}{E^2} \sqcap \frac{\dagger[E], b + 2cx,, + hd\overline{\pi} + 2l\pi d\overline{\pi} + 3k\pi^2 d\overline{\pi},, \dagger Dd\overline{E}}{\boxed{2}, m + n[x + px^2]}$$

Quaerenda etiam generalis ratio curvarum analyticarum quarum quadratura pendet ex Quadratura Circuli. Caeterum ab his veniemus et ad series numerorum, ubi nihil quidem destruendum, ⟨et⟩ quaeremus sintne numeri in natura rerum, qui possint exhibere Circuli Quadraturam, seu $\int \overline{\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}}$ etc. Ubi ante omnia quemadmodum in his quoque inquirendum an possibile sit summam esse irrationale⟨m⟩. Videndum an quandocunque arcus ductu rectae geometricae, cujus ratio ad radium nota est, determinari potest, an possit reperiri saltem in aequatione aliqua altiore ejus ratio ad circumferentiam. Non puto.

Utilis Methodus Tangentium inversa, etiam in inveniendas Curvas, quae proprietates quasdam habeant duobus punctis pluribusque quibuscunque assumtis semper veras, ut

13 $\frac{x}{1+x^2}$ *L ändert Hrsg.* 25–597,1 ut *(1)* in Circulo *(2)* figuram *(3)* invenire *L*

14 nullam continebit: Wie die anschließende Berechnung von *dy* zeigt, bleiben im Zähler Terme mit π erhalten.



[*Fig. 1*]

invenire curvam $A(A)B(B)$ talis naturae, ut junctis $AB_{[,]}(A)(B)$, et bisectis in $D.$ (D) ducta⟨s⟩ inde perpendiculares omnes conveniant in centro eodem $C.$ Quaeritur an talis curva sit in rerum natura; ponantur primum intervalla $AB.$ infinite parva, seu tangentium portiones, res ergo eo redit curvam invenire ad quam perpendiculares omnes concurrant in uno centro. Haec curva per methodum tangentium inversam inventa si pateat eam (in plano) non esse nisi unicam, videndum est an ea simul habeat proprietatem de qua agitur, ut idem eveniat etiamsi puncta $A.$ $B.$ distent notabiliter; nam si non praestitisset, conclusissemus talem curvam esse impossibilem.

[*Notiz, verworfen*]

y^6 $*$ py^4 qy^3 ...

z^{30} z^{24} z^{18} etc. $z^6 \sqcap v$ $z \sqcap \sqrt[6]{v}$

v^5 v^4 v^3 etc. $v \sqcap$ ...

y^9 y^8 y^6 z ◯ □

14 *Darüber:* ✕

90. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
Juli 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 10 Bl. 3. 1 Ausschnitt von ca 20,7 x 13,7 cm. 2 S. Am rechten oberen Rand von Bl. 3 r° gestrichenes Fragment einer Notiz: „$\langle\text{—}\rangle_{v} \sqcap \frac{\langle\text{—}\rangle}{\boxed{3}\overline{z^2+1}}$. *AE* ⊓ *z*. *EF* ⊓ *v*.“ Ursprünglich bildete das Blatt zusammen mit N. 91, 92 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2°. — Gedr.: 1. *LBG*, 1899, S. 201–203; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 118–122.
Cc 2, Nr. 1483 A

Jul. 1676.

Methodus tangentium inversa

In Tertio Tomo literarum Cartesii video eum credidisse methodum Fermatii de maximis et minimis non esse universalem. Putat enim (pag. 362. epist. 65.) non servire ad inveniendam tangentem curvae, cujus natura sit ut ex quovis puncto ejus ductae rectae ad quatuor puncta data aequentur rectae datae.

Mons. des Cartes lettre 71. partie 3 pag. 409. à Mons. de Beaune. *Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver generalement la Converse de ma regle pour les Touchantes, ny de celle dont se sert Mons. de Fermat, bien que la practique y soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne, mais on en peut deduire a posteriori des theoremes qui s'etendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par une equation en la quelle*

---

9 *Darunter:* Solvi una die duo problemata methodi tangentium inversae, quorum alterum solus solvit Cartesius; alterum ne ipse quidem fassus non posse.

9 Jul. 1676. *erg. L* 10 Methodus ... inversa *erg. L* 13 inveniendam *(1)* curvam *(2)* tangentem curvae, cuius *(a)* aeqvatio est *(b)* natura *L* 21 alterum *(1)* | nec *streicht Hrsg.* | ipse potuit *(2)* solus *L*

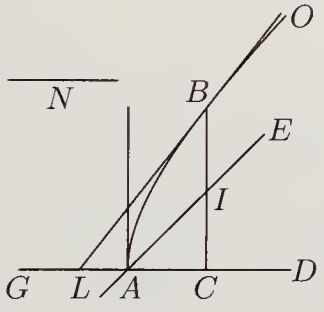
---

12 Putat: Descartes an Mersenne, 23. August 1638, in: DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 362 (*DO* II S. 324). 15 des Cartes: Descartes an Debeaune, 20. Februar 1639, *a. a. O.*, S. 411 f. (*DO* II S. 514). 20 duo problemata: s. die Erläuterungen zu S. 602 Z. 2 f.

l'une des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions encor que l'autre en eust mille. Il y a bien une autre façon qui est plus generale et a priori, a sçavoir par l'intersection de deux tangentes la quelle se doit tousiours faire entre les deux points où elles touchent la courbe, tant proches qu'on les puisse imaginer, car en considerant quelle doit estre cette courbe, àfin que cette intersection se fasse tousiours entre ces deux points, et non au deça ny au dela, on en peut trouver la construction; mais il y a tant de divers chemins à tenir, et je les ay si peu practiquez, que je n'en sçaurois encor faire un bon conte.

Mons. des Cartes parle avec un peu trop de presomtion de la posterité; il dit pag. 449. lettre 77, que sa regle pour resoudre generalement tous les problemes sursolides *a esté sans comparaison la [plus] difficile à trouver de toutes les choses qui ont esté inventées jusque à present en Geometrie et qui le sera peut estre encor cy apres en plusieurs siecles, si ce n'est que je prenne moy meme la peine d'en chercher d'autres* (+ comme si plusieurs siecles n'estoient capables de produire homme qui pût faire une chose qui ne paroist pas des plus considerables [+]).

Pag. 459 la question des quatre globes propre à examiner si un homme sçait le calcul, c'est donc de Mons. des Cartes, mais comme elle est dans le livre elle paroist bien prolixe.



[*Fig. 1*]

Probleme de la methode inverse des touchantes que Mons. des Cartes dit avoir resolu Tom. 3. Ep. lettre 79 pag. 460. EAD angulus 45 grad. ABO curva. BL tangens. BC ordinata ad CL, ut linea N ad BI. $CL \sqcap \frac{BC \sqcap y_{[,]} n}{BI \sqcap y - x}$. $CL \sqcap t$. $t \sqcap \frac{ny}{y-x}$. $\frac{n}{t} \sqcap \frac{y-x}{y} \sqcap 1 - \frac{x}{y}$. $\frac{x}{y} \sqcap \frac{t-n}{t}$. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$. Ergo $\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \frac{n}{y-x}$. $d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$. Ergo

5 entre | ceux *ändert Hrsg.* | points *L* 6 tout *L ändert Hrsg.* 18–20 qve ... 460 *erg. L*

9 dit: Descartes an Carcavy, 17. August 1649, *a. a. O.*, S. 449 (*DO* V S. 399). 16 question: Descartes an — (?), Juni (?) 1645, *a. a. O.*, S. 459 (*DO* IV S. 228). 19 dit: *a. a. O.*, S. 460 (*DO* IV S. 230). Dabei handelt es sich um eine leicht veränderte Wiederholung des sog. 2. Debeauneschen Problems (s. Erl. zu S. 600 Z. 4). 22 $t \sqcap \frac{ny}{y-x}$: Richtig wäre $\frac{y(y-x)}{n}$; Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 600 Z. 3.

$\int d\bar{x}y - \underbrace{\int \overline{xd\bar{x}}}_{\frac{x^2}{2}} \sqcap n \int d\bar{y}$. Porro $\int d\bar{y} \sqcap y$. $\int \overline{xd\bar{x}} \sqcap \frac{x^2}{2}$. et $\int \overline{d\bar{x}y}$ est area $ACBA$. et quaeritur curva, in qua Area $ABCA$ sit $\sqcap \frac{x^2}{2} + ny$ seu $\sqcap \frac{AC^2}{2} + n \frown BC$. Rescindatur ab area hoc $\frac{x^2}{2}$ id est triangulum ACI, debet reliquum $AIBA$ aequari rectangulo ny.

Linea quam Beaunius Cartesio quaerendam proposuit, quae huc redibat, ut sit BC asymptotos curvae, BA axis, A vertex, AB, BC constantes, nam BAC est ad angulos rectos. Sit ordinata RX, tangens XN, debetque esse RN semper constans seu aequalis ipsi BC, quaeritur natura curvae. Hic ita procedendum ego putem, sit alia ordinata PV, differens a priore RX recta SV, ducendo scilicet ipsi RN parallelam XS, erunt triangula SVX, et RXN similia. $RN \sqcap t \sqcap c$ constanti. $PR \sqcap SX \sqcap \beta \sqcap d\bar{x}$. $BR \sqcap x$. $RX \sqcap y$. $SV \sqcap d\bar{y}$. Fiet $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \sqcap \frac{y}{t \sqcap c}$. Ergo $cy \sqcap \int \overline{yd\bar{x}}$ sive $cd\bar{y} \sqcap yd\bar{x}$. Sit AQ vel $TR \sqcap z$. et sit $AC \sqcap f$. Cum fuerit $BC \sqcap a$ fiet $\frac{AC}{BC} \sqcap \frac{f}{a} \sqcap \frac{TR}{BR} \sqcap \frac{z}{x}$. Ergo $x \sqcap \frac{az}{f}$.

---

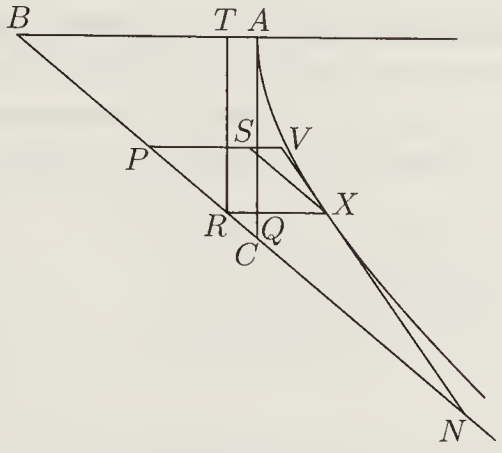
1 *Nebenbetrachtung:* $\int d\bar{x}y^2 - \int xyd\bar{x} \sqcap \underbrace{\int d\bar{y}yn}_{\frac{y^2}{2}n}$

$\int \overline{d\bar{x}yx} - \underbrace{\int x^2 d\bar{x}}_{\frac{x^3}{3}} \sqcap [\int]\, d\bar{y}nx$

2 AC^2 *L ändert Hrsg.* 8 ipsi | RX *ändert Hrsg.* | parallelam *L* 9 $\sqcap$ c constanti *erg. L*

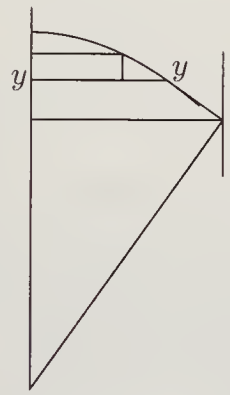
---

4 Linea ... proposuit: Die Aufgabenstellung zum 2. Debeauneschen Problem vom Spätsommer 1638 ist nicht erhalten, erschließt sich aber aus der Beilage zum Brief von Debeaune an Roberval vom 16. Oktober 1638 (*DO* V S. 519) als im Wesentlichen mit der in S. 599 Z. 21 formulierten Bedingung übereinstimmend. Descartes behandelt das Problem in seinem Brief an Debeaune vom 20. Februar 1639, DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–415 (*DO* II S. 514–517). Die dort geforderte Kurveneigenschaft, dass RN für alle Kurvenpunkte X konstant sein soll (s. Fig. 2 und Z. 6), ist äquivalent zur ursprünglichen Bedingung S. 599 Z. 21.



[*Fig. 2*]

Si $d\bar{x}$ constans erit et $d\bar{z}$. constans. Ergo $cd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f} y d\bar{z}$. vel $cy \sqcap \frac{a}{f} \int \overline{yd\bar{z}}$. $cyd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f} y^2 d\bar{z}$. ergo $c\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{a}{f} \int y^2 d\bar{z}$. Habetur ergo et area figurae et momentum quodammodo (addendum enim aliquid ob obliquitatem[)]. Et $czd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f} yzd\bar{z}$ ergo erit $c \int \overline{zd\bar{y}} \sqcap \frac{a}{f} \int \overline{yzd\bar{z}}$. $\frac{cd\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f} d\bar{z}$. Ergo $c \int \frac{d\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f} z$. Est autem ni fallor $\int \frac{d\bar{y}}{y}$ semper in potestate. Res tota eo redit ut inveniamus curvam in qua redeat ordinata, fiat differentiis ordinatarum per differentias abscissarum divisis ejusque figurae quadraturam:



[*Fig. 3*]

$d\sqrt{ay} \sqcap \frac{1}{[2]\sqrt{ay}}$. Quaerendae ejusmodi figurae quarum ordinatae: $\frac{d\bar{y}}{y}$. $\frac{d\bar{y}}{y^2}$. $\frac{d\bar{y}}{y^3}$, quemadmodum eas habeo quarum ordinatae $\sqcap \frac{1}{y} \quad \frac{1}{y^2} \quad \frac{1}{y^3}$ $yd\bar{y}$. $y^2 d\bar{y}$ etc. Quoniam $d\bar{y}$ potest intelligi constans $\sqcap \beta$. hinc curva in qua $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{d\bar{y}}{y}$ dabit $\omega y \sqcap a\beta$, quae foret hyperbola. Nam figura ergo in qua $\frac{d\bar{y}}{y} \sqcap z$. est hyperbola, quomodocunque explices y. at si y explices per φ^2, fiet $d\bar{y} \sqcap 2\varphi$ et $\frac{2\varphi}{\varphi^2} \sqcap \frac{2}{\varphi}$. Jam $[c] \int \frac{d\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f} z$. ergo $\frac{fc}{a} \int \frac{\overline{1}}{y} \sqcap z$. quae est ad logarithmicam.

---

12 f. *Daneben:* $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{d\bar{y}}{y}$

1 constans. *(1)* porro PS *(2)* Ergo *L* 9 per | abscissas *ändert Hrsg.* | divisis *L*

Ita solvimus omnia problemata methodi tangentium inversae quae extant in tomo 3. Epistolarum Cartesii quorum unum solvit ipse ut ait pag. 460. Epist. 79 Tom. 3. sed solutio non extat; alterum solvere tentavit, sed non potuit, fassus irregularem esse lineam et descriptione utendum esse, quae utique non est in humana potestate; imo nec angelica nisi aliunde constet ars describendi.

2 ut ... 3. *erg. L* 3 alterum *(1)* solvit *(2)* solvere *(a)* non *(b)* tentavit *L*

1–5 Ita ... describendi: vgl. *LQK* prop. XLVI S. 107. 2 unum: DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 460 (*DO* IV S. 229 f.). 3 alterum: vermutlich *a. a. O.*, S. 412–415 (*DO* II S. 514–517). Leibniz entgeht, dass es sich um alternative Fassungen der 2. Debeauneschen Aufgabe handelt.

91. SOLUTIO PROBLEMATIS CARTESII INVERSARUM
[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 226. 1 Ausschnitt von max. 20,8 x 4,7 cm. 11 Z. auf Bl. 226 r° und 10 Z. auf Bl. 226 v°. Auf Bl. 226 r° oben links Überschrift von N. 93 irrtümlich ergänzt und mit Strich abgetrennt. Bl. 226 bildete ursprünglich zusammen mit N. 90, 92 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1484

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach dem auf Juli 1676 datierten N. 90 und vor N. 92 und 93 auf dem Träger notiert.

Notabile quod $d\overline{\frac{x^2}{2}}$ semper $\sqcap$ $x\overline{dx}$. Et ita similia possunt fieri[,] aliquando enim ista erunt utilia, ut ad deprimendum, ut si sit $d\overline{\frac{x^2}{2}} \sqcap y\overline{xdx} + y\overline{dx}$. Inde fieri poterit $\overline{dx} \sqcap \overline{xydx} + \overline{ydx}$ seu $y \sqcap \frac{x}{x+1}$ sive $\frac{x^2}{2} \sqcap \int \overline{yxdx} + \int \overline{ydx}$ seu curva in qua momentum ex axe additum areae aequatur semiquadrato abscissae, quam figuram ope hujus artificii invenio esse hyperbolam.

Cartesii problema inversarum, a Beaunio propositum reducitur ad hanc: $\overline{dx}y - x\overline{dx} \overset{(1)}{\sqcap} \overline{dy}n$. seu summam sumendo: $\int \overline{ydx} - \boxed{\int \overline{xdx}}\frac{x^2}{2} \overset{(2)}{\sqcap} \boxed{\int \overline{dyn}}ny$. Multiplicando aeq. 1 per y. fit: rursus $y^2\overline{dx} - xy\overline{dx} \overset{(3)}{\sqcap} yn\overline{dy}$ seu $\int \overline{y^2dx} - \int \overline{xydx} \overset{(4)}{\sqcap} n\frac{y^2}{2}$. Rursus multiplicando 1 per x. fiet $yx\overline{dx} - x^2\overline{dx} \overset{(5)}{\sqcap} nx\overline{dy}$ et summamus $\int xy\overline{dx} - \frac{x^3}{3} \overset{(6)}{\sqcap} n\int x\overline{dy}$. Hinc jam video problema esse in potestate. Ope trium aequationum 2. 4. 6. reducuntur enim omnia ad tres incognitas[:] aream; momentum ex vertice, momentum ex basi, pro quibus tres habentur aequationes. Nam $\int \overline{y^2dx}$ est momentum ex AC. $\int \overline{xydx}$ est mo-

15 Cartesii ... propositum: s. N.90 S. 599 Z. 18 – S. 600 Z. 3. 21 momentum ex AC: s. N.90 Fig. 1 S. 599 Z. 23.

mentum ex vertice[,] $\int \overline{xd\overline{y}}$ est areae complementum[,] $\int \overline{xyd\overline{x}}$ bis habetur ex 4. et 6. Ergo $\frac{x^3}{3} + n\int \overline{xd\overline{y}} \overset{(7)}{\sqcap} \int \overline{y^2 d\overline{x}} - \frac{ny^2}{2}$. et $\int \overline{y^2 d\overline{x}} \overset{(8)}{\sqcap} \frac{x^3}{3} + n\int \overline{xd\overline{y}} + n\frac{y^2}{2}$. Jam $\int \overline{yd\overline{x}} \overset{(9)}{\sqcap} xy \dagger \int \overline{xd\overline{y}}$ (aliquando $\int \overline{yd\overline{x}} \sqcap \int \overline{xd\overline{y}}$). Pro $\int yd\overline{x}$ ponendo ejus valorem ex aeq. 2 fiet $+\frac{x^2}{2} + ny \overset{(10)}{\sqcap} xy \dagger \int \overline{xd\overline{y}}$. adeoque $n\int \overline{xd\overline{y}} \sqcap \dagger nxy \dagger \frac{nx^2}{2} \dagger n^2 y \sqcap \int \overline{xyd\overline{x}} - \frac{x^3}{3}$ et $\int \overline{xyd\overline{x}} \sqcap \dagger nxy \dagger \frac{nx^2}{2} \dagger n^2 y + \frac{x^3}{3} \sqcap n\int \overline{xd\overline{y}} + \frac{x^3}{3}$. Ut brevius agam res reducitur ad aequationes [duas] (nam ipsa 4 inutilis.) ubi prius compendii causa $\int \overline{yd\overline{x}}$ vocabo (12) an (ab area) $\int xd\overline{y}$ vocabo (13) cn a complemento et $\int \overline{xyd\overline{x}}$ vocabo (14) mn^2 a momento: Ex 2. fit: $na \overset{(15)}{\sqcap} ny + \frac{x^2}{2}$. et ex 6. fit $n^2 m - \frac{x^3}{3} \overset{(16)}{\sqcap} n^2 c$ denique ex generali natura curvarum fit: $xy \overset{(17)}{\sqcap} \ddagger na \ddagger nc$. Ergo $na \overset{(18)}{\sqcap} \dagger nc \ddagger xy$ et per 15 $n^2 c \overset{(19)}{\sqcap} \ddagger nxy \dagger n^2 y \dagger \frac{nx^2}{2}$. Sed jam video quod res est posse quidem hinc haberi valorem ipsorum, $m.\ n.\ a.$ etc. sed non posse ex his solis haberi aequationem in qua nulla harum extet. Videtur ergo adhuc una ejusmodi haberi posse aequatio: 15 multiplicetur per $d\overline{x}$ fit: $nad\overline{x} \overset{(20)}{\sqcap} nyd\overline{x} + \frac{x^2}{2} d\overline{x}$ et $n\int \overline{ad\overline{x}} \overset{(21)}{\sqcap} n\int \overline{yd\overline{x}} + \frac{x^3}{6}$. Est autem $\int ad\overline{x}$ seu summa summarum idem cum $\int \overline{xyd\overline{x}}$ (certis casibus) aliquo noto detracto vel addito[,] scribamus ergo $\int \overline{ad\overline{x}} \overset{(22)}{\sqcap} \int \overline{xyd\overline{x}} + pn^2$. Ergo $n\int \overline{xyd\overline{x}} \overset{(23)}{\sqcap} n\int \overline{yd\overline{x}} + \frac{x^3}{6} - pn^2$ seu $n^2 m \overset{(24)}{\sqcap} n^2 a + \frac{x^3}{6} - pn^2$. Ergo $n^2 a.$ substituendo valorem ex aeq. 15 fit $n^2 m \overset{(25)}{\sqcap} n^2 y + \frac{nx^2}{2} + \frac{x^3}{6} - pn^2$ quem valorem ipsius

2 $+\mathrm{n}\frac{\mathrm{y}^2}{2}$. *(1)* $\overset{(9)}{\sqcap}$ $\int \overline{\mathrm{xyd\overline{x}}} + \mathrm{n}\frac{\mathrm{y}^2}{2}$ redit aequatio prior 6. *(2)* jam *L* 5 f. res *(1)* ad duas *(2)* reducitur ad aeqvationes | has *gestr.* | (nam *L*

---

6 (12): Die Gleichungsnummerierung springt von (10) auf (12). 13 $\int \overline{xyd\overline{x}}$: Richtig wäre $-\int \overline{xyd\overline{x}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; das Versehen hat keinen Einfluss auf die allgemeine Überlegung. 14 $\int \overline{ad\overline{x}}$: Es müsste $n\int \overline{ad\overline{x}}$ lauten; Leibniz rechnet ab Gl. (24) wieder mit dem richtigen Vorfaktor weiter.

n^2m inserendo in aeq. 16 fit $n^2c \overset{(26)}{\sqcap} n^2y + \frac{nx^2}{2}\boxed{+\frac{x^3}{6}} - \frac{x^3}{\textcircled{3}6} - pn^2$. Quem valorem inserendo in aeq. 19. seu duos n^2c valores aequando fiet: $\ddagger nxy \dagger n^2y \dagger \frac{nx^2}{2} \sqcap n^2y + \frac{nx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - pn^2$. ubi p. continet in se x. et y. noto quodam modo et determinato (duplici forte aut triplici ex quibus eligendum) secundum naturam curvarum generalem. Solutum ergo a me est unius horae spatio problema, quod Geometras primarios frustra exercuit, et ipsi Cartesio difficillimum visum est.

5 qvod *(1)* doctissimos *(2)* Geometras *(a)* omnes frust *(b)* primarios *L*

5 Geometras primarios: Leibniz bezieht sich möglicherweise auf Descartes' Anspielungen auf Roberval, Fermat und Beaugrand in seinem Brief von Juni (?) 1645, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 460 (*DO* II S. 230).

92. VIA PROBANDAE IMPOSSIBILITATIS QUADRATURARUM
[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 6 Bl. 8. 1 Ausschnitt von max. 20,8 x 4,9 cm. 11 Z. auf Bl. 8 r°. Bl. 8 v° leer. Bl. 8 bildete ursprünglich mit N. 90, 91 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1247

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach N. 90, dat. Juli 1676, und N. 91 und vor N. 93 auf dem Träger notiert.

Via probandae impossibilitatis quadraturarum etiam singularum ut circuli totius. Si $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{99}$ etc. seu seriei $\frac{1}{y^2-1}$ (posito y certo modo) haberi non potest summa; nimirum enumerando determinari potest an summa haberi possit talium serierum, videndum an summa seriei rationalis semper rationalis. Hinc et ad caeteros casus dabitur progressus: ut $\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$. an haberi possit in numero posita x minore quam 1. vel r. Debebit enim etiam series ista esse alterius seriei analyticae exprimabilis differentia. Itaque res huc redit ut serierum quarundam[,] quarum aequatio hoc modo transcendens seu vadit de aequatione in aequationem[,] quaeramus summas, ut $\frac{x^m}{m}$ series est quae etiam differentias habet, atque ita serierum quoque transcendentium in numeris quaerendae differentiae. Curvae ab hujusmodi seriebus etiam fiunt, etsi videantur esse finitae earum summae; prorsus ut logarithmica curva fit ex progressione Geometrica, et hoc modo tangentium, differentiarum[,] summarum inventio etiam ad has porrigetur curvas.

17 habet, *(1)* ita serie omnes eiusmodi possibiles *(2)* atqve ita *(a)* aeqvationum *(b)* serierum *L*
18 numeris | (eodem modo et serierum ab ipsis) *gestr.* | qvaerendae *L*

93. CALCULUS DIFFERENTIALIS TRANSCENDENS
[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 10 Bl. 2. 1 Ausschnitt von max. 21,0 x 7,3 cm. Untere Schnittkante unregelmäßig. 2 S. Textverlauf Bl. 2 v°, 2 r°. Überschrift irrtümlich oben links auf LH 35 XII 1 Bl. 226 (N. 91). Bl. 2 bildete ursprünglich mit N. 90, 91 und 92 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1483 B

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach N. 90, dat. Juli 1676, N. 91 und N. 92 auf dem Träger notiert.

C a l c u l u s d i f f e r e n t i a l i s t r a n s c e n d e n s

Videndum an Methodus tangentium Cartesii applicabilis ad Curvas Transcendentes; sit aequatio $x^3 + cz^2x^2 + fz^2x + g^3 \sqcap 0$. Sit aequatio determinanda ad duas radices aequales. Videndum an si forte sumatur $x^2 - 2ex + e^2 \sqcap 0$ multiplicetur per formulam arbitrariam $mx + nz^2$ quae si comparari posset priori utique haberetur tangens eodem calculo. Alia adhuc via: licebitne in se ducere $x + z - e \sqcap 0$ et postea multiplicare per formulam quo datae fiat similis, ac comparare. Sed dubito quoniam z potest continere x^2. x^3, aliaque. Quo casu verum esset nihilominus tamen aequationem $x^3 + cz^2x^2$ etc. habere duas radices aequales, sed revera plures habebit aequales quam duas nam aeq. $x + z - e \sqcap 0$ plurium potest esse radicum, quarum unaquaque bis est radix aequationis $x^3 + cz^2x^2$ etc. atque ita in nostra potestate efficeret in curva data ut circulus idem in pluribus locis curvam tangat. Cum tamen id sit determinata, si tamen aequatio $x+z-e \sqcap 0$ ubi $z \sqcap x^2$. x^3 etc. omnes praeter unam haberet radices imaginarias, cessaret ista difficultas, sed nec ita video, nam nec illud in potestate, ut idem circulus tangat curvam in pluribus punctis imaginarie. Fortasse tamen, videndum quid si fortasse uti liceat methodo Slusii quem plures arbitrariae non morantur.

Quoniam mea referendi methodo infinitae haberi possunt expressiones ejusdem curvae; hinc idem fieri poterit etiam in curva transcendente referendo modo ordinatas par-

10 C a l c u l u s ... t r a n s c e n d e n s *erg. L* 11 tangentium *erg. L* 26 mea | ordinatas *gestr.* | referendi *L*

11 Cartesii: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43–45. 25 Slusii: R.-Fr. de SLUSE, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/73, S. 5143–5147 sowie VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059.

allelas ad abscissas, modo ordinatas convergentes ad abscissas, modo ordinatas convergentes inter se, modo ordinatas parallelas inter se scilicet (ex diversis axibus), modo ordinatas parallelas ad ordinatas convergentes, modo contra. Et si res sumatur generalissima, ut ordinatae convergentes referantur ad alias convergentes, quia parallelae ordinatae sub convergentibus possunt contineri, imo et abscissae, habebitur generalissima relatio possibilis de curva, in qua plures arbitrariae. Et ope harum arbitrariarum effici saepe poterit ut conferri possit aequatio curvae ita formata, ut maximum vel minimum comprehendat, cum arbitraria eadem indeterminatas $x.$ $z.$ continente facta ex formulae mutatione per $x^2-2xe+e^2$. Et facile ista poterunt examinari; investigando tangentem alio modo scilicet per differentias.

Video jam potuisse etiam sine x, fieri $z-\omega \sqcap 0$ et in se duci, scribique $z^2-2\omega z+\omega^2 \sqcap 0$, eamque formulam multiplicari ex x et $z.$ compositam, productumque datae comparari. Quae comparatio si absolvi potest, habebitur hoc modo utique tangens. Notandum quoniam hoc modo in calculum non intrat specialis natura ipsius $z.$ hinc talis tangentis inventio erit infinitis simul communis curvis, qualiscunque scilicet quantitas sumatur pro $z.$ finita scilicet vel infinita. Et hoc etiam pro geometricis utile ad universalia. Si comparatio non succedat videndum an succedere possit mutata relatione (forte mutatio relationis nihil hic praestare potest) vel si nec hoc succedat, mutata litera $z.$ vel $x.$ aliaque substituta. Sed pro $x.$ dubito. Pro z hoc modo alia potest substitui, ut si $z.$ sit arcus circuli, substituatur alia ut v, quae sit ordinata summae sinuum ad axem applicatorum, quae utique dari potest ex data z vel contra, adhibita ipsa $x.$ et mutabitur formula. Nota forte dum his artibus diversis modis inveniri potest tangens, poterit aequatio inveniri diversa, seu tangens diversimode expressa, in quibusdam scilicet figuris ejus rei capacibus, et habebitur quadratura. Sed ista exemplis tractanda.

2 scilicet (*(1)* ad diversa puncta *(2)* ex *L*

94. DIFFERENTIAE CONVERGENTIUM

[Ende Juni – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 229. 1 Streifen von 5,4 x 21,0 cm, unregelmäßig beschnitten. 16 Z. auf Bl. 229 r°. Auf Bl. 229 v° gestrichenes Fragment einer Vorstufe zu Cc 2, Nr. 1429. Bl. 229 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines Bl. 2°; der obere bzw. untere Teil bestand aus LH 35 VIII 30 Bl. 13 u. LH 35 II 1 Bl. 127 (Cc 2, Nr. 1547 u. 1429; Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 1550

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum Januar bis August 1676 belegt. N. 94 dürfte kurz vor der auf dem ursprünglichen Bl. 2° darunter geschriebenen Cc 2, Nr. 1429 sowie deren gestrichener Vorstufe auf der Rückseite entstanden sein. Der in Cc 2, Nr. 1429 formulierte Satz zur näherungsweisen Berechnung des Kreisbogens (vgl. *LQK* prop. L S. 116–118) ist nach der entsprechenden Aussage in Cc 2, Nr. 1460, dat. 29. Juni 1676, anzusetzen.

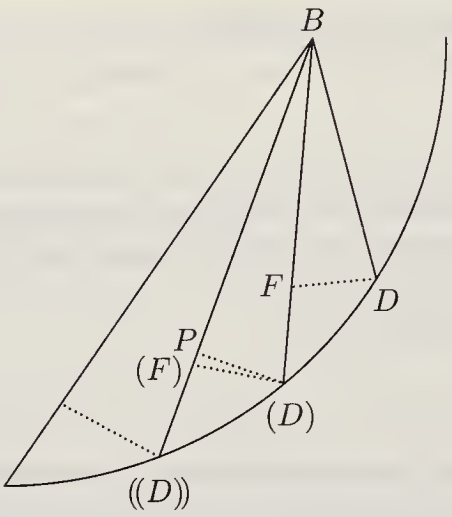
Differentiae convergentium

Ex puncto dato B ponantur infinitae duci rectae ad curvam, eaeque arithmetice proportionales. Erunt differentiae ipsarum $F(D)$ $(F)((D))$ quadratice proportionales et chordae DF erunt arithmetice proportionales. Sed jam video angulos $(D)BD$ variare pro natura curvae, adeoque et rectas $P(D)$. Posset tamen videri, quis ita pro curvis fiat calculus: ut quaeratur $P(F)$. Erit $B(D) \sqcap x.\ (D)P \sqcap \alpha.\ x^2 - \alpha^2 \sqcap PB^2$ et $PB \sqcap \sqrt{x^2 - \alpha^2}$. et $(F)P \sqcap x - \sqrt{x^2 - \alpha^2}$. Auferatur ejus quad. ab $(F)(D)^2 \sqcap \frac{x^2\beta^2}{c^2}$. fiet $-2x^2 + \alpha^2 + 2x\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 x^2}{c^2} \sqcap (D)P^2 \sqcap \alpha^2$. Unde $-2x^2 + \frac{\beta^2 x^2}{c^2}$, [2] $\sqcap 4x^4 - 4x^2\alpha^2$, sive

14 *Darunter:* Error est quia ipsae FD non crescunt arithmetice, sed varie pro natura curvae.

14 Differentiae convergentium *erg. L* 21 $+\alpha^2 \mid -2x\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\beta x^2}{c^2} \sqcap DP^2$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \alpha^2$ *L*

16 f. Erunt ... proportionales: Beide Aussagen treffen nicht zu und führen zu einem Widerspruch. Leibniz erkennt nachträglich den Fehler in der zweiten Aussage.



[*Fig. 1*]

$\boxed{4x^4} - \frac{4x^4\beta^2}{c^2} + \frac{\beta^4 x^4}{c^4} \sqcap \boxed{4x^4} - 4x^2\alpha^2$ et rejecto ubi β^4. fiet $\alpha \sqcap \frac{x\beta}{c}$. Ergo ipsae α. erunt arithmetice proportionales, ergo et ipsae $(F)P$. Jam $(F)((D))$ sunt quadratice, ergo $P((D))$ sunt arithmetice et quadratice proportionalium, quorum quadrata si addentur quadratis $P(D)$ arithmetice proportionalium, dant $(D)((D))$ elementum curvae, ergo semper eodem modo quod non capio.

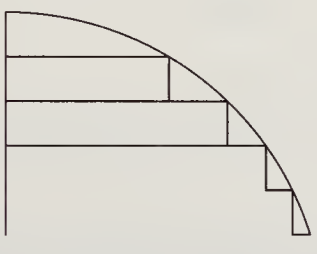
1 *Fig. 1*: Eine zerschnittene und vom Text überschriebene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

95. DE CIRCULI DIFFERENTIIS ET DESCRIPTIONIBUS

[März – August 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 II 1 Bl. 275. 1 L-förmiger Abschnitt bestehend aus einem Streifen von ca 21,5 x max. 3,5 cm und einem Streifen von max. 1,4 x 8 cm. 5 Z. auf Bl. 275 r°. Bl. 275 v° leer. Bl. 275 bildete ursprünglich mit VII, 3 N. 67 sowie LH 35 II 1 Bl. 178 (Cc 2, Nr. 00; Druck in einem späteren Band der Reihe) einen Teil eines Bog. 2°. Cc 2, Nr. 860

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen ist für den Zeitraum März bis August 1676 belegt. Aufgrund der inhaltlichen Nähe und der Ähnlichkeit der beiden Gesprächsaufzeichnungen mit Tschirnhaus VII, 3 N. 67 und VII, 3 N. 68, dat. August 1676, in Tinte und Duktus könnte N. 95 im August entstanden sein.



[*Fig. 1*]

$\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-x^2+2\beta x}$ ⊓ ω. $\sqrt{a^2-x^2}-\omega$ ⊓ $\sqrt{a^2-x^2+2\beta x}$, vel $\boxed{a^2-x^2}-2\omega\sqrt{a^2-x^2}\ \boxed{+\omega^2}$ ⊓ $\boxed{a^2-x^2}+2\beta x$ et $\frac{\omega}{\beta}$ ⊓ $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. $\frac{\omega}{x}$ ⊓ $\frac{\beta}{\sqrt{a+x,a-x}}$.

On pourroit examiner omnes modos quibus Circulus describi potes⟨t⟩, variorum motuum compositione, ex variis circuli relationibus ad varias abscissas et ordinatas, convergentes et parallelas.

13–15 ⊓ $\frac{\beta}{\sqrt{a+x,a-x}}$ *(1)* vel $\sqrt{2ax-x^2}-\sqrt{2ax-2}$ *(2)* V⟨ous⟩ po *(3)* On *L*

15 *Fig. 1*: Das Fragment einer zerschnittenen Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

96. CALCULUS TANGENTIUM DIFFERENTIALIS

November 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 12 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°. 3 S. auf Bl. 3 r°–4 r° mit Seitenzählung pag. 1, pag. 2, pag. 3. Auf Bl. 4 v° Aufzeichnung zu einem algebraischen Instrument (Druck in einem späteren Band der Reihe). — Gedr.: 1. *LBG*, 1899, S. 229–231 (tlw. = Z. 9 – S. 615 Z. 13); 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 124–127; 3. HESS, *Vorgeschichte der Nova Methodus*, 1986, S. 86–92. Cc 2, Nr. 00

Novemb. 1676

Calculus Tangentium differentialis

$$d\overline{x} \sqcap 1 \qquad d\overline{x^2} \sqcap 2x \qquad d\overline{x^3} \sqcap 3x^2 \qquad \text{etc.}$$

$$d\overline{\frac{1}{x}} \sqcap -\frac{1}{x^2} \qquad d\overline{\frac{1}{x^2}} \sqcap -\frac{2}{x^3} \qquad d\overline{\frac{1}{x^3}} \sqcap -\frac{3}{x^4} \qquad \text{etc.}$$

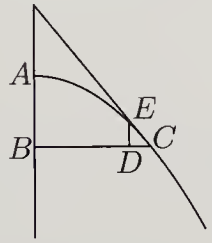
$$d\overline{\sqrt{x}} \sqcap \frac{1}{[2]\sqrt{x}} \qquad \text{etc.}$$

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum

---

10 adjecta sub finem Machina construendi aequationes per Logarithmicam

Darunter, vorher geschrieben: Pag. 3. signum # est optima methodus pro spatiis ad curvas reducendis. Paucis $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $DE \sqcap d\overline{x}$. $DC \sqcap d\overline{y}$. $EC \sqcap z$. $z \sqcap \sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}$. Ergo $x \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2 - d\overline{y}^2}}$[,] $y \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2 - d\overline{x}^2}}$: datur autem relatio ipsarum z. ad x vel ad y. Ergo valore ipsius x vel y pro arbitrio ad alium relato, quaeri potest modus inveniendi x ex y vel y ex x.



10 Calculus ... differentialis *erg. L* 12 $\mathrm{d}\overline{\frac{1}{x^3}} \sqcap | -\frac{3}{x^2}$ *ändert Hrsg.* | etc *L*

19 ad *(1)* rectas *(2)* curvas *L* 21 autem *(1)* progressio *(2)* relatio *L* 23 modus *(1)* metiendi curvam *(2)* inveniendi *L*

---

18 Pag. 3. signum # : s. Zusatz S. 617 Z. 14 – S. 618 Z. 13.

$$d\overline{x^e} \sqcap e, x^{e-1} \text{ et contra } \int \overline{x^e} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

Unde $d\overline{\frac{1}{x^2}}$ seu $d,\overline{x^{-2}}$ erit $-2x^{-3}$ seu $-\frac{2}{x^3}$ et $d\overline{\sqrt{x}}$ seu $d,\overline{x^{\frac{1}{2}}}$ erit $\boxed{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ seu $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

Sit $y \sqcap x^2$. et erit $d\overline{y} \sqcap \boxed{+x^2} + 2xd\overline{x} + \boxed{d\overline{x}^2}, \boxed{-x^2}$. Ergo: $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap 2x$. Quae ratiocinatio est generalis, nec refert quae sit progressio ipsarum x. Eodemque modo generalis regula ita stabit: $\frac{d\overline{x^e}}{d\overline{x}} \sqcap e, x^{e-1}$ et vicissim $\int \overline{x^e d\overline{x}} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

Sit aequatio quaelibet, v.g. $ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 \sqcap 0$ et pro y scribendo $y + d\overline{y}$, ac pro x similiter $x + d\overline{x}$, fiet omissis omittendis alia aequatio:

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} ay^2 + & byx + & cx^2 + & f^2x + & g^2y + & h^3 \\ a2d\overline{y}y + & byd\overline{x} + & 2cxd\overline{x} + & f^2d\overline{x} + & g^2d\overline{y} & \\ + & bxd\overline{y} & & & & \end{array}\right\} \sqcap 0$$

$$ad\overline{y}^2 + bd\overline{x}d\overline{y} + cd\overline{x}^2 \sqcap \boxed{0}$$

8 *Am Rande:* Alterutra ex his $d\overline{x}$ vel $d\overline{y}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $d\overline{x}$ vel $d\overline{y}$ sublata, et x scilicet vel y aliter per quamlibet explicando. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet, alterutram sumendo constantem.

9–12 *Am Rande:* Praeclara haec observatio est ad calculum meum differentiarum. Si sit $b, \overline{yd\overline{x} + xd\overline{y}} + \text{etc.} \sqcap 0$ fore $b\overline{yx} + \int \overline{\text{etc.}} \sqcap 0$ et ita de caeteris. Videndum quid de h^3 faciendum. Ad istos calculos melius faciendos poterit aequatio $ay^2 + byx + cx^2$ etc. transmutari in aliam alia curvae relatione, et comparabitur proveniens, alio differentiarum calculo, cum eo quod per istum prodiit.

3 f. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$ *(1)* Sit ŧy² ŧ $\boxed{2}$ $\overline{y+\beta}$ ⊓ z. seu ŧy² ŧ y² ŧ 2yβ ŧ β² *(2)* Sit *L*

3 $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$: Richtig wäre $+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 8 aequatio: Die in der dritten Gleichung wiedergegebene Beziehung zwischen den Produkten der Größen dx und dy, die Leibniz durch erneutes Ersetzen von x und y durch $x + dx$ bzw. $y + dy$ gewonnen hat, ist nicht korrekt.

Quae est regulae a Slusio publicatae origo. Eam vero ita in infinitum amplificabimus: sint literae quotcunque; et ex iis composita formula, verbi gratia ex literis tribus sit formula:

$$ay^2 \quad bx^2 \quad cz^2 \quad fyx \quad gyz \quad hxz \quad ly \quad mx \quad nz \quad p \sqcap 0.$$

Unde fiet alia aequatio:

ay^2	bx^2	$cz^{[2]}$	fyx	simi-	simi-	ly	mx	simi-	p
$2ad\overline{y}y$	$2bd\overline{x}x$	$2cd\overline{z}z$	$fyd\overline{x}$	liter	liter	$ld\overline{y}$	$md\overline{x}$	liter	
			$fxd\overline{y}$	.	.				
$ad\overline{y}^2$	$bd\overline{x}^2$	$[c]d\overline{z}^2$	$fd\overline{x}d\overline{y}$	.	.				

Unde patet eadem methodo haberi tangentia superficierum plana, et alioqui, nihil referre an non ipsae literae $x.$ $y.$ $z.$ aliquam habeant cognitam relationem, ea enim postea substitui potest.

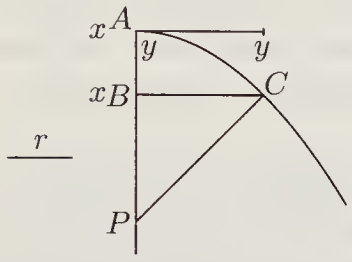
Hinc praeclare serviet eadem methodus; etsi compositae fractiones aut irrationales calculum ingrediantur, nec opus est earum tollendarum causa caetera exaltari, cum potius ipsarum differentiae separatim inveniri ac substitui possint; deinde cum methodus tangentium publicata non nisi tunc procedat, cum ordinatae parallelae sunt, ista et ad convergentes et alias quascunque, imo illas quoque relationes accomodari potest, quae sunt ordinatarum ad curvarum portiones aut in quibus angulus ordinatarum certa lege mutatur. Caeterum speciatim operae pretium erit rem ad irrationales ac fractiones compositas accomodare. Ut $d\overline{\sqrt[2]{a+bz+cz^2}}$, ponatur $a+bz+cz^2 \sqcap x$ et $\frac{d\overline{\sqrt[2]{x}}}{d\overline{x}} \sqcap -\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Jam $\frac{d\overline{x}}{d\overline{z}} \sqcap b+2cz$ ergo $d\overline{\sqrt[2]{a+bz+cz^2}} \sqcap -\frac{b+2cz}{2d\overline{z}, \sqrt{a+bz+cz^2}}$.

Sumta aequatione duarum literarum $x.$ y pro curva, et determinata aequatione ad tangentes, tolli potest alterutra ipsarum $x.$ et $y.$ ita ut restet altera tantum una cum $d\overline{x}$ et $d\overline{y}.$ quod per omnes casus calculari operae pretium est.

18 mutatur. | Unde nihil generalius vel fingi potest. *gestr.* | Caeterum *L*

1 Slusio: s. Sluses Tangentenbrief in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 19 $\frac{d\overline{\sqrt[2]{x}}}{d\overline{x}} \sqcap -\frac{1}{2\sqrt{x}}$: Leibniz übernimmt das falsche Vorzeichen von S. 613 Z. 3. Zudem notiert er im folgenden Ausdruck für $d\sqrt{a+bz+cz^2}$ die Größe dz im Nenner statt im Zähler.

Datis tribus literis, ut $x.$ $y.$ $z.$ et val⟨or⟩e ipsius $d\overline{z}$ ope ipsius $x.$ vel $y.$ (: vel etiam utriusque :) expresso, habebitur denique aequatio tangentium, in qua erit etiam tantum alterutra harum $x.$ et y et duae $d\overline{y}$, $d\overline{x}$; aliquando et ipsa z non poterit tolli. Hoc etiam per omnes casus assumti valoris ipsius $d\overline{z}$ deduci potest, eodem modo plures adhuc literae assumi possunt: Et conjunctis in unum calculis universalibus omnibus, universalissimus ex ipsis fiet.



[*Fig. 1*]

Caeterum assumtio plurimarum literarum usum habere potest ad methodi tangentium inversae problemata ope quadraturarum solvenda ut si propositum sit problema solvere, in quo summa rectarum CB, BP sit data seu $y + \frac{yd\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap xy$ fiet $d\overline{x} + d\overline{y} \sqcap xd\overline{x}$ seu $x + y \sqcap \frac{x^2}{2}$. Ita habemus curvam in qua summa earum $CB + BP$ (in constantem r) aequatur rectangulo ABC.

$yd\overline{y} + yd\overline{x} \sqcap \frac{yd\overline{x}}{1+y}$. seu $y + x \sqcap \int \frac{1}{1+y} d\overline{x}$ sive $x \sqcap \int \overline{\frac{1}{1+y} d\overline{x}}$ [*bricht ab*]

$d\overline{y} + d\overline{x} \sqcap \frac{1}{1+y} d\overline{x}$ seu $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} + 1 \sqcap \frac{1}{1+y}$ seu $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{1+y} - 1} \sqcap \frac{1+y}{-y}$ seu $-x \sqcap \int \frac{\overline{1}}{y} + y.$

$yd\overline{y} + yd\overline{x} \sqcap zd\overline{x}$. Fiet: $yd\overline{y} \sqcap zd\overline{x} - yd\overline{x}$. vel fiet: $\frac{yd\overline{y}}{z-y} \sqcap d\overline{x}$. vel $x \sqcap \int \overline{\frac{yd\overline{y}}{z-y}}$. Et pro $z.$ posito ejus valore ex dato y reductum erit problema ad quadraturas. Sed si sit z data ex data x tunc ex datis quadraturis dabitur $\overline{zd\overline{x}}$: Ergo fiet $\frac{y^2}{2} + \int \overline{yd\overline{x}} \sqcap \int \overline{zd\overline{x}}$.

Nota si curva explicaretur hoc modo ut non certa aliqua detur vel ordinatae vel abscissae natura differentiarum, sed ut fiat semper differentia unius aequalis differentiae alterius proximae, fiet $2y \sqcap$ dato z.

3 aliqvando ... tolli. *erg. L* 15 $\mathrm{d\overline{y}} + \mathrm{d\overline{x}} \sqcap \ldots$ seu *(1)* $\int \overline{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}} \sqcap$ *(2)* $\int \frac{1}{\mathrm{d\overline{x}}} \sqcap \int \overline{\frac{1}{1+\mathrm{y}}} - \mathrm{y}$ *streicht Hrsg.* | *(3)* $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\overline{y}}} \sqcap \ldots \int \frac{\overline{1}}{\mathrm{y}} + \mathrm{y}$ *erg. L*

12 constantem r: Leibniz rechnet mit $r = 1$.

$d\bar{x}^2y^2 + y^2d\bar{y}^2 \sqcap z^2d\bar{x}^2$. Fiet $y \sqcap \frac{zd\bar{x}}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. ubi posito z dari.

$\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \sqcap \frac{zd\bar{x}}{a}$. Fiet $d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap \frac{z^2d\bar{x}^2}{a^2}$ ponendo z dari ex data x. Scribe $2d\bar{x}d\bar{y} + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap \frac{z^2}{a^2}d\bar{x}^2 + 2d\bar{x}d\bar{y}$ seu $d\bar{y} + d\bar{x} \sqcap \sqrt{\frac{z^2}{a^2}d\bar{x}^2 + 2d\bar{x}d\bar{y}}$.

Ut ista tractari possint ubi $d\bar{x}^2$, vel $d\bar{y}^2$ et similia, ut $d\bar{x}d\bar{y}$, quoniam illa ex simplici inventione differentiarum duci non possunt, fieri possunt variae aequationes simplices differentiales, eaeque multiplicatae per $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ aut eorum potentias componi inter se ad inveniendas aequationes novas.

Poterunt ejusmodi excitari aequationes ope theorematis Huddeniani, quo nihil refert quae adhibeatur arithmetica progressio, ita aequatio multiplicari secundum unam progressionem poterit in aliam duci secundum aliam, nec ideo multiplicatur numerus radicum problematis, quia una alteri aequivalet, inprimis si semel in eam ducitur, et ei addatur. Ex his compositionibus credibile est varia formari posse, apta solvendis methodi tangentium inversae problematis.

$\sqrt{BC^2 + BP^2} \sqcap z$, seu $y^2 + \frac{y^2d\bar{y}^2}{d\bar{x}^2} \sqcap z^2$. Pone z dari ex data y. fiet $d\bar{x} \sqcap \frac{y[d\bar{y}]}{\sqrt{z^2 - y^2}}$. unde dabitur problema. Sin detur z ex data x, difficilis solutio est. Ponamus x arith-

---

1 *Auf Bl. 3 r° zwischen den Text notiert:* $d\bar{x}^{[2]} \sqcap \frac{d\bar{y}^2}{y^2} - d\bar{y}^2$ seu $x \sqcap \int \overline{d\bar{y}\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}}$. $\boxed{\frac{1}{y^2}} - \frac{1}{1} \sqcap \boxed{\frac{1}{y^2}} - \frac{2z}{y} + z^2$. Ergo $y \sqcap \frac{2z}{z^2+1}$. Ergo $\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \sqcap \ddagger \frac{z^2+1}{2z} \ddagger z$. $d\bar{y} \sqcap \frac{2}{\overline{z^2+1}^4} \frown$ „$2z^2d\bar{z} - 2d\bar{z} \frown z^2 + 1$. $d\bar{y} \sqcap \frac{4z^2}{z^2+1}d\bar{z} - 4d\bar{z}$. $x \sqcap \frac{4z^2d\bar{z}}{z^2+1} - 4d\bar{z}$ per $\frac{\ddagger z^2+1}{2z}$ seu fiet $\sqcap \frac{-4d\bar{z} \frown \ddagger z^2+1}{z^2+1,2z}$ quae formula quadranda ad describendam talem curvam. Sed nota hujus formulae partem pendere ex quad. Circuli.

15 solutio est *gestr. L, erg. Hrsg.*

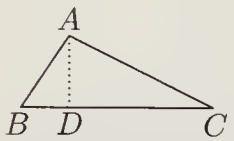
---

8 theorematis Huddeniani: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516.

17 $d\bar{y} \sqcap$: Das korrekte Ergebnis wäre $\frac{2-2z^2}{(z^2+1)^2}dz$. Im Folgenden kommen weitere Rechenfehler hinzu.

meticam fietque: $y\sqrt{1-d\bar{y}^2} \sqcap z.$ seu $\int \overline{y\sqrt{1-d\bar{y}^2}} \sqcap \int \overline{z}.$ Datur autem summa z, ex hypothesi quadraturarum. Tantum ergo hujusmodi summa quaeritur, haberi poterit per series infinitas.

Videndum, si sit $yd\bar{y}d\bar{x} \sqcap x^2$, liceatne ponendo $d\bar{x}$ ut constantem seu x ut arithmeticam inde facere, $yd\bar{y} \sqcap x^2$, seu $\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{x^3}{3}$. Ita puto.



[*Fig. 2*]

Maximi foret momenti ad perfectionem Geometriae curvas invenire figuris proportionales. $AB \sqcap e.$ $BC \sqcap c.$ AD [$\sqcap$] $fe.$ $BD \sqcap e\sqrt{1-f^2}$ et $DC \sqcap c - e\sqrt{1-f^2}$ et $AC^{[2]} \sqcap \boxed{f^2e^2} + c^2 - 2ce\sqrt{1-f^2} + e^2\boxed{-e^2f^2}$. Ergo $AC^2 \sqcap AB^2 + BC^2 \dagger 2CBD$. Sit $e \sqcap d\bar{x}.$ et $c \sqcap d\bar{y}$, et angulus expressus per f, fiet: $AC \sqcap$ elemento curvae: $\sqcap d\bar{y}^2 + d\bar{x}^2 - 2d\bar{x}d\bar{y}\sqrt{1-f^2} \sqcap z^2$. Pone z dari ex data x, fiet $d\bar{y}^2 - 2d\bar{y}\sqrt{1-f^2} + 1 - f^2 \sqcap \boxed{1} - f^2, + z^2\boxed{-1}$ et fiet $\dagger d\bar{y} \dagger \sqrt{1-f^2} \sqcap \sqrt{z^2-f^2}.$ seu $\dagger y \dagger x\sqrt{1-f^2} \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2-f^2}}.$

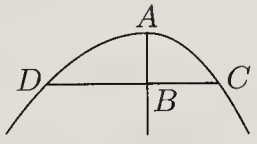
[*Zusatz auf Bl. 4 r°, in Höhe von S. 618 Z. 3f. mit # markiert*]

$d\bar{x} \sqcap \dfrac{d\bar{y}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}$ et sumendo z dari ex data y habetur solutio ex quadraturis, sed si z datur ex data x tunc ita procedendum $d\bar{y} \sqcap d\bar{x}\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}$. Nam priore modo ponendo y esse arithmeticae progressionis fiet: $x \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}.$ posteriore ponendo x arithmeticam, fiet y, aequ. $\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}$. Solutum est ergo problema reperiendi curvam datorum elementorum ex datis scilicet quadraturis.

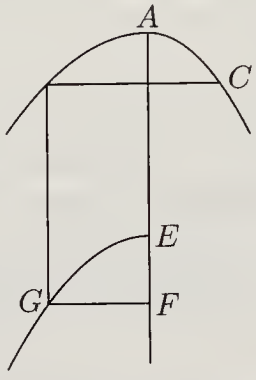
Videtur male proposita quaestio, neque talis esse aequatio: $\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \sqcap zd\bar{x}$ vel $\sqcap zd\bar{y}$, sed $\sqcap z$. Fiet $d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap z^2$ et si z datur ex data y, fiet: $x \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2-1}}$ vel si datur z ex x, fiet $y \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2-1}}$. Itaque ad quadrandam parabolam per exten-

1 fietque: Richtig wäre $y\sqrt{1+d\bar{y}^2} = z.$

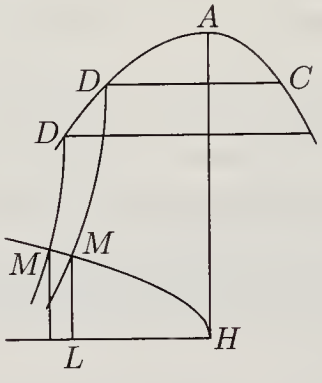
sionem curvae in rectam opus est quadraturae Hyperbolae. Aliunde autem quadratura Hyperbolae inveniri potest per curvam parabolae, ergo per curvam parabolae inveniri potest quadratura parabolae; sed non contra. Resumatur aequatio: $x \sqcap \int \overline{\sqrt{z^2 - d\overline{y}^2}}$, et ponatur neutra esse progressionis arithmeticae, scilicet neque y, neque x, sed ponatur tam z quam y explicari ex alia data quae sit ejusmodi, ut formula $\sqrt{z^2 - d\overline{y}^2}$ sit quadrabilis et habebitur quadratura figurae ex data curvae extensione in rectam.



[*Fig. 3a*]



[*Fig. 3b*]



[*Fig. 3c*]

Nam si y arithmetica tunc fit res ita[:] curva AC spatio $ABDA$ proportionalis; sin aliter explicetur y scilicet rursus per aliam tunc fiet ex. gr. curva AC. proportionalis spatio $EFGE$, vel aliter adhuc res fieri potest, ut fiat curva AC, proportionalis spatio HLM posito DM esse certam curvam ex dato quolibet puncto D describendam, et curvae HM occurrentem unde amplissimus patet campus spatia ad lineas revocandi.

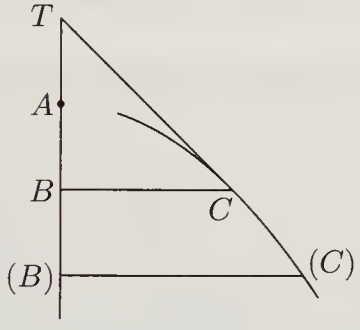
97. REDUCTIO PLURIUM AEQUATIONUM AD UNAM SEU SUBLATIO INCOGNITARUM

[Kurz vor dem 28. November 1676]

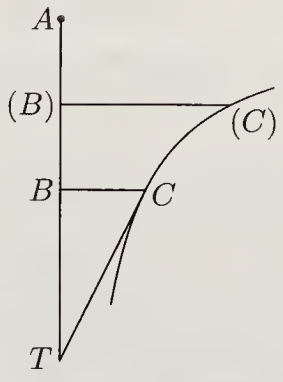
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 304. 1 Ausschnitt von ca 18,2 x max. 15,7 cm. 1 S. auf Bl. 304 v°. Auf der Vorderseite Fragment einer Aufzeichnung zur Planung der Reise von Amsterdam nach Hannover.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung diente als Vorlage für einen Abschnitt im Brief Leibniz' an Oldenburg vom 18./28. November 1676 (III, 5 N. II S. 7 f.). Infolge des auf der Vorderseite des Blattes befindlichen Reiseplans wurde die Aufzeichnung wahrscheinlich während des Amsterdamaufenthalts kurz vor Abfassen des Briefs an Oldenburg geschrieben.

Reductio plurium aequationum
ad unam seu sublatio incognitarum



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

AB sit x. *BC* sit y. quantitates indeterminatae: determinatae vero, *a. b. c. d. e. f.* Aequatio relationem explicans inter x et y[,] $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \sqcap 0$

12 f. Reductio ... incognitarum *erg. L*

14 *Fig. 1b*: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

quae in suo gradu generalissima seu plenissima est, et ad quodcunque exemplum potest applicari, pro varia explicatione literarum, quae et nihilo aequales ponentur cum aliqui termini desunt, et quantitati negativae, quoties non adduntur sed auferuntur. Jam ex methodo tangentium Huddenii vel Slusii posita CT tangente, et $\frac{BC}{TB}$ vocata z. erit $-z$ aequ. $\frac{2ax+cy+d}{2by+cx+e}$.

Habemus ergo duas aequationes unam datam, quae continet duas indeterminatas x et y. alteram, inventam quae continet tres z. x. y. Quaeritur ex his alia in qua nulla sit y. sed tantum duae literae x. et z, sive quaeritur relatio ipsius z sive $\frac{BC}{TB}$, ad solam x sive AB. Ut ergo tollatur y, consideratur ex aequatione priore haberi y $\overset{(3)}{\text{aequ.}}$ $\frac{-ax^2-dx-f}{by+cx+e}$ sive per compend. y $\overset{(4)}{\text{aequ.}}$ $\frac{p}{by+q}$. (posito p $\overset{(5)}{\text{aequ.}}$ $-ax^2-dx-f$ et q $\overset{(6)}{\text{aeq.}}$ $cx+e$.) Ex 2da aequatione fiet y $\overset{(7)}{\text{aeq.}}$ $\frac{2ax+d-cxz-ez}{2bz-c}$ seu posita r $\overset{(8)}{\text{aequ.}}$ $2ax+d-cxz-ez$. et s $\overset{(9)}{\text{aequ.}}$ $2bz-c$ fiet y $\overset{(10)}{\text{aequ.}}$ $\frac{r}{s}$. Ergo aequando aeq. 4 et 10 fiet ps $\overset{(11)}{\text{aequ.}}$ $bry+qr$. et y $\overset{(12)}{\text{aeq.}}$ $\frac{ps-qr}{br}$ quam aequationem jungendo aequationi 10, fiet ps^2-qrs $\overset{(13)}{\text{aequ.}}$ br^2.

$$\begin{array}{lllll}
s^2 & \text{aequ.} & +\ 4b^2z^2 - 4bcz + c^2 & \qquad q & cx+e \\
p & & -\ ax^2 - dx - f & \qquad s & 2bz-c \\
\hline
 & & -4b^2fz^2 + 4bcfz - fc^2 & \qquad qs & -c^2x - ce \\
 & & -4b^2dz^2x + 4bcdzx - c^2dx & & +2bczx + 2bez \\
 & & -4ab^2x^2z^2 + 4abczx^2 - ac^2x^2 & &
\end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} -4b^2fz^2 + 4bcfz - fc^2 \\ -4b^2dz^2x + 4bcdzx - c^2dx \\ -4ab^2x^2z^2 + 4abczx^2 - ac^2x^2 \end{array}\right\} ps^2$

8 $\frac{\text{TB}}{\text{BC}}$ *L ändert Hrsg.*

4 Huddenii: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 4 Slusii: R.-Fr. de SLUSE, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/73, S. 5143–5147 sowie VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059. 11 Ex 2da aequatione: Leibniz übernimmt die Gleichung Z. 4 f. ohne das Minuszeichen vor z und rechnet konsequent weiter.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
qs & \text{aequ.} & & 2bczx + & 2bez - & c^2x - & ce \\
r & \text{aeq.} & - & czx - & ez + & 2ax + & d \\
\hline
 & & & + 2bcdzx + & 2bdez - & c^2dx - & cde \\
 & & + 4abczx^2 + & 4abezx - & 2ac^2x^2 - & 2acex & \\
 & - 2bcez^2x - & 2be^2z^2 + & 2ec^2zx + & ce^2z & & \\
- 2bc^2z^2x^2 - & 2bcez^2x + & c^3zx^2 + & c^2ezx & & &
\end{array}
\Bigg\} qsr
$$

r^2 aequ. $4a^2x^2 + 4adx - 4aczx^2 - 4aezx, +d^2 - 2cdzx - 2dez, +c^2x^2z^2 + 2cexz^2 + e^2z^2$.

Unde ordinando habebimus:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
3bc^2x^2z^2 & + 6bcexz^2 & - 12abczx^2 & + 4a^2bx^2 + & 3be^2z^2 & - 8abexz & + 4abdx & - 4bdez & + bd^2 & \sqcap & 0. \\
4ab^2 & + 4b^2d & - & c^3 & + 3ac^2 & + 4b^2f & - 4bcd & + 2ace\,. & - ce^2 & + cde & & \\
 & & & & & & - 3c^2e & + 2c^2d\,. & - 4bcf & + fc^2 & &
\end{array}
$$

Ubi notabilia: idem semper numerus literarum cognitarum in quolibet totius aequationis articulo; eadem signa in quolibet articulo ejusdem membri[;] denique binos articulos cujuslibet altiorum membrorum, ternos inferiorum.

12 f. in *(1)* termino *(2)* qvolibet totius aeqvationis *(a)* membro *(b)* articulo *L*

5 $+2ec^2zx$: Richtig wäre $+ec^2zx$; Leibniz rechnet konsequent weiter. 8 habebimus: Leibniz rechnet irrtümlich $br^2 - qrs - ps^2$. Zudem müsste in Z. 10 bei konsequenter Rechnung $-8bcdxz$ stehen.

98. FIGURA QUADRANDA COMPARATUR CUM ALTERIUS DIFFERENTIIS

Dezember 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 227. 1 Bl. ca 4°. 1 S. auf Bl. 227r°. Rückseite leer. Untere Risskante geschwungen.
Cc 2, Nr. 00

Xb. 1676.

Figura quadranda comparatur
cum alterius differentiis

In Epistola mea ad Oldenburgium Amstelodamo Novemb. scripta 1676. est formula generalis differentiarum gradus cubici, ubi si tolli possent tres priori termini x^2z^2. xz^2. x^2z haberetur quadratura Hyperbolae modo restet xz. Videamus, fit, $3bc^2 + 4ab^2 \sqcap 0$. seu $3c^2 + 4ab \sqcap 0$. rursus $6bce + 4b^2d \sqcap 0$. seu $3ce + 2bd \sqcap 0$. et $-12abc - c^3 \sqcap 0$. seu $12ab + c^2 \sqcap 0$. Fiet: $c^2 \sqcap -\frac{4ab}{3} \sqcap -12ab$ quod est impossibile. Ergo tolli non possunt hi termini.

Proposita curva invenire si fieri potest quadrabilitatem analyticam absolutam, idem est ac proposita curvae [quadratricis] aequatione invenire aequationem exprimentem relationem differentiarum inter ejus ordinatas, et hanc data comparare; sed

7 Xb. 1676. *erg. L* 8f. figura ... differentiis *erg. L* 10 Novemb. *erg. L* 16 si fieri potest *erg. L* 18 exprimentem | aeqvationem *erg., ändert Hrsg.* | differentiarum *L*

10 Epistola: Leibniz an Oldenburg, 18./28. November 1676, III, 5 N. II, insbesondere S. 7–9.
10f. formula ... cubici: Es handelt sich um die zur allgemeinen Kurvengleichung 2. Grades $ax^2 + by^2 + cyx + dx + ey + f = 0$ gehörende Beziehung zwischen x und $z = \frac{dy}{dx}$ (*a. a. O.*, S. 8); dementsprechend müsste es quadratici statt cubici heißen. Leibniz leitet im genannten Brief die Gleichung für x und z nicht korrekt her (s. dortige Erl.). Da die erste Kurve wegen $z = \frac{dy}{dx}$ als Quadratrix der durch x und z gegebenen Kurve aufgefasst werden kann, unternimmt Leibniz im Folgenden den Versuch einer Reduktion auf die Hyperbelquadratur durch Nullsetzen von Koeffizienten in der Beziehung zwischen x und z. Diese Untersuchung ist unvollständig, hätte aber auch anhand der korrekten Gleichung bei vollständiger Durchführung zum gleichen negativen Ergebnis geführt.

quia id saepe prolixatum alia circumspicienda ars:

[I] $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3 \sqcap 0$

fiet alia

[II] $b\delta x + dx\delta y + 2ex\delta x + 2gxy\delta x + 2hxy\delta y$ etc.
$c\delta y$ [+] $dy\delta x + 2fy\delta y + gx^2\delta y + hy^2\delta x$
$+ 3lx^2\delta x$
[+] $3my^2\delta y$

Alterutra jam ex his, δx vel δy pro constante altera pro variante, sumi potest, et pro varia substitui z. Ponamus δx esse constantem et $\delta y \sqcap z$ et data sit aliqua aequatio exprimens relationem inter z et x, posito z esse ordinatam, x abscissam curvae cujus quadratura quaeritur. Quaeritur an ex illa data aequatione inter z et x, assumto pro arbitrio valore ipsius y per z et x expresso, duae aequationes datis similes, formari possint. Hoc ita procedet, fingatur aequatio relationem exprimens inter $z.\ x.\ y.$ et [ex] ea tollatur z ope datae quod generalissime fiet: nata comparetur cum generalissima ex solis $x.\ y$ composita. (An rectius erit non universalem assumere ex $x.\ y.\ z.$ sed datam inter $x.\ y.$ dividere in duas ut $x^2 + zx + z^2 \sqcap 0$ ita dividere, $bx^2 + fayzx$ etc. $\sqcap 0$.)

$cyx^2 + gay^2$ etc.
dy^2x^2
etc.

14 fiet: *(1)* sublata *(2)* nata L

2–4 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im Übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

Abbé 17. Jh.: S. 441.

Albius s. White

Apollonius v. Perga 3./2. Jh. v. Chr.: S. 123. 194.

Archimedes † 212 v. Chr.: S. 31. 194. 267. 296 f. 420. 501. 512. 554.

Barrow, Isaac † 1677: N. 43*. S. 313. *563*.

Bartholin, Rasmus † 1698: S. 21 f.

Beaugrand, Jean de † 1640: S. *605*.

Beaune s. Debeaune

Bertet (Berthet), Jean S. J. † 1692: N. 45*. 63*. 64*. S. *434*.

Boulliau (Bullialdus), Ismael † 1694 : S. 31.

Brouncker, William, Viscount † 1684: S. *297*.

Carcavy, Pierre de † 1684: S. *599*.

Cardano, Girolamo † 1576: S. 41.

Cavalieri (Cavalerius), Bonaventura † 1647: S. 296. 313.

Collins, John † 1683: S. *297*. *301*. *332*.

Debeaune (Beaune), Florimond † 1652: S. 22. *179*. 598. *598*. 600. *600*. 603.

Dechales (De Chales), Claude François Milliet S. J. † 1678: S. 239.

Descartes (Cartesius), René † 1650: N. 3*. 90*. 91*. S. 16 f. *16*. 20. 22. 63. 77. 78. 85. 92. 97. *98*. 103. 117 f. *117*. 140–142. *141*. 149. 168. 179. *179*. 202. 307. 342. 343. *357*. *369*. 559. 607.

Euklid 3. Jh. v. Chr.: S. 296.

Fabri, Honoré S. J. † 1688: S. 441. 514.

Fermat, Pierre de † 1665: S. 84. 220. *449*. 463 bis 465. *463*. 598. *605*.

Gent, Pieter van 17. Jh.: S. *346*.

Gregorius a S. Vincentio s. Saint-Vincent.

Gregory (Gregorius), James † 1675: N. 47*. S. 115. 272. 296 f. *301*. 307. 313. 351 f. 354.

Guldin, Paul S. J. † 1643: S. 297. *420*. *434*. 436. 516. 521. 528.

Heuraet (Heuratius), Hendrik van † 1660: N. 30*. S. 132. 138. 168. 194. 297. *297*. 374. 375. 393.

Hudde, Jan † 1704: S. 14. 62. *62*. 84 f. *100*. 145. 148. 151. 214. 216. 218. 228. *234*. 343. *357*. 583. 584. 586. 616. 620.

Huygens (Hugenius), Christiaan † 1695: N. 3*. S. *16*. 31. *62*. 115. *115*. *135*. 136. 272. 282. 296 f. *297*. *420*. 535.

Justel, Henri † 1693: S. 31.

Mercator, Nicolaus † 1687: S. 296. *332*. 422.

Mersenne, Marin † 1648: S. 91. *369*. *598*.

Neile, William † 1670: S. *297*.

Newton, Isaac † 1727: S. 142.

Oldenburg, Heinrich † 1677: S. *15*. *62*. 297. *301*. *347*. *502*. *619*. 622.

Ozanam, Jacques † 1717: S. *317*.

Pascal (Dettonvillaeus), Blaise † 1662: S. 514.

Ricci, Michelangelo † 1682: S. *332*. *449*. *480*.

Roberval, Gilles Personne de † 1675: S. 91. *91*. 502. *508*. *600*. *605*.

Rømer, Ole Christensen † 1710: S. 420. *420*.

Saint-Vincent (Gregorius a S. Vincentio), Grégoire de S. J. † 1667: S. 262. 291. 296 f. 313. 314. 350.

Schooten (Schoten, Schotenius), Frans van d. J. † 1660: S. 80. 84 f. 103. 117. 127. *195*. 207. 234. 281.

Sluse (Slusius), René-François de † 1685: S. 62. 109. *109*. 225. 228. 323. 342. 343. 400. 437. 463. 584. 586. 607. 614. 620.

Snell (Snellius) van Royen, Willebrord † 1625: S. 115. 296.

Tacquet, André S. J. † 1660: S. 297. 557.

Torricelli, Evangelista † 1647: S. *296*. 297. *508*.

Tschirnhaus, Ehrenfried Walter v. † 1708: N. 42*. 49*. 51_1*. 62*. 67_1*. 80*. S. 267. *301*. 363. 372. 373. 375. *431*. 509. *509*. *553*. *611*.

Viète (Vieta), François † 1603: S. 115. 307.

Wallis, John † 1703: S. 199. 272. 296 f. *297*. 313. 329. 332 f. *332*. 340. 402. 442. *442*. 514.

White (Albius), Richard S. J. 17. Jh.: S. 297.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur. Darin sind Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, einschließlich ihrer modernen Ausgaben verzeichnet. Abkürzungen von in den Erläuterungen oder Überlieferungen erwähnter Literatur werden im Abkürzungsverzeichnis aufgeführt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

1. *A c t a Eruditorum*. Leipzig 1682 ff.:
   — Dez. 1682: S. *347*.
2. Apollonius v. Perga, *Conica*: S. *123*.
3. Archimedes
   1. *De aequiponderantibus*: S. *420*.
   2. *De conoidibus et sphaeroidibus*: S. 31. *296*.
   3. *De sphaera et cylindro*: S. 31. *297*. *554*.
   4. *Dimensio circuli*: S. *296*. *297*. *513*.
   5. *Quadratura parabolae*: S. *296*.

4. Barrow, I., *Lectiones geometricae: In quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur*. London 1670. Titelauflage in: *Lectiones XVIII ... in quibus opticorum phaenomenωn genuinae rationes investigantur, ac explicuntur. Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*. London 1672 [Marg.]: N. 43*. S. *313*. *563*. — Ergänzte Titelauflage in: *Lectiones opticae et geometricae*. London 1674; Nachdr. der *Lectiones geometricae Hildesheim* [u. a.] 1976: S. *301*. 309.

– Bartholin, R. [Hrsg.] s. SV. N. 9,1.

5. Bertet, J., Bertet an Wallis, 1. Dezember 1671. [Gedr.: SV. N. 38,6 S. 355–358; auch in: *WO* II S. 410–413; Marg.]: S. *442*. — s. a. SV. N. 21,73. 21,76. 38,8.

6. Brouncker, W., Brouncker an Oldenburg, 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6149 f. [Auch in: *OC* X S. 291 f.]: S. *297*.

7. Cavalieri, B.
   1. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologna 1635; 2. Aufl. ebd. 1653: S. *296*. *313*.
   2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647; Nachdr. Urbino 1980: S. *296*.

– Clerselier, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 10,5.

8. Collins, J., Collins an Gregory, 29. Oktober 1675. [Gedr. u. a.: *GT* S. 337–343]: S. *301*. — s. a. SV. N. 38,7.

9. Debeaune, Fl.,
   Schriften:
   1. *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. R. Bartholin. In SV. N. 14,2 Tl II S. 49–152: S. 21. *22*.
   Briefe:
   2. Debeaune an Roberval, 16. Oktober 1638. [Gedr.: *DO* V S. 517–524; auch in: Mersenne, *Correspondance* VIII, S. 139–152): S. *600*.
   — s. a. SV. N. 10,7.

10. Descartes, R.
    Schriften:

1. *Discours de la Methode ... Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode.* Leiden 1637 [auch in *DO* VI S. 1–515.]; Nachdr. Osnabrück 1973; Lecce 1987. [Darin SV. N. 10,2. 10,3.]

2. *La Dioptrique.* In SV. N. 10,1 S. 1–153 (2. Zählung) [auch in *DO* VI S. 79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N. 10,4 S. 71–206 [auch in *DO* VI S. 584–650]: S. 141.

3. *La Géométrie.* In SV. N. 10,1 S. 297–413 (2. Zählung) u. ö. [auch in *DO* VI S. 367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N. 14,1 S. 1–118.; 2. Ausg. in SV. N. 14,2 Tl I S. 1–106 [Marg.]: N. 4*. 14*. 17*. S. *14*. 15. *77*. *85*. 92. *96*. *97*. *98*. *103*. *202*. *208*. *342*. *343*. *607*.

4. *Specimina philosophiae.* Amsterdam, 1644 u. ö.

5. *Lettres.* Hrsg. Cl. de Clerselier. 3 Bde. Paris 1657–67 [Marg.]; Nachdr. Lecce 2005; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae.* Amsterdam 1668–82: N. 90*. S. *84*. *449*. *463*. 598 f. 602. [Darin SV. N. 10,6–9.]

B r i e f e :

6. Descartes an Mersenne, 23. August 1638. [Gedr. SV. N. 10,5 S. 350–363; auch in: *DO* II S. 307–343; Mersenne, *Correspondance* VIII, S. 34–69]: S. *369*. 598.

7. Descartes an Debeaune, 20. Februar 1639. [Gedr. SV. N. 10,5 S. 409–416; auch in: *DO* II S. 510-523]: S. *179*. 598 f. *600*. *602*.

8. Descartes an (?), Juni (?) 1645. [Gedr. SV. N. 10,5 S. 458–460; auch in: *DO* IV S. 227 bis 232]: S. 599. 602. *605*.

9. Descartes an Carcavy, 17. August 1649. [Gedr. SV. N. 10,5 S. 443–450; auch in: *DO* V S. 391-401]: S. 599.

11. *D i v e r s ouvrages de mathematique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences.* Paris 1693. [Darin u. a.: Huygens, Chr., SV. N. 20,2 u. 20,3. Roberval, G. P. de, SV. N. 30,1.]

12. Euklid, *Elemente*: S. *296*.

13. Fabri, H.

1. *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide.* Rom 1659; 2. Aufl. in SV. N. 13,3 [Marg.]: S. *510*. *511*. *514*.

2. *Dialogi physici.* [Tl 1]: *In quibus de motu terrae disputatur.* Lyon 1665: S. 445. — [Tl 2]: *Quorum primus est de lumine. Secundus et tertius, de vi percussionis et motu. Quartus, de humoris elevatione per canaliculum. Quintus et sextus, de variis selectis.* Lyon 1669: S. *442*.

3. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae.* Lyon 1669 [Marg.]: S. *510*. *511*. *514*.

14. *G e o m e t r i a*

1. *Geometria,* a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: Descartes, R., SV. N. 10,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; Schooten, Fr. v., SV. N. 32,1; ders., *Additamentum.* S. 295–336]

2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletorioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: Descartes, R., SV. N. 10,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*; Schooten, Fr. v., SV. N. 32,1; ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione.* 2. Aufl.; ders., *Additamentum*; Hudde, J., SV. N. 19; Heuraet, H. v., SV. N. 18. In Tl II: Schooten, Fr. v., *Principia*

matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl.; ders., *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico.* Hrsg. P. v. Schooten; Debeaune, Fl., SV. N. 9,1; Witt, J. de, SV. N. 40.]: S. 84. 234.

15. Gregory, J.
1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura.* Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: S. *115. 296. 313. 332. 336.* 337. *351. 352. 354.*
2. *Geometriae pars universalis.* Padua 1668 [Marg.]: S. *115. 272. 296. 297. 313.* 340. *346.*
3. *Exercitationes geometricae.* London 1668 [Marg.]: N. 47*. S. *115. 296. 313.*

16. Guldin, P., *Centrobaryca.* Bd 1, Buch I, Wien 1635; Bd 2, Buch II–IV, Köln 1640–1641.: S. *297. 434. 436. 508. 516. 521. 528. 554.*

17. Herigone, P., *Cursus mathematici tomus sextus ac ultimus, sive supplementum.* Paris 1644: S. *84. 463.*

18. Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas.* In SV. N. 13,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *8. 132. 138.* 234. *297. 374. 393.*

19. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit.* In SV. N. 14,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. *14. 59.* 84. *145. 214. 343. 583. 616. 620.*

20. Huygens, Chr.
Schriften:
1. *De circuli magnitudine inventa.* Leiden 1654 [auch in *HO* XII S. 113–181]: S. 115. *296.*
2. *Demonstratio regulae de maximis et minimis.* 1667. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 326–330; auch in: *HO* XX S. 229–241]: S. *465.*
3. *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum.* 1667. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 330 bis 335; auch in: *HO* XX S. 243–255]: S. *465.*
4. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae.* Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. *15. 31.* 115. *135. 136. 272. 282. 297. 535.*
5. *Ovale de Descartes en verre.* 1676/1677 u. 24. März 1678. Ms. [Gedr.: *HO* XIX S. 424 bis 426]: S. *15.*
6. *Traité de la lumiere.* Leiden 1690. Nachdr. u. a. London 1966; Brüssel 1967; Eindhoven 1980; [auch in: *HO* XIX S. 451–537]: S. *15.*
Briefe:
7. Huygens an Oldenburg, 27. September 1672. [Gedr. u. a.: *HO* VII S. 228 f.; mit engl. Übers. auch in *OC* IX S. 247–251]: S. *62.*
— s. a. SV. N. 21,79. 21,80.

21. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Observata Philosophica in Itinere Anglicano sub initium anni 1673.* Januar bis Februar 1673. Ms. [Gedr. tlw. C. I. Gerhardt, *Leibniz in London*, 1891, S. 165 f.]: S. *301.*
2. Zu Fabri, *Synopsis geometrica.* Frühjahr 1673. Marginalien. [Gedr.: VII, 4 N. 1 S. 3–26]: S. *510.*
3. Zu Huygens, *Horologium oscillatorium.* April/Mai 1673. Marginalien. [Gedr.: VII, 4 N. 2 S. 27–47]: S. *136. 282.*
4. Zu Mercator, *Logarithmotechnia*, und zu Ricci, *Exercitatio geometrica.* Marginalien. Frühjahr 1673. [Gedr.: VII, 4 N. 3 S. 48–56]: S. *296. 332. 468.*
5. *Theoremata notabilia ex Fabrio, Slusio et Gregorio Scoto.* Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 8 S. 89–92]: S. *332.*
6. *Mathematicae collectionis plagulae* I. Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 16 S. 256–331]: S. *332.*
7. *Mathematicae collectionis plagulae seiunctae.* Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 17 S. 332–360]: S. *236. 332.*
8. *Varia ad cyclometriam* II. Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 22 S. 391–408]: S. *332.*

9. *De conchoeide.* Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 24 S. 415–420]: S. *332.*

10. *De ductibus.* Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 26 S. 425–464]: S. *184.*

11. *Trigonometria inassignabilium.* Sommer 1673. Ms. [Gedr. VII, 4 N. 27 S. 465–500]: S. *19. 184. 292. 305. 332. 339.*

12. *Triangulum characteristicum ellipsis.* Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 28 S. 501 bis 517]: S. *31.*

13. *Triangulum characteristicum speciatim de trochoidibus et cycloide.* Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 29 S. 518–535]: S. *535.*

14. *Annotationes ad Honoratum Fabri et Wallisium. De hyperbola.* Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 34 S. 568–583]: S. *503. 533.*

15. *De paraboloeidum et hyperboloeidum quadratura III.* Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 39 S. 617–655]: S. *236. 294. 314.*

16. *Methodus tangentium inversa seu De functionibus.* August 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 40 S. 656–710]: S. *97. 102. 204. 355.*

17. *Characteristica geometrica. De lineis et angulis.* Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 9 S. 109–119]: S. *92.*

18. *Ex datis tangentibus invenire figuram.* Herbst 1673. Ms. [Gedr. VII, 4 N. 41 S. 711 bis 724]: S. *14. 62.*

19. *Prima circuli quadratura.* Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 42 S. 725–753]: S. *101. 109. 296.*

20. *Varia circa functiones tang. invers. quad. circ. et hyperb. ex se invicem.* Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 44 S. 755–761]: S. *100.*

21. *De quadratura circuli et hyperbolae et aliis curvis inde pendentibus.* Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 45 S. 762–770]: S. *310.*

22. *Curva quam P. Berthet Osannae proposuerat.* Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 50 S. 808–812]: S. *317. 318.*

23. *Radicum extractio per seriem infinitam.* Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 32 S. 346 f.]: S. *3.*

24. *De radicibus ex binomiis quantitatibus extrahendis specimen universale.* Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 33 S. 348–352]: S. *3.*

25. *De appropinquatione circuli per seriem II.* Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 34 S. 353–360]: S. *3.*

26. *De polygonis circuli deque magno theoremate trigonometrico. Continuatio secunda animadversionum ad tentamen sextum. De summa quadratorum aequanda numero dato.* 25. August 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 47_{10} S. 308–317]: S. *411.*

27. *De serierum summis et de quadraturis plagulae quindecim.* Okt. 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 38 S. 382–554]: S. *96. 104. 107. 132. 311. 422.*

28. *Arithmetische Kreisquadratur.* Okt. 1674. Ms. [Gedr.: III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. *109.*

29. *Duo quadrati aequales numero dato.* August – Oktober 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 64 S. 463 f.]: S. *112.*

30. *De aequationum divisoribus.* Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 141 S. 904 f.]: S. *229.*

31. *Calculus per instrumenta.* Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 142 S. 902 f.]: S. *113. 115.*

32. *Aequationis cubicae divisor.* Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 4 S. 34]: S. *113. 115.*

33. *Schediasma de divisionibus aequationum ope diversarum literarum.* Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 143 S. 906–910]: S. *229.*

34. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa.* Dez. 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 39 S. 555–574]: S. 120. *130. 140. 143.* 179. *180. 181. 229. 395.*

35. *De la methode de l'universalité.* ca. 1674. Ms. [Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, S. 97–122]: S. *224.*

36. *Les inventions belles et ingenieuses.* 19. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: J. E. HOFMANN, *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz* , 1970, S. 104]: S. *248.*

37. *Über Gespräche mit Tschirnhaus, Mathion und Justel.* Am oder kurz nach dem

19. Oktober 1675. Ms. [Gedr. VI, 3 N. 33_3 S. 382–384]: S. *248*.

38. *De superficiebus coniformium rectilineorum inprimis cono scaleno*. 30. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 16 S. 149–155]: S. *297*.

39. *Modus datis duabus figuris inveniendi proprietatem communem, ut nullis aliis quam ipsis communis sit*. 31. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 17 S. 156–158]: S. *296*.

40. *Trisectio radicum*. Oktober (?) 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 53 S. 704–709]: S. *298*.

41. *De quantitatibus irrationalibus. De resolutione aequationum*. Oktober (?) 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 54 S. 710–712]: S. *298*. *431*.

42. *De inventione theorematum elegantium*. Um den 22. November 1675 [noch]. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 51 S. 697–699]: S. *341*.

43. *Tangentium applicatio ad numerorum series*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 50 S. 691–696]: S. *355*.

44. *Imaginariae*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 61 S. 745 f.]: S. *372*.

45. *Quantitates imaginariae*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 62 S. 747–753]: S. *372*.

46. *Wallisii series interpolanda pro circulo. Fractionum resolutio dividendo per fractiones. Osannae methodus cum summa numerorum quadratus, alia Diophantea*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 85 S. 569–575]: S. *350*. *352*. *420*.

47. *Connexio inter bisectionem anguli et bisectionem rationis*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 20 S. 174 f.]: S. *428*. *432*.

48. *Modus quaerendi per analysin problema pythagoricum*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 21 S. 176 f.]: S. *428*. *432*.

49. *Pro dimetiendis triangulorum sphaericorum areis*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 22 S. 178 f.]: S. *443*. *444*.

50. *De constructione quantitatum irrationalium*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 72 S. 839]: S. *434*. *439*. *441*.

51. *De aequatione resolvenda sexti gradus*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 73 S. 840 f.]: S. *434*. *439*. *441*.

52. *De aequatione sursolida interrupta*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 74 S. 842–844]: S. *434*. *439*. *441*.

53. *Numeri progressionis harmonicae*. 8. Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 54 S. 715 bis 730]: S. *445*.

54. *Progressionis harmonicae proprietas*. Am oder kurz nach dem 8. Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 55 S. 731–733]: S. *445*.

55. *Linea interminata*. April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 65 S. 485–489]: S. *509*.

56. *De formis seu attributis dei*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 72 S. 513 bis 515]: S. *509*.

57. *De reminiscentia et de reflexione mentis in se ipsum*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 73 S. 515–517]: S. *509*.

58. *Quadratura arithmetica circuli et hyperbolae*. 3. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 58 S. 749–754]: S. *510*. *515*.

59. *Series convergentes duae*. Um den 24. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 64 S. 799–801]: S. *536*.

60. *De angulo contactus*. Um den 24. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 32 S. 205]: S. *536*.

61. *Nova consideratio de locis*. 5. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 30 S. 201 f.]: S. *552*.

62. *Clavis constructionum et descriptionum per parallelogramma rigida*. Frühjahr bis Sommer 1676 (?). Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 31 S. 203 f.]: S. *557*.

63. *Series convergentes seu substitutrices*. 26. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 60 S. 757 bis 767]: S. *559*. *561*.

64. *De figurarum areis per infinitas series exprimendis*. 28. Juni 1676 – 29. November 1678 und danach. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 61 S. 768–782]: S. *562*.

65. *Theorema analyticum de maximis et minimis*. April – Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 65 S. 802–804]: S. *480*.

66. *De generalibus calculis constituendis*. Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 42 S. 606]: S. *598*.

603. 606. 607.

67. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Ende 1675 bis Herbst 1676. Ms. [Gedr.: Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 = Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge Nr. 43]: S. *441. 443. 449. 480. 514. 602. 609.*

68. *Series differentiarum generalis.* März bis August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 67 S. 809–813]: S. *611.*

69. *De summis serierum generalissima.* August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 68 S. 814 bis 823]: S. *611.*

B r i e f e :

70. Leibniz für Gallois, Ende 1672. [Gedr.: II, 1 (1926), S. 222–229; II, 1 (2006), S. 342 bis 356; III, 1 N. 2 S. 1–20]: S. *422.*

71. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 17 S. 83–89; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 593–601]: S. *301.*

72. Oldenburg an Leibniz, 10. Oktober 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 65 S. 286–302; mit engl. Übers in *OC* XI S. 517–521]: S. 297.

73. Leibniz an Bertet, ca 3. November 1675. [Gedr.: III, 1 N. 68 S. 308–310]: S. *317.*

74. Leibniz an Oldenburg, 28. Dezember 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 70 S. 326–334]: S. *502.*

75. Leibniz an [Gallois?], Ende 1675. [Gedr.: III, 1 N. 73 S. 355–363]: S. *538.*

76. Bertet für Leibniz, ca 9. Februar 1676. [Gedr.: III, N. 6 S. 366–370]: S. *434. 442.*

77. Leibniz an Oldenburg, 28. November 1676. [Gedr. u. a.: III, 5 N. II S. 5–11]: S. *15. 619.* 622.

78. Tschirnhaus an Leibniz, 27. Januar 1678. [Gedr. u. a.: III, 2 N. 134 S. 314–333]: S. *267.*

79. Huygens an Leibniz, 22. November 1679. [Gedr. u. a.: III, 2 N. 359 S. 886–890; *HO* VIII S. 243–245]: S. *15.*

80. Leibniz an Huygens, 6. Februar 1691. [Gedr. u. a.: III, 5 N. 6 S. 38–51; *HO* X S. 9 bis 16]: S. *420.*

22. Léotaud, V., *Cyclomathia seu multiplex circuli contemplatio.* Lyon 1663: S. *508.*

23. Mercator, N., *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis ... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum ... Huic etiam jungitur Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis ...* London 1668 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1975: S. *296. 332. 422.*

24. Mersenne, M., *L'optique et la catoptrique.* Paris 1651: S. 91. — s. a. SV. N. 10,6.

25. Newton, Isaac, *A Letter ... containing his New Theory about Light and Colours.* In: *Philosophical Transactions* vol. 6, 1671/1672, S. 3075–3087: S. *142.*

– Oldenburg, H., s. SV. N. 6. 20,7. 21,71. 21,72. 21,74. 21,77. 38,9. 41,2.

– Ozanam, J., s. SV. N. 21,22. 21,46.

26. Pappus, *Mathematica collectio*: S. *203. 508.*

27. Pascal, Bl.

1. *Lettres de A. Dettonville.* Paris 1659. Nachdr. London 1966. [Darin mit separater Paginierung: SV. N. 27,2; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hugguens de Zulichem.* Paris 1659; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Sluze Chanoine de la cathedrale du Liège.* Paris 1658; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S.* Paris 1658; auch in: *PO* VIII S. 325–384 u. IX S. 1–149.]

2. *Lettre de A. Dettonville a Monsieur de Carcavy.* Paris 1658. In: SV. N. 27,1. [Darin mit separater Paginierung: *Lettre de Monsieur de Carcavy à Monsieur Dettonville; Lettre de Monsieur Dettonville, à Monsieur de Carcavy; Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets; Propriétéz des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*; SV. N. 27,3; *Petit traité des solides circulaires*; SV. N. 27,4.]

3. *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle.* In: SV. N. 27,2. [Auch in:

PO IX S. 60–104]: S. *554*.
4. *Traitté general de la roulette*. In: SV. N. 27,2. [Auch in: *PO* IX S. 116–133]: S. *514*.

28. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.:
— 21. Juni/1. Juli 1669: S. *533*.
— 19./29. Februar 1671/1672: S. *142*.
— 20./30. Januar 1672/1673: S. *62. 109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620.*
— 23. Juni/3. Juli 1673: S. *109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620.*
— 17./27. November 1673: S. *297*.

29. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. London 1668 zus. mit SV. N. 23 [Marg.]: S. *332. 468*.

30. Roberval, G. P. de
Schriften:
1. *Observations sur la composition des mouvemens, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 69–111]: S. 502. *502*.
Briefe:
2. Roberval an Torricelli, 1. Januar 1646 [Gedr. u. a.: Torricelli, *Opere* III, S. 349 bis 356; Mersenne, *Correspondance* XIV, S. 1–25]: S. *508*.
— s. a. SV. N. 9,2.

31. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: S. *262. 291. 296. 313. 314. 350*.

32. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 14,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 14,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *80. 84. 85.* 103. *123. 127. 179. 207.* 281. *284. 369. 463*.
2. [Hrsg.] SV. N. 10,3. 14. 37,2. 40.

33. Sluse, R.-Fr. de
1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. *400. 437. 468*.
2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius ... to the Publisher ... concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometricel curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672/1673, S. 5143–47; Nachtrag *a. a. O.* vol. 8, 1673, S. 6059: S. *62. 109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620*.

34. Snell van Royen, W., *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. *115. 296*.

35. Tacquet, A., *Cylindricorum et annularium libri IV*. Antwerpen 1651 u. 1657. — *Liber V*. Ebd. 1659. [Auch in: Tacquet, *Opera mathematica*. Antwerpen 1669]: S. *297. 553. 557*.

36. Tschirnhaus, E. W. v.
Schriften:
1. *Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi*. In: *Acta Eruditorum*, Dez. 1682, S. 391–393: S. *347*.
2. *Medicina mentis*. Amsterdam 1687. Erweiterte Ausgabe Leipzig 1695: S. *436*.
Briefe:
3. Tschirnhaus an Oldenburg, Anfang Juli 1675. [Gedr. u. a.: *OC* XI S. 397–401]: S. *347*.
4. Tschirnhaus an Pieter van Gent, 19. Dezember 1675. Ms. [Faksimiledruck in: Tschirnhaus, *Briefe*, S. 13–15]: S. *346*.
— s. a. SV. N. 21,41. 21,44. 21,45. 21,54. 21,68. 21,69. 21,78.

37. Viète, Fr.
1. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 37,2 S. 347–435: S. *115*.
2. *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1970. [Darin u. a. SV. N. 37,1.]

38. Wallis, J.
Schriften: 1. *De sectionibus conicis*. Oxford 1655. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in: *WO* I S. 291–354; Marg.]: S. *199*.
2. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch

in: *WO* I S. 355–478; Marg.]: S. *199. 296. 313. 329. 402. 419. 442.*

3. *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum.* Oxford 1658; [auch in *WO* II S. 757–860, Marg.; WALLIS, *Correspondence* I S. 275–278, 281–300, 302–393, 397–496]: S. 340. *402.*

4. *Tractatus duo, prior de cycloide ... Posterior ... de cissoide.* Oxford 1659; [auch in *WO* I S. 489–569; Marg.]: S. *272. 297. 514.*

5. *Mechanica sive de motu tractatus geometricus.* 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S. 570–1063; Marg.]: S. *199. 297. 313. 442. 514. 533.*

6. *A Treatise of Algebra*, 1685. [Erweiterte lat. Übers. in *WO* II S. 1–482; Marg.]: S. *442.*

B r i e f e :

7. Wallis an Collins, 18. September 1668. [Gedr. u. a.: WALLIS, *Correspondence* II, S. 596–601]: S. *332.*

8. Wallis an Bertet, 29. Dezember 1671. [Gedr.: SV. N. 38,6 S. 358–362; auch in: *WO* II S. 414–417; Marg.]: S. *442.*

9. Wallis an Oldenburg, 14. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6146–6149. [Mit engl. Übers. auch in: *OC* X S. 276–283]: S. *297.*

— s. a. SV. N. 5.

39. WHITE, R., *Hemisphaerium dissectum. Opus geometricum in quo obiter tractatur de maximis inscriptibilibus, et minimis circumscribentibus ... Accessit Appendix de inscriptione in sphaera coni scaleni, et de superficie eius.* Rom 1648: S. *297.*

40. WITT, J. de, *Elementa curvarum linearum.* Hrsg. Fr. v. Schooten. In SV. N. 14,2 Tl II S. 153–340: S. 124.

41. WREN, Chr.

S c h r i f t e n :

1. *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici.* In: *Philosophical Transactions* vol. 4, 1669, S. 961 f.: S. *533.*

B r i e f e :

2. Wren an Oldenburg, ca 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6150. [Auch in: *OC* X S. 292]: S. *297.*

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXXI f. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

aequatio
absurda: S. 148. 152.
acephala: S. 77.
ad superficiem: S. 94.
affecta: S. 77. 86.
analytica: S. 192.
arbitraria: S. 22.
collatitia: S. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 66. 98. 106. 183. 231.
continua: S. 74.
cubica: S. 80. 230.
definita: S. 289.
differentialis: S. 616.
divisibilis: S. 44. 289.
factitia: S. 106.
finita: S. 289.
generalis: S. 75. 98. 102. 149 f. 157. 226. 295. 371. 396. 413. 560. 591.
hemicephala: S. 74.
hians, hiatica: S. 74. 79.
identica: S. 23. 84. 217. 225 f. 576.
imaginaria: S. 233.
impossibilis: S. 73. 220. 458. 480.
inadaequata: S. 361. 366.
indefinita: S. 75. 289. 294 f.
indivisibilis: S. 289.
infinita: S. 289.
linearis: S. 50.
notabilis: S. 587.
plana: S. 555.
plena: S. 73. 74 f.
pura: S. 77. 79 f. 84. 86. 91. 177. 180. 216.
quadratica: S. 79 f. 180.
quadraturarum: S. 407.
semiplena: S. 73. 74.
similis: S. 44. 45. 71. 74–77. 84. 85. 97. 105 f. 623.
simplex: S. 50. 616.
tetragonistica: N. 55*. 60*. S. 293. 400. 419.
transcendens: S. 548. 606.
Algebra: S. 31.
s. a. Gleichung. Wurzeln.
amphibolia: S. 28.
Amsterdam: S. *619*. 622.
analogia (Proportionalität): S. 110. 231. 233. 340. 412. 493 f.
s. a. Verhältnisrechnung.
Analogie: S. 92. 302. 307. 334. 337.
analysis: S. 31. 73. 132. 233. 321. 323. 333. 487. 539. 541 f. 544.
communis: S. 204.
mirabilis: S. 505.
nostra: S. 546.
quadraturarum: S. 538. 547.
tetragonistica: N. 38*. 40*. 44*. 79*. S. 398.
Analysis situs: S. 526.
s. a. *characteristica*.
analytica quadraturarum: S. 413.
antiparabola s. Hyperbel, höhere, quadratische.
apex
centrobarycae: S. 264. 266.
geometriae: S. 143.
applicata obliqua: S. 260.
s. a. Koordinaten, schiefwinklige.
arithmetica infinitorum: S. 31. 429.
Arithmetik s. Bruch. Neunerprobe. Wurzelziehen.

ars
analytica: S. 148. 471.
describendi: S. 602.
tentamentorum: S. 479.
Atomisten: S. 302.
axis
aequilibrii: S. 265.
conjugatus: S. 316. 391 f. 401. 403. 408–410. 414.
directus: S. 184. 391.
librationis: S. 265–267.
reciprocus: S. 184. 186.

Bertetsche Kurve: N. 45*. 63*.
Fadenkonstruktion: S. 319.
Quadratur: S. 319 f.
Tangente: N. 63*. S. 318 f.
Bewegung (*motus*, *mouvement*): S. 90. 129 f. 192. 202 f. 268. 291. 302. 366. 371. 441. 472. 501. 527 bis 529. 532–534. 536. 563. 575. 589.
Bewegungsgröße: S. 522. 527.
Drehbewegung: S. 268. 302. 528. 532 f.
einfache: S. 302.
Fall: S. 11–13.
Freiheitsgrad: S. 268.
geradlinige: S. 532.
Geschwindigkeit: S. 501.
gleichförmige: S. 11. 94. 328. 501.
kontinuierliche: S. 202 f.
zusammengesetzte: S. 158. 302. 371. 502. 523. 529. 611.
s. a. *compositio motuum. concursus motuum.* Kurven, Konstruktion. *motus*. Pendelbewegung.
Beweis, Beweise
allgemeiner: S. 551.
der Unmöglichkeit: S. 561.
durch Rechnung: S. 460 f.
geometrischer: S. 343.
Methode: S. 410. 481.
Sätze über Eigenschaften von Gleichungen: S. 73.
Sätze von Archimedes über Konoide und Sphäroide: S. 31.
Sätze von Archimedes über Kugel und Zylinder: S. 31. 267.
Satz von Saint-Vincent über Hyperbelquadratur: S. 262.
von Archimedes für die Mantelfläche eines Kugelsegments: S. 554.
von Bertet für Ausflusskurve: N. 64*.
von Descartes für Lösung inverser Tangentenprobleme: S. 16.
von Guldin für Hebelgesetz: S. *434*. 436.
von Newton für Dispersion des Lichts: S. 142.
von Rømer für Hebelgesetz: S. 420 f.
von Tacquet für Schwerpunkt des Halbkreisbogens: S. 557.
Binom, Binome: S. 26. 27.
cardanisches: S. 41.
Potenzen: S. 454–456. 459–467. 479 f.
Bogen, gespannter: S. 522. 525. 533.
brachylogia: S. 56. 58. 166. 285.
Brennspiegel
Oberfläche: S. *91*.
Bruch, Brüche: S. *67*. 68. 264. 422. 595. 614.
Näherung durch geometrische Reihen: N. 57*.

calculus
analyticus: S. 114. 125. 217.
differentialis: N. 60*. S. 310.
tangentium: N. 96*.
transcendens: S. 607.
differentiarum: N. 53*. S. 613.
generalis: S. 162. 265. 290. 295. 351. 547. 586. 590.
indefinitus: S. 114.
mirabilis in se reflexus: S. 223.
non tetragonisticus: S. 444.
novus: S. 292. 505.
per lineas: S. 21.
per literas: S. 21.
simplex: S. 366.
tetragonisticus: S. 444.
universalis: S. 615.
verus: S. 58. 164.
campus analyticus novae geometriae: S. 193.
catalogus
curvarum tangentiumque: S. 387.
omnium curvarum quadrabilium: S. 613.
centrobaryca: N. 38*. 44*. S. 416. 552.

nova: N. 87*. S. 563.
centrum agitationis s. Stoßmittelpunkt.
centrum gravitatis s. Schwerpunkt.
cercle generateur: S. 439.
character analyticus: S. 31.
characteristica
geometrica: S. 92. 281.
in lineis: S. 244.
s. a. Analysis situs.
circulus generator: S. 129. 513 f.
clavis vera: S. 547.
combinatio subcontraria: S. 244.
compendium: S. 58. 63. 106. 114. 127. 325. 341. 594.
calculi: S. 66. 314.
constructionum: S. 79.
Huddenii: S. 214.
compositio motuum: S. 158. 302. 502. 611.
concursus motuum: S. 302.
coniforme: S. 267 f.
ellipticum: S. 267.
conoeides: S. 31. 90 f. 94. 267. 296 f. 536.
constitutio aequationum: S. 21 f.
constructio aequationum s. Gleichung, Konstruktion.
conus: S. 26. 111. 239. 241. 267. 297.
rectus: S. 239. 267.
scalenus: S. 267. 297. 536.
corps: S. 420.
corpus: S. 292. 302. 521–524. 527. 534.
crementum s. Differenzen, Zuwächse.
curva
analytica: N. 13*. 26*. S. 92. 139. 192 f. 322. 380. 387. 392. 486. 589. 596.
quadrabilis: S. 392.
simplex: S. 485–488. 589.
simplex rationalis: S. 473–475. 481. 485.
commensurabilis: S. 254.
concava: S. 252. 410.
construens: S. 132.
convexa: S. 252. 410.
describens: S. 129. 157 f. 192–194.
descriptrix: S. 157.
excipiens: S. 194.
generatrix: S. 370 f.
geometrica: S. 92. 116. 139. 322. 380.
homogenea: S. 8–10. 13. 138 f. 156. 177.
homologa: S. 7–11.
imaginaria: S. 353.
indeterminata: S. 288.
materialis: S. 319. 366.
mensurabilis: N. 30*.
non analytica: S. 139.
non descriptibilis: S. 269.
non geometrica: S. 139.
non transcendens: S. 387.
parallela: S. 531 f.
protensa: N. 45*.
quadrabilis: S. 234. 394. 396. 538. 613.
quadratrix: S. 10. 203. 269. 590.
rationalis: S. 472 f. 551.
reciproca: S. 475. 478.
rectificabilis: S. 269.
recurrens: S. 110.
recurvata: S. 110.
semianalytica: S. 192 f.
similis: S. 129. 193.
solida: S. 89.
sygnota: S. 168.
transcendens: S. 422. 607.
vix tractabilis: S. 395.

Definition
der Quadratrix der Hyperbel: S. 13.
von *curva rationalis*: S. 473.
von *dignitas*: S. 468.
von *figura simplex*: S. 450.
von *latus lineae*: S. 456 f.
von *ordinata*: S. 467.
von *potentia*: S. 468.
von *potentia lineae*: S. 456 f.
von *similitudo rerum*: S. 411.
differentia, differentiae
homogenea: S. 100. 157.
temporum: S. 12.
Differentialgleichung: N. 55*. S. *66*. *325*. 326–328. 343 f. 365 f. 385 f. 394. 396 f. 506. 542. 588 f. 599 bis 601. 603. 615–617.
s. a. *aequatio tetragonistica*.
Differentialrechnung: N. 96*. S. 607 f.
Differentiationsregeln

Kettenregel: S. 614.
Potenzregel: S. 603. 612 f.
Produktregel: S. 328–330. 365.
Quotientenregel: S. 328–330. 593–595.
Notation: S. 293 f. 322. 324. *332*.
Zusammenhang mit Integralrechnung: N. 89*. S. 204. 293 f.
s. a. *calculus differentialis*. *calculus differentiarum*. Tangenten.
differentiola: S. 535. 570.
Differenz, Differenzen: S. 262. 400. 535. 608. 622.
von Abszissen bzw. Ordinaten: N. 5*. 22*. 94*. S. 7. 32. 35. 37. 100 f. 103 f. 260. 293 f. 311. 313. 353. 354. 367–371. 383. 386. 394 f. 501. 503. 538. 567. 601. 606. 615.
Quadrat der Ordinate: S. 19. *25*.
von Reihengliedern: S. 293. 355. 606.
Zuwächse: S. 130. 143. 184. 187. 190 f. 203 f.
Differenzenfolgen: S. 606.
Differenzenschema: S. 6.
dignitas: S. 454. 468 f. 474–476. 481. 485.
Dimensionen: S. 84. 167. 199. 230. 235. 292. 293. 395. 471 f. 485. 583. 599.
Dioptrik: S. 15. 141.
Dreieck, Dreiecke
ähnliche: S. 17. 42. 124 f. 136. 141. 158. 161. 162. 184. 186. 187. 195. 244 f. 257. 294. 312. 318. 339. 350. 367. 374. 393. 427. 432. 477. 492. 496 f. 503. 505. 535. 555. 564. 600.
charakteristisches: N. 22*. 59*. S. 125. 137–139. 157. 243–246. 253. *254*. 391. 432. 518–521. 527.
s. a. Integralrechnung, Integraltransformation.
einbeschriebenes: S. 349–353.
maximales: S. 350. 548.
Fläche: S. 296. 322.
gleichschenkliges: S. 123 f.
gleichseitiges
Schwerpunkt: S. 420.
rechtwinkliges: S. 17. 112. 141. 241. 544.
Schwerpunkt: S. 362.
Seitenberechnung: S. 520.
Dreieckslehre
der Indivisiblen: S. 351. 361. 367–371.
Dreiseit (*trilineum*): S. 8 f. 12. 249. 511. *511*. 540.
Moment: S. 408–411.
ductus: S. 91. 95. 291. 314. 417. 522. 589 f.

effectus: S. 302. 527.
Ellipse: S. 23. 34. 71. *71*. 95. 111. 129. 164. 238. 247. 254. 255. 260. 400.
Gleichung: S. 35. 48. 70. 155. 282–284.
Konstruktion: S. 533.
Normale: S. 37. 281. 519.
Ordinate: S. 37.
Parameter: S. 280. 287.
Quadratrix: S. 48.
Quadratur: N. 36*. S. 267. 272. 282. 547 f.
Rektifikation: N. 6*. 39*. S. 246 f. 415. 519. 522.
Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 155. 267.
Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 267.
Bogenelement: S. 34 f. 246 f. 274. 278. 521. *521*.
Bogenlänge: S. *34*.
Moment des Bogens: S. *34*. 282. 285. 414.
Schwerpunkt des Bogens: S. 34. *34*. 37.
Sektor: S. 333. 355.
Subnormale: S. 285.
Subtangente: S. 258.
Tangentenrechnung: S. 258. 284 f.
Zentrum: S. 149.
s. a. Kegelschnitt.
Ellipsoid s. Sphäroid.
Engel: S. 602.
Evolute: N. 66*. S. 130. 133–137. *135*. 158. 349. 386. 432. 523. 529 f. 561.
Normale: S. 136.
Quadratur: S. 386.
Tangente: S. 136.
Evolvente: N. 16*. 66*. S. 130. 349. 386. 432. 523. 529 f. 561.
Normale: S. 136.
Quadratur: S. 386.
Subnormale: S. 137.
Tangente: S. 136. 432.
s. a. *curva parallela*.
Exponent: S. 63. 260 f. 454–456. 467–469. 474–476. 478 f. 481–483. 491 f. 577. 589.
Exponentialfunktion: N. 1*.

Extremwerte: N. 24*. S. 14. 109–111. *109*. 342. 350. 444. 449–51. 458. 561. 577. 584. 608.
Bestimmung: S. 198. *199*. 348. 501. 580 f. 583 f.
Methode von Fermat: S. 348. 463–465. 598.
Beweis: S. 463. 465.

Fass: S. 239.
Figur, geometrische s. Dreieck. Dreiseit. *figura*. *gnomon*. Körper, geometrischer. Kreis. Kreispolygon. Parallelogramm. Polygon. Quadrat. Rechteck. Trapez. Treppenfigur.
figura
ambigua: S. 289.
analytica: S. 130. 202. 204. 288. 392. 472. 485 f. 542.
simplex: S. 486.
angulorum: S. 254. 503. *503*.
concava: S. 111.
convexa: S. 111.
corresolubilis: S. 39. 41.
curvilinea: S. 40. 245. 288. 310 f. 398. 509.
describens: S. 157. 387.
dioptrica: S. 15.
finita: S. 353.
generalis: S. 363. 546.
geometrica: S. 3. 14. 202.
homogenea: S. 24. 95. 245. 267. 269. 278 f. 353. 566.
immensurabilis: S. 416.
indefinita: S. 289.
infinita: S. 354.
multilatera: S. 104.
non stationaria: S. 409.
plana: N. 53*. S. 28. 267. 291. 532.
primaria: S. 295.
quadrabilis: S. 5. 39. 77. 202. 204. 236. 269. 288. 369. 394. 401 f. 403. 538 f. 576.
quadranda: S. 290. 622.
quadratrix: S. 8. 10. 13. 202. 269. 288.
rationalis: S. 594.
directa: S. 472.
reciproca: S. 417.
recurrens: S. 40.
retrograda: S. 409 f.
scalaris: S. 547.
secundaria: S. 295.
segmentorum: N. 25*. 31*. S. 10 f. 13. 353 f. *507*.
similis: S. 189. 401.
simplex: N. 68*. S. 486.
sinuum: S. 40. 510. 576.
summatrix: S. 279. 426 f. 594.
sygnota, sygnotos, σύγ(γ)νωτος: S. 88. 117. 331. 392. 413. 416. 419.
sylloga: N. 73*. S. 392.
symmetra: S. 34. 378. 392.
syndota: S. 392.
transcendens: S. 323.
vera: S. 354.
finis centrobarycae: S. 267.
Fläche, gekrümmte: S. 89–92. 291. 315 f. 614.
Erzeugung: S. 291. 302.
Tangentialebene: S. 104. 614.
flexus: S. 560.
contrarius: N. 10*. S. 560.
focus s. Kurve, Brennpunkt.
Folge, Folgen
Bildungsgesetz: S. 352.
Differenzenfolge: S. 351.
diskrete: S. 311. 355.
Fortsetzung: S. 402.
Grenzwert: S. 333. 351. 354.
kontinuierliche: S. 311. 355.
konvergente Doppelfolgen (Gregory): S. 333. 351 f. 354 f. 561.
Methode: S. 351 f. 354 f.
rekursiv definierte: S. 222. 561.
spezielle
$(a+y)(a-y)$: S. *8*. 9.
$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2^{n-1+k}}$: S. 550. *550*.
arithmetische: S. 84. 99–103. 145. 151. 214. 228. 319. 324–328. 343. 364. 377. 566. 591. 609 f. 616–618.
geometrische: N. 57*. S. 3. 6. 260–262. 328. 420. 442. 606.
harmonische: S. 3. 355. 402.
quadratische: S. 609 f.
reziproke figurierte Zahlen: S. 311. 402.

reziproke Polynome ($\frac{1}{y^2-1}$): S. 606.
transzendente: S. 354. 547.
von geometrischen Größen: S. 157. 261.
Bogenelemente: S. 137 f.
Differenzen von Ordinaten: S. 104. 156. 260.
Flächen: S. 104. 262.
Ordinaten: S. 3. 97. 104. 156. 260–262. 393.
Polygone: S. 104. 349.
Tangenten: S. 453.
von Gleichungen: S. 264. 307–309.
forma demonstrandi: S. 481.
formula
arbitraria: S. 85. 607.
generalis: S. 85. 622.
plena: S. 69.
simplex: S. 85. 596.
frustum
conicum: N. 32*.
cylindricum: S. 241.
functio: S. 3. 131.
fundamentum: S. 29. 62. 293.
calculi: S. 240. 294.
Funktion s. *functio*. Kurve.

geometria
hyperbolica: S. 422.
nova: S. 193.
Geometrie: S. 101. 132. 143. 321. 527. 599. 617.
der Indivisiblen: S. 313 f. 351. 523.
Gerade: S. 146. 155. 392. 451.
Gleichung: S. 8. 62 f. 205. 230. 342. 417. 451 f.
Schnittpunkt: S. 265 f.
Tangentenrechnung: S. 205. 330.
Glas, optisches: S. 141–143.
konisches: S. 142.
planes: S. 142.
sphärisches: S. 142.
Gleichung, Gleichungen
Division: N. 28*. S. 233. 289 f. 581. 584.
Eliminierung von irrationalen Termen: S. 173. 218. 235.
Koeffizienten: S. 307.
Koeffizientenvergleich: N. 7_3*. S. 21–23. 44. 48 f. 51–56. *51*. 84. 86 f. 97 f. 103. 105 f. 142. 144 bis 146. 148. 177 f. 183. 228. 231. 288–290. 294. 343. 586. 607 f. 622 f.
Methode von Descartes: S. 22. 343.
Konstruktion: S. 79. 229. 231. 307–309. 547. 612.
kubische: S. 230.
Wurzeln: S. 80.
mit Doppelwurzeln: N. 7_3*. 8*. S. 21–23. 44. 59–63. 83–87. *84*. 94. 108. 142. 144–146. 148–152. *149*. 174–179. 180. 182 f. 210–212. 214. 216. 218. 220. 223–225. 228. 247. 342 f. 585–587. 607.
Methode von Hudde: S. 84 f. 99–103. *100*. 145. 148. 151. 214. 216. 228. 343. *357*. 616.
mit Dreifachwurzeln: S. 588.
mit einer Unbekannten: S. 22. 75 f. 87. 142. 149 f. 199. 342.
mit zwei Unbekannten: S. 21. 62. 73 f. 76. 83. 86 f. 94. 97. 101. 104. 150. 199.
mit mehreren Unbekannten: S. 19. 66. 83. 94. 97 bis 104. 142. 157. 212 f. 214. 216. 218. 220. 222. 233. 560.
mit entgegengesetzten Wurzeln: S. 80. 177. 180.
mit imaginären Wurzeln: S. 229. 233. 372.
quadratische
Wurzeln: S. 79 f. 180. 360.
Substitution: N. 97*.
transzendente: S. 548. 606.
Umordnung: N. 28*.
unendliche: S. 289.
Zerlegung: N. 28*. S. 232.
s. a. *aequatio*. *constitutio aequationum*. Differentialgleichung. Ellipse. Gerade. Hyperbel. Kegel. Kegelschnitt. Konoid. Kreis. Kugel. Kurve. Parabel. Verhältnisrechnung.
gnomon: S. 407 f.
Größe (*magnitudo*): S. 115. 127. 192. 222 f. 245 f. 264 f. 267. 302. 305. 392. 396. 423. 486. 488. 561.
transzendente: S. 561.
Größe (*quantitas*)
geometrische: S. 576.
irrationale: S. 173. 218. 231. 235. 366. 614.
Kontrollgröße: S. 57.

negative: S. 48. 71. 109. 111. 114. 284. 411. 475. 479. 620.
positive: S. 34. 71. 109. 111. 414. 548.
rationale: S. 90. 231. 330. 399. 422. 428 f. 606.
zusammengesetzte: S. 332 f. 351 f. 354. 561.

hastaria s. Konchoide.
Hebelgesetz: S. 420 f. *434*. 436.
Beweis von Guldin: S. *420*. *434*. 436.
Beweis von Rømer: S. 420 f.
Homogenität: S. 292.
Hyperbel (*hyperbola*, *hyperbola conica*): S. 3. 9. 19. 23. 39. 42. 71. *71*. 117. 121. 123–128. 129. 155. 164. 197. 199. 230. 250. 253. 260 f. 307–309. 392. 418. 426 f. 543. 547. 601. 603.
circularis: S. 34. 94. 316.
figura segmentorum: S. 13.
Fläche: S. 241 f. 576.
unbegrenzte: S. 550.
gleichseitige: S. 241. 249. 270–272. 273.
Gleichung: S. 33–37. 48. 65. 70. 155. *155*. 164. 167. 227. 231. 250. *260*. 271. 282. 284. 287. 300. 388. 393. 562.
inverse Tangentenrechnung: S. 65 f. 98–100.
Normale: S. 36. 38. 65. *373*. 374–380.
Ordinate: S. 37. 199. 503.
Differenzen: N. 5*. S. 37. 65. 100 f. 104. 260. 270. 378.
Parameter: S. 34. 94. 121. 241.
Polygon: S. 24.
primaria: S. 297. 313. 316.
s. a. *circularis*.
Quadratrix: S. 8. 11–13. 203. 296.
s. a. Logarithmus.
Quadratur: S. 8. 13. 19. 34. 132. 155. 173. 195. 197. 202 f. 231. 239. 241 f. 249. 261 f. 267. 268. 271. 278. 282. 299. 313. 314. 374. 376. 393. 414. 416 f. 422. 538. 545. 547 f. 561. 570. *570*. 618. 622. *622*.
Abhängigkeit von Kreisrektifikation: S. 174.
Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 129. 167. 543.
Abhängigkeit von Parabelrektifikation: S. 174. 547. 618.
näherungsweise: S. 241. 296.
Reihe: S. 299.
Rektifikation: N. 6*. 39*. 52*. S. 24–26. 173. 195. 297. 415. 533.
Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 155. 267. 271 f. *271*.
Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 267.
Bogenelement: N. 5*. S. 34 f. 37. 41. 270 f. 273 f. 388 f.
Bogenlänge: S. *34*. 41.
Moment des Bogenelements: S. 271. *388*. 389.
Moment des Bogens: S. *34*. 37–40.
Näherung: S. 373.
Schwerpunkt des Bogens: S. *34*. 36–40. 195. 271.
Rollkurve: S. 378–380.
Segment: S. 547.
Fläche: S. 250. 254. 338. 340. 299.
Sektor: S. 249. 333. 336 f. 339. 355.
Subnormale: S. 38. 98. 285. *285*. 376–378.
Subtangente: S. 65. 123. 199. *227*. 249.
Tangente: S. 37. 41. 65. 123–128. 227 f. 270. 373. 376 f.
Tangentenrechnung: S. 37. 199. 249. 284 f. 470 f. 475.
Transmutation: S. 248–250.
ungleichseitige: S. 272.
Zentrum: S. 149. 270.
s. a. Hyperboloid. Kegelschnitt.
Hyperbel, höhere (*hyperboloeides*): S. 8. 19. 77. 117. 201. 307–309. 392. 401. 540.
Differenzen der Ordinaten: S. 595.
kubische: S. 26.
Ordinate: S. 28.
Quadratur: S. 26.
quadratische (*antiparabola*, *hyperbola cubica*): N. 64*.
Fläche eines Segments: S. 262.
Gleichung: S. 262.
Ordinate: S. 100.
Quadratur: N. 65*. S. *434*. 442.
Tangentenrechnung: S. 471.
Quadratur: N. 80*. S. 416. *442*. 538.
Methode von Bertet: N. 64*. S. *434*.
Methode von Wallis: S. 442. *442*.
Tangenten: N. 68*.

Hyperboloid
Oberfläche: S. 65. 125. 296 f. 533.
s. a. Konoid.

incrementum s. Differenzen, Zuwächse.
indeterminata
correctangula: S. 403.
transcendens: S. 560.
index: S. 413. 577. 589–592.
Indivisiblen: S. 302. 313. 325. 349.
s. a. Dreieckslehre der Indivisiblen. Geometrie der Indivisiblen.
Induktion: S. 329. 402.
infinitesima
axis: S. 353. 362.
temporis: S. 12.
Infinitesimalen s. *differentiola*. Differenz. *infinitesima*. unendlich (klein).
Instrument zur Konstruktion von Gleichungen: S. 612.
Integralrechnung
Integraltransformation
algebraische Umformungen: N. 28*. 29*. 54*. 85*.
charakteristisches Dreieck: N. 59*. S. 253 f. 257.
Transmutationssatz: N. 25*. 31*. 34*. S. 181 bis 183. 185. 244. 294. 314. 346 f. 352–354. 359. 519. 509. 537.
Integrationsregeln: S. 293. 562.
partielle Integration: S. 263 f. 268. 292.
Potenzregel: S. 291–294. 304 f. 359. 612 f.
Produktregel: S. 290 f. 293. 328 f.
Summenregel: S. 294.
Notation: S. 264. 292–294. *301*. 322. *332*. 400.
Zusammenhang mit Differentialrechnung: N. 89*. S. 204. 293 f.
s. a. *calculus tetragonisticus*. Differentialgleichung. Komplanation. Quadratur. Rektifikation. Tafelwerke. Tangentenmethode, inverse.
Interpolation, Wallissche: S. 402.
irrationalitas: S. 235. 366.

Kegel: S. 26. 111.
allgemeiner: S. 267 f.
gerader: S. 267.
Volumen eines Abschnitts: N. 32*.
Huf bzw. Stumpf: S. 26.
Oberfläche: S. 267. 297.
Gleichung: S. 90.
schiefer: S. 267.
Oberfläche: S. 297. 536.
s. a. *conus*.
Kegelschnitt: S. 31. 110 f. 142. 168. 281. 296. 541.
Gleichung: S. 31. 35. 190. 205. 343. 382. 413.
Moment der Zuwächse: S. 184. 190.
Normale: S. 413.
Ordinate: S. 31 f. 35.
Differenzen: S. 32. 35.
Quadratur: N. 41*. S. 129. 168. 184. 189. 190.
Rektifikation: N. 41*. 56*.
Bogenelement: S. 33. 35. *246*. 273 f. 382–385. 413.
Moment des Bogens: S. 287. 413 f.
Rollkurve: S. 385 f.
Differentialgleichung: S. 385 f.
Subnormale: S. 413.
Tangentenrechnung: S. 205–207. 330 f. 382.
s. a. Ellipse. Gerade. Hyperbel. Konoid. Kreis. Parabel.
Körper, geometrischer: S. 291. 302. 534.
Konstruktionsmethode: S. 267 f.
s. a. Fass. *frustum*. Hyperboloid. Kegel. Konoid. Kugel. Paraboloid. Prisma. Rotationskörper. Schiefkörper. *solidum*. Sphäroid. Torus. *ungula*. Zylinder.
Komplanation: N. 41*. 53*. S. 257.
Konchoide: S. 340. 437.
Fläche: S. 339 f. *339*.
Wendepunkt: S. 437.
Zweig (*hastaria*, *piqueline*): N. 88*. S. *345*. 363.
Extremwert: S. 577–584. *581*.
Konstruktion: S. 582.
Konoid: S. *90*. 267.
Oberfläche: N. 6*. 41*. S. 94.
Gleichung: S. 90 f. 94.
Rauminhalt: N. 41*.
schiefes: S. 536.
s. a. *coniforme ellipticum*. *conoeides*. Hyperboloid. Paraboloid. Sphäroid.

Konstruktion: S. 412.
geometrische: S. 115. 131. 343. 350.
s. a. Bertetsche Kurve. Ellipse. Gleichung. Instrument. Körper, geometrischer. Konchoide. Kreis. Kurve. Quadratrix (Dinostratus). Quadratrix (Leibniz). Spirale, Archimedische.
Kontrollgrößen und -zahlen: S. 45. *45*. 47. *47*. 49 bis 51. 56–58.
s. a. *litera fictitia*. *numerus fictitius*. *numerus sumtitius*. *quantitas fictitia*.
Koordinaten: S. 267. 607 f. 614.
Polarkoordinaten: S. 179. 361. 366. 367. 380. 559. 583 f. 608. 609 f. 611. 614.
rechtwinklige: S. 40. 179. *179*. 263. 581. 583 f.
schiefwinklige: S. 179. *179*. 260. 518–521. 546. 600 f. 614.
Koordinatensystem
Transformation: S. 127. *195*. 207. *284*. 591. 607 f.
Methode von Schooten: S. 127. *195*.
Kraft (*vis*): S. 199. 527.
Kreis: S. 42. 43. 66. 70. 71. *71*. 83. 96–98. 129. 142. 149. 153. 188. 189. 219. 308. 372 f. 375 f. 418. 507. 540. 579. 584. 589. 590. 607.
Abszisse: S. *503*.
Evolvente: S. 573.
figura segmentorum: S. 10 f. 101. 237. 300. 435. 507. *507*. 545.
Reihenentwicklung: S. 435.
Fläche: S. 574. 576. *576*.
Gleichung: S. 35. 70. 164. 167. 173. 179. 300. 342. 348. 400. 403.
Halbkreis: S. 94 f. *95*. *156*. 498. 502. 573 f. 576.
Bogen: S. 501. 572. 576. *576*.
Schwerpunkt des Bogens: N. 72*.
Konstruktion: S. 302. 611.
Möndchen: S. 437.
des Hippokrates: S. 436 f.
Normale: S. 375.
Ordinate: S. 7. 7. 116. 311 f. 314. 403.
Differenzen: S. 611.
Moment: S. 401.
Quadrant: S. 94 f. 115. 253. 303. 334–340. 496. 513 f. 563. 565. 576.
Moment: S. 311–313. 405.
Quadratrix: S. 8. 48. 203. 296. 376.
Quadratur: N. 82*. S. 34. 35. 70. 101. *109*. 129. 167. 173. 202 f. 238. 239. 241. 254. 259. 267. 272. 278. 299 f. 376. 401. 403. 405. 414. 416. 499–501. 503. 538. 542. 545. 547. 549. 551. 561. 570. 576. 585. 589. 593. 596. 616.
Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 543.
Abhängigkeit von Kreisrektifikation: S. 174. 547.
Abhängigkeit von Parabelrektifikation: S. 174.
Moment der Fläche: S. 403.
näherungsweise: S. 241. 296.
Radius: S. 556. *556*. 558. 576. *576*.
Rektifikation: S. 7 f. 40. 173. 297. 500. 523. 547. 557. 576. 596.
Bogenelement: S. 34 f. *35*. 275. 277. 373. 499. 507. *507*. 535. 541. 544.
Moment des Bogens: S. 339. 554 f. 558.
näherungsweise: S. 115 f. *609*.
Schwerpunkt des Bogens: N. 82*. 83*.
Unmöglichkeit: S. 606.
Rollkurve: S. 159–164. 173.
Segment: S. 7. 10. 236. 247. 339 f. *339*. 544. 555.
Sehne: S. 95. 498 f. 557. *557*.
Mittelpunktswinkel: S. 381.
Winkel mit der Tangente: S. 381.
Sekante: S. 254. 336 f. 339.
Sektor: S. 240–242. 302. 332 f. 355. 541. 544.
Subnormale: S. 101.
Subtangente: S. 237. 541 f.
Tangente: S. 237. 318. 336–340. 544. 555.
Transmutation: S. 237 f. 253 f. 300. 338–340. 346. 435. 544 f.
Umfang: S. 40. 88. 225. 535. 554–556. 557 f. *557*.
Viertelkreisbogen
Länge: S. 496. 514. 563. 572.
Moment: S. 313.
Zylinder: S. 95.
s. a. *cercle*. *circulus*. Kegelschnitt. Sinus. *sinus*. Zykloide.
Kreispolygon: S. 241.
umbeschriebenes
Quadrat: S. 299.
Kreisreihe: S. 299. 596.

Kugel: S. 90. 297.
Oberfläche: S. 34. 267. 297. 513.
Gleichung: S. 90.
s. a. Konoid. Sphäroid.
Kurven: S. 146. 147. 267. 291. 315 f. 606.
Abszisse: S. 269. 279. 292. 311. 394 f.
algebraische: N. 13*. 26*. S. 10. 130. 288 f. 291. 392. 485 f. 542. 589.
Gleichung: S. 174. 202. 264. 288. 298. 342. 347 f. 446. 447. 619. 623.
höheren Grades: S. 264. 446. 448. 623.
zweiten Grades: S. 264. 298. 347 f. 447. 540. 619 f. *622*.
s. a. *curva analytica. curva geometrica. curva non transcendens. figura analytica. figura geometrica.*
Berührungskreis: S. 149.
Bildungsgesetz, Gleichung: S. 3. 14. 24. 94. 110. 131 f. 149. 157. 174. 199. 254. 351 f. 391–393. 395. 428 f. 585 f. 613.
s. a. *locus*.
Brennpunkt: S. 110. 126. 200. 233. 401.
höhere: S. 110 f.
Konstruktion: S. 132. 561. 599.
durch (zusammengesetzte) Bewegungen: S. 158. 575.
Fadenkonstruktion: S. 233.
näherungsweise: S. 327 f. 444.
Krümmungsverhalten: S. 111. 252.
Konkavität: S. 111. 410.
Konvexität: S. 410.
Ordinate: S. 3. 14. 120 f. 138. 351 f. 394 f.
Pol: S. 110. 129.
Polygonzug: 104. 107. 155. 251 f. 256 f. 311. 328. 392 f. 444. 515 f.
quadrierbare: S. 5. 39. 77. 204. 236. 269. 288 f. 331. 369. 392. 394. 401 f. 539. 576.
Katalog: S. 613.
Klassifikation: S. 538.
s. a. *curva quadrabilis. figura quadrabilis.*
Raumkurve: S. 89.
Reihenentwicklung: S. 419. 589.
durch fortgesetzte Division (Mercator): S. 422. *422*.
rektifizierbare: N. 30*.
s. a. *curva mensurabilis. curva rectificabilis.*
Schnittpunkte mit Kreis: S. 149. *149*.
Segment: S. 181. 351–354. 539. 588 f.
Fläche: S. 236. 314. 509. 589.
Sehne: S. 351–353. 546.
Sektor: S. 539. 546.
transzendente: N. 1*. 93*. S. 323.
Tangenten: S. 422.
s. a. *curva non analytica. curva non geometrica. curva semianalytica. curva transcendens. figura transcendens. linea non geometrica.*
Wendepunkt: N. 10*. S. *109*.
Zentrum: S. 129. 200. 401.
s. a. *curva*. Extremwerte. *figura. functio*. Komplanation. *linea*. Normale. Quadratur. Rektifikation. Subnormale. Subtangente. Tangente.
Kurven, spezielle
Ausflusskurve: N. 64*.
Ordinaten in geometrischer Progression: S. 3.
Ordinaten in harmonischer Progression: S. 3.
Ordinaten rekursiv definiert: S. 351 f.
s. a. Bertetsche Kurve. Ellipse. Exponentialfunktion. Hyperbel. Hyperbel, höhere. Kegelschnitt. Konchoide. Kreis. Logarithmus. Ovale, Cartesische. Parabel. Parabel, höhere. Perlen, Slusesche. Rollkurven. Quadratrix (Dinostratus). Quadratrix (Leibniz). Sinus. Spirale, Archimedische. Trisektrix, Maclaurinsche. Zykloide.

latus, semilatus
rectum: S. 34. 94. 121. 169. 241. 272. 280. 287. 323. 351. 373. 396.
transversum: S. 34. 121. 272.
lex
calculi: S. 27. 505.
homogeneorum: S. 292.
Lichtstrahlen: S. 141 f.
linea: S. 3f. 104. 292. 302. 353 f.
analytica: S. 203. 291.
circularis: S. 188.
describens: S. 192.
homogenea: S. 26 f.
irregularis: S. 602.

meridiana: S. 334. 337.
non geometrica: S. 27.
quadratrix: S. 203. 291. 570.
sinuum: S. 571 f. *571*. 576.
sustinens: S. 192.
litera fictitia: S. 56.
s. a. Kontrollgrößen und -zahlen.
locus
ad circulum: S. 164. 530.
ad circumferentiam circuli: S. 530.
ad curvas: S. 417.
ad ellipsin: S. 23.
ad hyperbolam: S. 23.
ad lineam rectam: S. 266. 369. 394. 417. 504.
ad parabolam: S. 207.
ad rectangulum: S. 159.
ad superficiem: N. 7_4*. S. 24. 26. 43. 93.
aequationis: S. 22. 106.
descriptibilis: S. 418.
differentiarum: S. 28.
homogeneus: S. 28.
linearis: S. 26.
planus: S. 390.
superficialis: S. 26.
tetragonisticus: S. 418.
transcendens: S. 422.
s. a. Örter, geometrische.
Logarithmus: N. 37*. 80*. S. 203. 296. 323. 336 f. 354. 426. 467–469. 560. 577. 589–592. 601. 606. 612.
Quadratur: S. 268.
Rechenoperationen: S. 469. 478. 592.
Reihe: S. 299. 592. 606.
Tangente: S. 426 f.
s. a. Exponent. Hyperbel, Quadratrix. *tangentes artificiales*.

magnitudo s. Größe.
margaritae s. Perlen, Slusesche.
Maschine: S. 199. 612.
mathesis: S. 302.
Mechanik
Grundsätze: S. 420. 521.
s. a. Bewegung. Bogen, gespannter. *corps. corpus. effectus*. Hebelgesetz. Kraft. Pendelbewegung. Stoßmittelpunkt.
Mensch: S. 599. 602.
methodus
analytica: S. 546.
apagogica: S. 113.
demonstrandi: S. 410.
determinandi: S. 104. 413.
dimetiendi: S. 257.
generalis: S. 113 f. 207. 535. 559.
infallibilis: S. 104.
inveniendi: S. 16. 138. 215.
inversa: S. 540. 546.
nova: S. 129. 159. 257. 351. 413. 559.
vera: S. 104.
Mittel
geometrisches: S. 333. 355.
s. a. Proportionale, mittlere.
harmonisches: S. 333. 355.
modus
describendi: S. 91. 110. 120. 142. 158. 214. 267. 343. 378.
efficiendi: S. 105.
inquirendi: S. 128.
inveniendi: S. 22. 217. 229. 612.
irregularis: S. 354.
lationis: S. 302.
metiendi: S. 612.
possibilis: S. 128. 548.
moles: S. 80. 180.
Moment: S. 325. 368.
Fläche: S. 40. 186. 263–267. 311. 313. 315 f. 351. 362 f. 364. 474. 499 f. 504. 573. 601. 603 f.
Bestimmung aus Fläche und Schwerpunkt: S. 295.
bzgl. beliebiger Achse: S. 311–313. 315 f.
bzgl. nicht paralleler Achsen: S. 266.
bzgl. paralleler Achse: S. 266 f. 310.
Kurvenbogen: S. 35. 40. 153. 157. 184. 187. 257. 264. 313 f. 568.
Ordinaten: S. 278. 311 f. 575.
Differenzen von Ordinaten: S. 326.
Subtangentenabschnitte: S. *237*. 238.

von Differenzen: S. 268. 575.
s. a. Dreiseit. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitt. Kreis. Parabel. Quadratrix (Dinostratus). Quadratrix (Leibniz). Quadratur. Rechteck. Schwerpunkt. Vierseit. Zykloide.
momentum homogeneum: S. 153.
motus: S. 90. 192. 268. 291. 302. 472. 501 f. 518. 521–525. 527–529. 532–534. 536. 563. 575. 589.
aequabilis sive uniformis: S. 11.
compositus: S. 302. 523. 529.
continuus: S. 202 f.
conversivus: S. 302.
directus: S. 528. 533 f.
geometricus: S. 366.
compositus: S. 371.
obliquus: S. 533.
parallelus: S. 302.
perpendicularis: S. 533.
progressivus: S. 302.
rectilineus: S. 532.
rotationis: S. 528.
simplex: S. 302.
transversus: S. 534.
uniformis: S. 13. 94. 328. 501.
s. a. Bewegung.

Näherung: S. 411 f.
s. a. Kurven, Konstruktion. Zykloide.
Neunerprobe (*calculus novenarius, calculus Enneadicus*): S. 53. *57*. 58. 67–69. *67*.
Normale: N. 66*. S. 14. 70. 87–89. 92. 97. 104. 120. 131. 138. 153. 155 f. 157. 184. 185. 187. 189. 192. 194. 209. 221. 224. 244 f. 298. 305. 381. 426. 449 f. 585 f.
Summation: S. 35. 153. 185. 313 f.
Notation: S. *16*. *234*. *301*. *332*. *466*.
s. a. Differentialrechnung. Integralrechnung. Ungleichungen. Vorzeichen.
numerus
affirmativus: S. 58.
combinatorius: S. 590.
compositus: S. 290.
denominatus: S. 290.
essentialis: S. 58.
fictitius: S. 58.
ordinalis: S. 269. 279. 292 f. 311.
summarius: S. 290.
sumtitius: S. 51. 58.

occurrens: S. 186. 236. 353. 367. 427.
Örter, geometrische: N. 7_4*. S. 3. 23. 24. 26. 28. 40. 106. 159. 164. 230 f. 233. 266. 325. 369. 390. 394. 413. 417–419. 422. 504. 530.
s. a. *locus*.
Optik
Brechung: S. 14. 141.
Brechungsgesetz: S. 141. *141*.
Dispersion: S. 142 f.
s. a. Brennspiegel. Dioptrik. Gläser, optische. Lichtstrahlen. Ovale, Cartesische.
Ovale, Cartesische: N. 4*. 14*. 17*. S. 14. *14*. *15*. *141*.
Normale: S. 17. 141.
Subnormale: S. 18 f. 117.

Parabel (*parabola, parabole*): S. 3. 9. 15. 112. 116. 129. 130. 148. 150. 164 f. 169. *197*. 199. 227. 392. 393–396. 411. 443. 451. 491. 519. 567. 585.
Apollonische: S. 194.
Evolute: S. 132.
Gleichung: S. 3. 8. 10. 33. 35. *63*. 64. 77. 112. *155*. 179. 201. 347. 356. 394. 403. 451 f.
inverse Tangentenrechnung: S. 64. 356–358.
Normale: S. 64. 200. 356. 396.
Ordinate: S. 4. 13. 116. 152 f. 182. 199. 538.
Differenzen: S. 64.
Parameter: S. 169. 396. 451. 473.
Quadratrix: S. 10.
Quadratur: S. 31. 84. 102. 267. 322. 405. 617.
Rektifikation: S. 8. 547.
Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 33. 195.
Bogenelement: S. 33. 394–396.
Moment des Bogens: N. 24*.
Schwerpunkt des Bogens: S. 37. 195.
Rollkurve: S. 129. 132. *132*. 164–168. 169–173.
Segment: S. 349 f.
Fläche: S. 443.
größtes einbeschriebenes Dreieck: S. 350.
subalterne: S. 314.
Subnormale: S. 169. 200. 227. 350. 356.

Subtangente: S. 4. 347. 350.
Abschnitt (Tschirnhaus): S. 356.
Tangente: S. 169. 200. 350. 356. 394.
Tangentenrechnung: S. 103. 469. 471.
Transmutation: S. 200 f. 347.
s. a. Kegelschnitt. Paraboloid.
Parabel, höhere (*paraboloeides*): S. 4. 9 f. 77. 116. 392. 399. 446. 491. 540. 543.
Auflistung: S. 446.
Gleichung: S. 234.
kubische: S. 3. 116. 322 f. 396 f. 400. 451. 481. 491.
Gleichung: S. 323. 451 f.
Tangente, Tangentenrechnung: S. 323. 469 f. 471 f. 475. 481.
Quadratur: S. 399. 416. 538.
Rektifikation: N. 30*.
Reziproke der Parabel (Antiparabel) s. Hyperbel, höhere, quadratische.
semikubische (Heuraet): S. 194.
Rollkurve: S. 168.
Subtangente: S. 4.
Tangente, Tangentenrechnung: N. 68*. N. 69*.
Paraboloid
Oberfläche: S. 33.
s. a. Konoid.
Parallelogramm
ein-, umbeschriebenes: S. 203.
Schwerpunkt: S. 420.
Parameter: S. 323. 352. 455 f. 469. 471. 473.
s. a. Ellipse. Hyperbel. *latus rectum*. Parabel.
Pendelbewegung: S. *107*.
perfectio geometriae: S. 617.
Perlen, Slusesche (*margaritae*): S. 400.
perpendicularis s. Normale.
Physik s. Atomisten. Mechanik. Optik. Zeit.
piqueline s. Konchoide.
planisphaerium nauticum: S. 334. 337.
planum
commensurabile: S. 257.
quadrabile: S. 27.
Polygon: S. 104. 155. 241. 369.
ein-, umbeschriebenes: N. 12*. 50*. S. 224. 515 f. 547 f. 561.
Tangente: S. 355.
s. a. Dreieck. Parallelogramm. Quadrat. Rechteck. Trapez.
polygonum
infinitangulum: S. 24. 155. 392 f.
ordinatum: S. 224. 311.
regulare: S. 547 f.
Polynom: S. 597.
Zerlegung in Faktoren: S. 594–596.
portiuncula: S. 375. 392.
Potenzen: S. 290. 307. 428 f. 592. 612 f.
Notation: S. *466*.
s. a. Binome. *dignitas*.
potestas
angelica: S. 602.
humana: S. 602.
principium
inveniendi: S. 402.
inventionis: S. 113.
Prisma: S. 302. 534.
Probleme
bestimmte: S. 19. 94. 199. 210. 219. 223.
diophantische: S. 412.
einem Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck einbeschreiben: S. 247.
geometrische: S. 425.
Hyperbel bzw. Parabel finden, die eine gegebene Kurve berühren: S. 450.
irreguläre: N. 57*. S. 351. 363. 412.
Kurven
Quadratur: N. 20*. S. 154. 248.
lösbare: S. 77. 212. 217. 363. 395.
mechanische: N. 58*.
Oberfläche eines Paraboloids (Huygens): S. 297.
reziproke: S. 378.
sursolide (Descartes): S. 599.
unlösbare: S. 129. 203. 213. 215. 217. 219.
Beweis: S. 75. 381.
Vierglobenproblem: S. 599.
Volumen eines Kegelabschnitts: N. 32*.
s. a. Tangentenmethode, inverse.
producta s. Subtangente.
progressio: S. 246. 269. 419.
arithmetica: S. 84. 99. 101 f. 145. 214. 228. 324 bis 328. 343. 364. 377. 566. 591. 616–618.

replicata reciproca: S. 311.
geometrica: S. 3. 260–262. 606.
harmonica: S. 3. 355.
in se continue reflexa: S. 222.
indicum: S. 413.
linearis: S. 311. 355.
non transcendens: S. 547.
numerica: S. 311. 355.
summatrix: S. 97. 279.
sygnotos: S. 279.
tangentium: S. 453.
transcendens: S. 354. 547.
Proportionale
dritte: S. 198.
mittlere: S. 25. 124. 198. 262. 274. 334. 372. 375. 403 f. 456. 584.
Proportionalität s. Verhältnisrechnung.
propositio
impossibilis: S. 458.
negativa: S. 412.
tetragonistica: S. 412.

Quadrat
Schwerpunkt: S. 420.
Quadratrix (Dinostratus): N. 70*. 86*. S. 303 f.
Abszisse: S. *503*.
Fläche: S. 564–566. *564*. 569 f.
Gleichung: S. 504–506.
Konstruktion: S. 502 f.
durch Bewegung: S. 501. 563.
Ordinate: S. 503. 564. 570.
Quadratur: N. 71*. S. 503. 506. 566 f.
Moment der Fläche: S. 564. 569 f.
Scheitelpunkt: S. 508.
Tangente: S. 303 f. 502. 506. 565.
Konstruktion: S. 502. *502*.
Quadratrix (Leibniz): N. 70*.
Extremwert: S. 501.
Fläche: S. 500.
Gleichung: S. 496. 501.
Konstruktion durch Bewegung: S. 501.
Ordinate: S. 496–499.
Differenz: S. 501.
Quadratur: N. 71*.
Moment der Fläche: S. 500 f.
Tangente: S. 496. 501.
Quadratrix (Stammfunktion): N. 13*. S. 8. 10 f. 202 f. 269. 288–291. 296. 570. 590. *622*.
s. a. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.
Quadratur: N. 28*. 29*. 42*. 51_2*. 54*. S. 17. 25. 27. 32. 35. 40 f. 87 f. 131 f. 139. 143. 189. 191. 212. 215. 217. 246. 248. 343 f. 415–419. 509. 537 bis 539. 547. 560. 562. 577. 608. 615.
absolute: S. 168. 236. 238. 392. 622.
algebraische: S. 77. 132. 288–290. 292. 392. 622.
Beweis: S. 422.
Methoden: S. 93.
ein- und umbeschriebene Polygone: N. 50*. S. 113 f. 547 f.
(Saint-Vincent): S. 291.
Schwerpunktmethode (statische Momente): N. 38*. 44*. 55*. S. 195–197. 351. 416–419. 562.
Schwerpunktmethode (*via centri gravitatis*): N. 82*. S. 432. 518. 521–525. 527–534. 536. 557 f. 575 f.
Transformationsmethoden: S. 331. 375 f.
(Tschirnhaus): S. *267*.
unbestimmte Koeffizienten: N. 98*. S. 288 bis 290.
Untersuchung der Quadrierbarkeit von Kurven: N. 92*. S. 288–290. 294 f. 546–548. 622.
näherungsweise: S. 288 f.
Reduktion auf Kreis- und Hyperbelquadratur: S. 376.
Zusammenhang mit inverser Tangentenmethode: S. 70. 93. 365 f. 615.
Zusammenhang mit Reihensummation: S. 96. 351 f. 564. 606. 617.
Zusammenhang mit Rektifikation: N. 20*. 61*. S. 7–11. 24. 132. 137–139. 153. 155. 267. 269. 392. 612. 617 f.
Zusammenhang von Quadraturen: N. 61*. 73*. S. 39–41. 128–130. 159. 167 f. 250. 254. 264 f. 267. 269. 304–307. 314. 346 f. 352–354. 359. 392. 430. 566 f.
s. a. *catalogus*. Integralrechnung. Tangentenmethode, inverse. *tetragonismus*. *tetragonistica*.
quadrilineum s. Vierseit.
quantitas

minima seu indivisibilis: S. 581.
motu descriptibilis: S. 589.
ordinata: S. 311.
pure geometrica: S. 576.
vera exprimibilis: S. 589.
s. a. Größe.

ratio
agendi: S. 411.
analytica: S. 96.
composita: S. 136. 272. 277. 456. 477. 496–498. 565.
describendi: S. 94. 233.
efficiendi: S. 105. 159.
inquirendi: S. 180.
inveniendi: S. 16. 96.
minor assignabilis: S. 293.
ratiocinatio
generalis: S. 613.
universalis: S. 410.
rationalitas: S. 366.
Rechteck
Gleichung: S. 91.
Moment: S. 407–411.
recta
aequilibrii: S. 311.
librationis: S. 311.
recurvatio: S. 110 f.
reducta s. Subnormale.
Regel
Bestimmung von Flächen aus Momenten: S. 311.
Dispersion des Lichts: S. 143.
Extremwertbestimmung: S. 199. 581.
Koordinatentransformation: S. 127.
Lösung sursolider Probleme (Descartes): S. 599.
Momente von Flächen bzgl. beliebiger Achsen: S. 311 f.
Schwerpunkt eines Kreisbogenstücks: S. 557.
Seitenberechnung eines Dreiecks: S. 520.
Tangentenbestimmung: S. 199. 343.
s. a. Differentialrechnung. Integralrechnung. Satz.
regula falsi: S. 64.
Reihe, Reihen
analytische: S. 606.
arithmetische: S. *445*.
geometrische: S. 289. 434 f. *445*.
harmonische
Divergenzbeweis: S. 402. 550.
rationale: S. 606.
Summe: S. 606.
reziproke figurierte Zahlen: S. 402.
Summation: S. 96. 101. *107*. 212. 217. 261. 351. 354. 434. 547.
Summationsreihe: S. 97. 279.
summierbare: S. 606.
transzendente: S. 606.
unendliche: S. 351. 402. 564. 586 f. 589. 592. 617.
Rektifikation: N. 20*. 52*. 53*. S. 129. 132. 137 bis 139. 153. 217. 227. 235. 267. 351. 432 f.
Bogenelement: N. 5*. S. 137 f. 157. 176. 267. 269. 313 f. 370. 374 f. 392 f. 395 f. 444. 535. 610. 612. 617.
Bogenlänge: S. 392. 395 f.
Methode (Heuraet): N. 30*. S. 132. 138. 374 f. 393.
näherungsweise: S. 115 f. 373.
res ordinata: S. 292.
resecta: S. 186.
Rest (*residuum*): S. 400.
Rollkurven: N. 15*. 18*. 19*. 23*. S. 131 f. 139. 140. 153–158. 179. 226 f. 368–371. 378–380. 385 f. 561.
Differentialgleichung: S. 387.
generatrix: S. 370 f.
Normale: S. 157. 369 f.
Oberfläche des Rotationskörpers: S. 370.
Quadratur: S. 387.
s. a. Hyperbel. Kegelschnitt. Parabel. Parabel (höhere), semikubische. Zykloide.
rota: S. 192.
Rotationskörper: S. 306. 532 f.
Oberfläche: S. 297.

Satz, Sätze
der Analysis situs: S. 526.
der Arithmetik des Unendlichen: S. 429 f.
der Geometrie der Indivisiblen: S. 313 f.
von Barrow: S. 313.
von Cavalieri: S. 313.

von Gregory: S. 313.
von Saint-Vincent: S. 313.
von Wallis: S. 313.
Integralrechnung
lineare Transformation von Abszissen bzw. Ordinaten: S. 275–277.
partielle Integration: S. 268. 292 f.
Potenzregel: S. 292 f.
Produktregel: S. 293.
mathematische
Bezeichnungen: S. 412.
über Bestimmung durchlaufener Räume: S. 521. 527. 533.
über Bestimmung von Flächen aus Momenten: S. 267. 313. 351. 411.
über den Schwerpunkt des Halbkreisbogens: S. 508. *508*.
über den Zusammenhang von Normale und Moment eines Bogens: S. 313 f.
über die kubische Parabel: S. 322 f.
über die Quadratrix: S. 498 f.
über Eigenschaften von Gleichungen: S. 73 f.
über einfache algebraische Kurven: S. 485–488.
über Kreissektoren: S. 240.
über Oberflächen von Rotationskörpern: N. 75*.
über Potenzen von Binomen: S. 456. 459.
über Quadraturen: N. 34*. 35*. S. 518 f.
über Schwerpunkte: S. 552.
über Sekanten von höheren Parabeln: S. 483.
über Sekanten von Kurven: S. 486–488.
über Tangenten von einfachen Figuren: S. 454. 467. 468. 469. 474.
über Tangenten von (höheren) Parabeln: S. 482. 491 f.
verneinende: S. 412.
von Archimedes
über Konoide und Sphäroide: S. 31.
über Kreisfläche: S. 512 f. *513*.
über Kugel und Zylinder: S. 31.
über Quadraturen: S. 267.
s. a. Hebelgesetz.
von Guldin: S. 516. 521. 554.
von Ricci: S. 480. *480*.
von Saint-Vincent
über Duktus subalterner Parabeln: S. 314.
über Hyperbelquadratur: S. 262.
s. a. Beweis. Regel. Transmutationssatz.
Schiefkörper: S. 522.
Schwerpunkt: S. 416–418. 420. 518. 552.
Fläche: S. 40. 264–266. 295. 311. 313. 361–363.
Bestimmung aus Momenten: S. 264. 266.
Dreieck: S. 351. 362.
Kurvenbogen: S. 129. 264. 351.
Ordinaten: S. *315*. 368.
s. a. Dreieck. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Moment. Quadraturen, Methoden. Parabel. Parallelogramm. Quadrat. Zykloide.
secans falsa: S. 535.
series: S. 246.
analytica: S. 606.
convergens: S. 333. 351. 354. 559. 561.
infinita: S. 351. 402. 550 f. 564. 577. 586 f. 589. 617.
rationalis: S. 606.
transcendens: S. 606.
signum
ambiguum: S. 294. 503.
sinuatio: S. 560.
Sinus: S. 576.
Quadratur: S. 40. 510. *511*.
sinus
complementi: S. 198. 237. 498 f. 503. *503*. 505. 520. 524. 560. 563. 566.
rectus: S. 159. 161. 198. 203. 237. 498 f. 554 f. *568*. 569.
versus: S. 159. 198. 203. 503. 553–555. *557*. 558. 560. 563. 566. 568. 570 f.
sinus (Kreisordinate): S. 7. 7. 70. 116. 496. 499. 503. 556. 563. 565–568. 608.
solidum: S. 26 f. 31. 89. 91 f. 239. 267. 291. 296. 306. 311. 351. 353 f. 532. 534. 569.
cavum: S. 240.
cochleatum: S. 240.
contortum: S. 240 f. *240*.
circulare: S. 241.
rectilineare: S. 241. *242*.
cylindricum: S. 302.
homogeneum: S. 269.
prismaticum: S. 302.

rectilineum: S. 267.
regulare: S. 110.
spatiolum: S. 262.
spatium
commensurabile: S. 257.
conchoidale: S. 340.
curvilineum: S. 246.
finitum: S. 199.
hians: S. 257.
homogeneum: S. 254.
hyperbolicum: S. 339 f. 550. 576.
infinitum: S. 543.
infinitum: S. 353. 550.
mixtilineum: S. 249.
ordinare: S. 262.
percursum: S. 521 f. 527. 529. 533.
planum: S. 391.
quadrabilis: S. 392.
quadrato-quadratum: S. 472.
quadrilineum: S. 249. 276.
rectilineum: S. 202.
scalare: S. 547 f.
solidum: S. 532.
successivum: S. 522.
surdesolidum, sursolidum: S. 291. 472.
trilineum: S. 408.
ungulare: S. 378.
speculum: S. 142.
Sphäroid
Oberfläche: N. 6*. S. 90. 282. 297.
s. a. *coniforme ellipticum*. Kugel.
Spirale, Archimedische: S. 501.
Konstruktion durch Bewegung: S. 501.
Stoßmittelpunkt: S. 413. 417.
Subnormale: N. 15*. 18*. 19*. S. 25. *25*. 70–73. 77 bis 85. 97 f. 101 f. 107. 131 f. 138. 143 f. 147–152. 154. *155*. 180 f. 184. 185. 187. *189*. 192 f. 203. 220 f. 305. 321–325. 359. 363–365. 585.
Summation: S. 143. 184 f. 359. 426. 430.
Subtangente: S. *109*. 111. 137. 174 f. 184. 197–199. *199*. 204. *225*. 288. 306 f. 348. 395. 428–430. 447 f. 540. 581. 588. 599.
Abschnitt (Tschirnhaus): S. 298. 347. *347*. 445. *445*. 509.
Bestimmung: S. *3*. *65*.
s. a. Tangentenmethoden.
subtensa: S. 306. 351. 557.
superficies
analytica: S. 94. 291.
anticonoeides: S. 94.
conica, conoeides, conoeidica: S. 90. 94.
curva, curvilinea: S. 89. 91. 93. 104. 257. 291.
cylindrica, cylindroeidica: S. 90 f. 302. 335 f. 339. 390 f. 423.
cylindriformis: N. 53*.
truncata: S. 391.
homogenea: S. 269. 291.
hyperbolica: S. 261.
prismatica: S. 302.
ungularis: S. 378.
synthesis: S. 100. 132. 204. 487.

Tafelwerke: S. 204. 387. 560. 613.
Tangenten: N. 34*. 42*. 66*. S. 3f. 14. 65. 76. 87. 109–111. *109*. 121. 179. 184. 185. 187. 189. 194. 204. 211 f. 216 f. 221–224. 236. 245. 257. 279. 305 f. 350. 353. 360. 367. 376. 380. 391 f. 426. 432. 449 f. 509. 546. 567. 581. 586. 598 f. 606. 607 f. 612. 615. 620.
s. a. *catalogus*. Tangentialebene.
Tangentenmethode, inverse: N. 7*. 14*. 15*. 21*. 27*. 46*. 48*. 50*. 51_1*. 51_2*. 84*. 88*. 89*. 90*. S. 96 f. 105. 107. 142. 143. 352. 355. 397. 540. 546. 615 f.
Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten: S. 585 bis 587.
(Descartes): N. 3*. S. 16. *16*. 168.
durch Bestimmung von Doppelwurzeln: N. 4*. 8*. 9*. 17*. 20*. S. 131. 180. 585–587.
näherungsweise: S. 587.
Probleme: S. 14. 105. 203. 215. 217. 355. 543. 589. 616.
2. Debaunesches Problem: N. 90*. 91*. S. *599*. *600*. *602*.
analytische Lösung: S. 129. 152.
Bestimmung der Basiskurve eines Zylinderhufs aus der Schnittkurve: N. 58*.
(Descartes): N. 4*. S. 598. 602.
Differenzen der Abszissen reziprok zu Bogenelementen: S. 394.

Differenzen der Ordinaten reziprok zu Bogenelementen: S. 394.
geometrische Lösung: S. 77. 129.
Hyperbel als Lösung: S. 65 f.
Normale gegeben: S. 153–156.
Normale gleicht Ordinate der Parabel: S. 153.
Normale konstant: S. 225. 585.
Normalen treffen sich in einem Punkt: S. 596 f.
Ordinate reziprok zu Subnormale: N. 15*.
Parabel als Lösung: S. 63 f.
Rückführung auf Quadraturen: S. 365 f. 615.
Rückführung auf Rektifikationen: S. 129. 179.
Subnormale gegeben: S. 180.
Subnormale gleicht Ordinate der Ellipse: S. 70 bis 73.
Subnormale gleicht Ordinate des Kreises: S. 70 bis 73. 585 f.
Subnormale gleicht Ordinate einer (höheren) Hyperbel: S. 70–73. 77. *155*.
Subnormale gleicht Ordinate einer (höheren) Parabel: S. 77–85. 150–152. *155*.
Subnormale gleicht Ordinate einer quadrierbaren Figur: S. 77.
Subnormale gleicht Ordinate eines Kegelschnitts: S. 176–178.
Subnormale gleicht Sehne: S. 327 f.
Subnormale konstant: S. 143 f. 148. 150. 220. 585.
Subnormale reziprok zu Abszisse: S. 323.
Subnormale reziprok zu Differenz von Subtangente und Abszisse: S. 363-365.
Subnormale reziprok zu Ordinate: N. 15*. S. 321–323.
Subnormale verhält sich zu Abszisse wie sinus rectus zu sinus versus: S. 203.
Subtangente gleicht Ordinate einer höheren Parabel: N. 60*.
Subtangente proportional zu Abszisse: S. 509. 537.
Summe von Abszisse und Subnormale reziprok zu Abszisse: S. 327.
Summe von Abszisse und Subnormale reziprok zu Ordinate: S. 323–325.
Zuwächse reziprok zu Ordinaten: S. 143.
Zuwächse reziprok zu Quadraten der Ordinaten: S. 130.
unter Verwendung von Evolventen und Rollkurven: N. 15*. 16*. S. 140. 153–158. 179.
s. a. Differentialgleichung. Differentialrechnung. Integralrechnung. Quadratur.
Tangentenmethoden, Tangentenrechnung: N. 48*. 67*. 84*. S. *65*. 76. 98. 105. 109–111. 177. 199. 289. 518. 583 f. 594.
(Descartes): S. 15. 21. 85. 97. *97*. 103. 149. 342 f. 357 f. *357*. 559 f. 598.
Anwendung auf transzendente Kurven: N. 93*.
(Fermat): S. 84. *84*. 220. *449*. 463–465. *463*. 598.
Beweis: S. 463. 465.
(Hudde): S. 59-62. 84 f. 214. 216. 218. 228. *234*. 235. 343. 357 f. *357*. 445. 583 f. 586–588. 620.
Beweis: S. 84 f.
(Sluse): S. 4. 37. 62. *62*. 109. *109*. 175. 197 f. 204 bis 206. 225. 228. 237. 249. 258. 288. 323. 342 f. 348. 437. 447 f. 463 f. 540. 581. 584. 586. 594. 614. 620.
Anwendung: S. *437*.
Anwendung auf transzendente Kurven: S. 607.
Beweis: S. 463.
Herleitung: S. 614.
(Tschirnhaus): S. 347. 445. *445*.
s. a. *catalogus curvarum tangentiumque*. Differentialrechnung.
tangentes artificiales: S. 334.
Tangentialebene: S. 104. 614.
Technik s. Brennspiegel. Instrument. Maschine. Zahnräder.
tetragonismus: S. 88. 101. 589.
tetragonistica: N. 50*. 51_2*. 59*. S. 296. 422.
theorema
admirabile: S. 292.
determinatorium: S. 411 f.
fundamentale: S. 411.
generale: S. 249. 267. 531. 533.
generalissime: S. 527.
memorabile: S. 251.
mirabile: S. 186. 322 f. 365. 368.
mirum et foecundum: S. 253.
notabile: S. 508.

novum: S. 257.
tetragonisticum: N. 34*. 35*. 61*. S. 351.
verum: S. 293. 351.
Torus: S. *90*. 438.
Transmutationssatz: S. 236. *236*. 249. *249*. 314. 362 f. 380.
s. a. Integralrechnung, Integraltransformation.
Trapez: S. 547.
Treppenfigur: S. 547 f.
triangulum s. Dreieck.
trigonometria indivisibilium: S. 351. 361. 367. 368.
trilineum s. Dreiseit.
Trisektrix, Maclaurinsche: S. 345.
trochoeides s. Rollkurven.

unendlich
(Anzahl): S. 3 f. 11. 155. 262. 264. 289. 291. 332. 346. 351. 354. 392. 538. 541. 543. 564. 590. 592. 608. 614.
(Größe): S. 4. 12. 110. 198 f. 313. 353 f. 496. 498. 581.
(klein): S. 4. 12. 24. 29. 98. 109. 136. 159. 187. 197. 199. 212. 221. 223–225. 251. 256. 262. 291. 292. 293. 311. 313. 326. 351. *351*. 352–354. 355. 362. 370. 392. 496. 498. 533. 536. 546 f. 581. 597.
Ungleichungen
Notation: S. 411. *411*.
Sätze mit: S. 411 f. 526.
ungula: S. 26. 244. 296 f. 354. 375. 417.
unitas: S. 3. 50.
utilitas: S. 31. 316.

varietas varietatum: S. 4.
Verhältnisrechnung
Addition u. Subtraktion: S. 422.
Gleichung: S. 231. 233.
Teilung: S. 272. 296. 547.
s. a. *analogia*.
Versiera (Zyklozissoide) s. Kreis, *figura segmentorum*.
via
analytica: S. 416. 547.
calculandi: S. 380.
describendi: S. 416.
maxime naturalis: S. 547.
metiendi: S. 511.
notabilis: S. 451.
nova ad quadraturas investigandas: S. 415.
nova analyseos quadraturarum: S. 538.
synthetica: S. 100.
Viereck s. Parallelogramm. Quadrat. Rechteck. Trapez.
Vierseit (*quadrilineum*): S. 249 f.
Moment: N. 55*.
vinculum
differentiae: S. 505.
summae: S. 505.
tetragonisticum: S. 366. 505.
vis
ictus: S. 417.
machinae: S. 199.
Vorzeichen: S. 22. 58. 180. 224. 231. 475. 478.
Doppel- und Mehrfachvorzeichen: S. 114. 162 bis 164. *180*. 191. *229*. 233. 274. 294. 503.

Winkel: S. 42. 90. 124. *124*. 265. 548. 555 f. 617.
Teilung: S. 272. 296. 547.
Wurzeln: S. 28. 33. 71. 79–81. 83. 85. 87. 105. 289. 290. 372 f. 547. 581. 592. 607. 616.
imaginäre: S. 233. 607.
kubische: S. 431. 567.
quadratische: S. 429. 567.
s. a. Gleichung mit Doppelwurzeln.
Wurzelziehen: S. 119. 198.

Zahl, Zahlen
figurierte
Dreieckszahlen: S. 588.
Kombinationszahlen: S. 590.
imaginäre: S. 71. 229. 372 f.
geometrische Interpretation: S. 372 f.
irrationale: S. 457. 472 f. 596.
Potenzen
Quadratzahlen: S. 588.
rationale: S. 457. 472.
reelle: S. 28. 372. 494. 589.
s. a. Kontrollgrößen und -zahlen. *numerus*.
Zahnräder: S. *420*.
Zeichentheorie: N. 63*.
Zeit: S. 11 f. 302. 501. 535.

Fallzeit: S. 13.
Zuwächse: S. 12.
Zykloide: S. 112. 116. 129. 153. 155. 159. 202. 501. 561. 570–574.
Isochronismus: S. 535.
Näherung durch algebraische Kurve: S. 116.
Normale: S. 571.
primaria: S. 164.
Quadratur: N. 74*. S. 236. 574. 576.
Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 236. 575.
Moment der Fläche: S. 572.
Segment: N. 74*. S. 112. 236. 299. 573 f. 576.
Rektifikation: S. 534 f.
Moment des Bogens: S. 535.
Schwerpunkt des Bogens: S. 535.
retorta: S. 574.
Transmutation: S. 236.
s. a. Rollkurven.
Zylinder: S. 26. 92. 111. 241. 534.
des Halbkreises: S. 95.
Huf bzw. Stumpf: S. 26. 244. 296 f. 354. 375. 378. 417. 423. *423*.
Bestimmung der Basiskurve aus der Schnittkurve: N. 58*.
Oberfläche: S. 340. 378.
hyperbolischer: S. 241.
Oberfläche: S. 257. 267. 513.
Gleichung: S. 90 f.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER, *Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek*

LH 35	II 1	Bl. 233–234	N. 2
		Bl. 275	N. 95
		Bl. 282–283	N. 26
		Bl. 318	N. 65
	V 1	Bl. 1–7	N. 7
	V 2	Bl. 1	N. 15
		Bl. 2	N. 16
	V 3	Bl. 1–4	N. 17
		Bl. 6	N. 21
		Bl. 7	N. 14
		Bl. 9–10	N. 4
		Bl. 11–12	N. 23
		Bl. 13–14	N. 18
		Bl. 15	N. 19
	V 5	Bl. 1–2	N. 6
	V 6	Bl. 1–2	N. 53
		Bl. 6	N. 78
		Bl. 8	N. 92
		Bl. 10–11	N. 82
	V 8	Bl. 1	N. 48
		Bl. 2–3	N. 51
	V 9	Bl. 1–2	N. 46
	V 10	Bl. 1	N. 84
		Bl. 2	N. 93
		Bl. 3	N. 90
	V 11	Bl. 3	N. 77
		Bl. 4	N. 76
	V 12	Bl. 3–4	N. 96
	V 17	Bl. 1–6	N. 68
	V 17	Bl. 7–8	N. 69
	VIII 2	Bl. 1–4	N. 27
	VIII 11	Bl. 4	N. 41
	VIII 18	Bl. 1	N. 38
		Bl. 2	N. 40
LH 35	VIII 18	Bl. 3	N. 44
	VIII 20	Bl. 1	N. 22
	VIII 30	Bl. 1	N. 3
		Bl. 12	N. 45
		Bl. 99	N. 37
		Bl. 123	N. 34
		Bl. 153–154	N. 49
		Bl. 153–154	N. 50
		Bl. 162–163	N. 8
		Bl. 166	N. 20
	X 8	Bl. 1	N. 57
	XII 1	Bl. 4	N. 35
		Bl. 253	N. 67_1
		Bl. 284	N. 58
		Bl. 317	N. 80
		Bl. 323	N. 1
	XII 2	Bl. 2	N. 11
		Bl. 62	N. 9
		Bl. 93	N. 66
		Bl. 94	N. 28
	XIII 1	Bl. 122–123	N. 10
		Bl. 132	N. 72
		Bl. 133	N. 71
		Bl. 134	N. 81
		Bl. 136	N. 61
		Bl. 170	N. 83
		Bl. 226	N. 91
		Bl. 227	N. 98
		Bl. 229	N. 94
		Bl. 231–232	N. 52
		Bl. 233	N. 70
		Bl. 234–235	N. 86
		Bl. 324	N. 60
		Bl. 355	N. 25

LH 35	XIII 1	Bl. 356	N. 59
		Bl. 357	N. 31
		Bl. 391	N. 67_2
		Bl. 407	N. 29
		Bl. 408–409	N. 33
		Bl. 412	N. 73
		Bl. 433	N. 85
		Bl. 439	N. 74
		Bl. 439	N. 75
		Bl. 442–443	N. 79
		Bl. 445+447	N. 88
		Bl. 448	N. 89
	XIII 2 b	Bl. 108–109	N. 62
		Bl. 108–109	N. 63
		Bl. 108–109	N. 64
		Bl. 136–137	N. 5
	XIII 2 c	Bl. 151	N. 13
LH 35	XIII 3	Bl. 51	N. 32
		Bl. 79	N. 12
		Bl. 144–145	N. 39
		Bl. 147	N. 36
		Bl. 148	N. 24
		Bl. 149	N. 30
		Bl. 150–151	N. 55
		Bl. 150–151	N. 56
		Bl. 223	N. 54_1
		Bl. 224	N. 54_2
	XIV 1	Bl. 47–48	N. 42
		Bl. 304	N. 97
LH 37	V	Bl. 50	N. 87
Leibn. Marg. 0			N. 43
Ms IV 377			N. 47

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Neun der ersten dreizehn hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique* 2 nicht erfasst, vier nur teilweise (N. 49, 50, 67, 86). Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass das bezeichnete Stück in diesem Band nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	1	773	6	891	22	1097 tlw.	41
—	29	788	28	901	30	1101	2
—	42	791	7	902	23	1106_1	44
—	43	801	12	903	27_{1-3}	1110	45
—	47	823	15	904	27_4	1114 A	64
—	49	824	16	906	26	1118	63
—	50	828	18	1063	32	1120	46
—	62	829	19	1068	33	1125	48
—	67	830	20	1074	13	1126	50
—	86	832	17	1076	34	1127	49
—	96	833	14	1085	36	1128 A	49
—	97	839	8	1086	35	1128 B	50
—	98	840	21	1087	37	1131_2	
543 tlw.	9	841	10	1089	38	1132_1	
701	72	844	3	1090	38	1144	52
702	71	845	4	1091	39	1157	53
726	11	860	95	1092	40	1164 A–B	54

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
1165	55	1280 A–C	5	1427	79	1474	87
1166	56	1284	65	1428 A	80	1482	89
1167	24	1285	66	1432	81	1483 A	90
1195	31	1286	61	1449	85	1483 B	93
1196	25	1288	83	1452	84	1484	91
1208	73	1290	60	1464 A–B	86	1487	69
1247	92	1334 tlw.	67	1465	74	1488 tlw.	68
1250	58	1386	70	1466	75	1550	94
1251	59	1419	77	1470	88	1555	57
1252	58	1420	76	1471	82		
1277	6	1426	78	1473	82		

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfasst die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
344	4 VIII 22	Bl. 72–73	*301.*
543	35 XII 2	Bl. 62	*107.*
822	35 V 2	Bl. 5–6	120. *120.*
827	35 I 17	Bl. 11–15, 17	*132.*
831	35 XII 1	Bl. 226–227	158. *158.*
842	35 XIII 1	Bl. 122–123	*109.*
843	35 XIII 1	Bl. 122–123	*109.*
847	35 VIII 30	Bl. 121	*310.*
895	35 II 1	Bl. 269–270	*366.*
896	35 II 1	Bl. 271–272	*366.*
897	35 II 1	Bl. 273	*366.*
1069	35 XIII 1	Bl. 408–409	*243.*
1070	35 XIII 1	Bl. 408–409	*243.*
1097	35 VIII 11	Bl. 4	*296.*
1117	35 XIII 2 b	Bl. 108–109	*434. 439. 441.*
1119	35 XIII 2 b	Bl. 108–109	*434. 439. 441.*
1187	37 V	Bl. 216	*420.*
1192 C	38	Bl. 25	*199.*
1233 C	35 II 1	Bl. 144–159	*449.*
1428 B	35 XII 1	Bl. 317	*549.*
1429	35 II 1	Bl. 127	*609.*
1434	35 XII 1	Bl. 344–345	*534.*
1450	35 XIV 1	Bl. 70	*127. 195. 200. 207.*
1456	35 XII 1	Bl. 311	*536.*
1460	35 II 1	Bl. 116–117	*609.*
1469	35 XIII 3	Bl. 182–183	*345.*
1472	35 V 6	Bl. 10–11	*553.*
1488	35 V 17	Bl. 1–6	*449.*
1547	35 VIII 30	Bl. 13	*609.*
—	35 II 1	Bl. 178	*611.*
—	35 V 12	Bl. 3–4	*612.*
—	35 VIII 30	Bl. 161	*66.*
—	35 XII 1	Bl. 343	*509.*
—	35 XIII 1	Bl. 236–239	*301. 303. 332. 339.*
—	35 XIV 1	Bl. 304	*619.*

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
LuX	Leibniz gemeinsam mit Unbekanntem, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
X	Unbekannter, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen des Herausgebers
[ ]	Ergänzungen von Satzzeichen durch den Herausgeber. Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
▭	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
⬭	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
dat.	datiert
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
Fig., fig.	Figur, figura
f.	folgend
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
Gln.	Gleichung
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
i. Allg.	im Allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LBr.	HANNOVER, *Leibniz-Bibl.* Leibniz-Briefwechsel
LH	HANNOVER, *Leibniz-Bibl.* Leibniz-Handschriften
lib.	liber
Marg.	Marginalie(n)
Ms.	Manuskript

N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
p., pag.	pagina
probl.	problema
prop.	propositio
r°	recto
S.	Seite
s.	siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
u. ö.	und öfter
v.	van, von, vor
Var.	Variante
vgl.	vergleiche
v°	verso
Z.	Zeile
ℜ	destilletur, distilletur (noch zu bedenken)

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2 = *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.

Child, *Early mathematical manuscripts* = Child, J. M., *The early mathematical Manuscripts of Leibniz.* Chicago [u. a.] 1920. Nachdr. Mineola 2005.

Couturat, *Opusc. et fragm.* = *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Hrsg. L. Couturat. Paris 1903; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1966.

DGS = *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 14,2).

DO = Descartes, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.

Gerhardt, *Analysis* = Gerhardt, C. I., *Die Entdeckung der höheren Analysis.* Halle 1855.

Gerhardt, *Brief* = Gerhardt, C. I., *Brief vom 3. Januar 1851.* In: *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Aus dem Jahre 1851. Berlin 1852, S. 341–358.

Gerhardt, *Differentialrechnung* = Gerhardt, C. I., *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz.* Halle 1848.

Gerhardt, *Leibniz in London* = Gerhardt, C. I., *Leibniz in London.* In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften LI. LII.* Berlin 1891, S. 157–176.

GT = *James Gregory tercentenary memorial volume.* Hrsg. H. W. Turnbull, London 1939.

Hess, *Vorgeschichte der Nova Methodus* = Hess, H.-J., *Zur Vorgeschichte der ‚Nova Methodus' (1676 bis 1684).* In: *300 Jahre ‚Nova Methodus' von G. W. Leibniz (1684–1984)*: Symposion in Nordwijkerhout, 28.–30. August 1984, S. 64–102 = Studia Leibnitiana Sonderheft. Nr. 14. Stuttgart 1986.

Hofmann, *Über frühe mathematische Studien* = Hofmann, J. E., *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz.* In: *Studia Leibnitiana* 2 (1970), S. 81–114.

HO = HUYGENS, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

LBG = *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LQK = LEIBNIZ, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993.

MAHNKE, *Neue Einblicke* = MAHNKE, D., *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Jahrgang 1925. Phys.-math. Klasse. Nr. 1. Berlin 1926.

MERSENNE, *Correspondance* = MERSENNE, M., *Correspondance*. Hrsg. C. de Waard u. a. 16 Bde. Paris 1931–1986.

OC = OLDENBURG, H., *The Correspondence*. Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

Ouvrages = *Divers ouvrages de mathematique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences*. Paris 1693 (= SV. N. 11).

PO = PASCAL, Bl., *Oeuvres*. Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

TORRICELLI, *Opere* = TORRICELLI, E., *Opere*. Hrsg. G. Loria u. G. Vassura. Faenza 1919–1944.

TSCHIRNHAUS, *Briefe* = *Briefe von Ehrenfried Walther von Tschirnhaus an Henry Oldenburg und Pieter van Gent aus den Jahren 1675–1676*. Amsterdam 1990.

VO = VIÈTE, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970.

WALLIS, *Correspondence* = *The correspondence of John Wallis*. Hrsg. C. J. Scriba u. P. Beeley. Oxford 2003 ff. — Im Erscheinen.

WO = WALLIS, J., *Opera mathematica*, 3 Bde, Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im Einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXXII–XXXVIII.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. CAJORI, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. CAJORI, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

⌢	Multiplikation
×	Überkreuzmultiplikation
⌣	Division
□, $\boxed{2}$	Quadrat
cub., $\boxed{3}$	Kubus
aeq., aequ.	gleich
⊓	gleich
⊓	größer als
⊓	kleiner als
$a : b :: c : d$	Proportion
|	Kürzung eines Bruchs
⨍	facit
Platzhalter:	
*	ausfallende Terme
...	Terme
:	Terme

Wiederholung:		q	Quadrat
..	Faktoren	$a\,.\,b :: c\,.\,d$	Proportion
$\div$	Brüche	Tschirnhaus:	
Barrow:		$\wp$	gleich
$\times$	Multiplikation	$a \dashv\vdash b \dashv c \dashv\vdash d$	Proportion

5. BERICHTIGUNGEN

Zu Band VII, 2:

S. 34 Z. 2: *Statt* 1974 *lies* 1674
S. 75 Z. 7: *Statt* = *lies* ⊓
S. 295 Z. 5: *Statt* desselbenaszikels *lies* desselben Faszikels
S. 337 Z. 2: *Statt* = *lies* ⊓
S. 361 Erl. zu Z. 4–6: *Statt* eckige *lies* eckigen
S. 801 Z. 18: *Statt* phaseologie *lies* phraseologie
S. 861 Z. 4: *Statt* Z. 1–8 *lies* Z. 7–13
S. 869 Z. 9: *Statt* Teil *lies* Titel
S. 873 SV. N. 32: *Statt* N. 18, 53–55 *lies* N. 18, 58–60

Zu Band VII, 3:

S. IX *bei N. 42 lies* [Juli 1676] *statt* [Oktober 1674 – Januar 1675]
S. 242 Z. 7: *Statt* 4 Z. 12 f. *lies* 246 Z. 4
S. 346 Z. 9: *Statt* 21 *lies* 34
S. 425 Z. 5: *Statt* $\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}$ *lies* $\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}$
S. 606 Z. 2: *Statt* [Oktober ... 1675] *lies* [Juli 1676]
S. 606 Z. 5: *Statt* Spuren ... Schnittkante. *lies* Bl. 228 hing ursprünglich zusammen mit VII, 5 N. 90–93.
S. 606 Z. 8-12: *Statt* Die ... sein *lies* Das vorliegende Stück dürfte zur gleichen Zeit entstanden sein wie das auf Juli 1676 datierte VII, 5 N. 90.
S. 757 Z. 3 u. 5: *Statt* 4° *lies* 2°
S. 842 SV. Nr. 8,5: *Hinter* 1657-67 *ergänze* [Marg.]
S. 845 SV. Nr. 24: *Statt 723 lies 726*
S. 845 SV. Nr. 27: *Statt* 1-2. Lyon 1655 *lies* 1-3. Lyon 1665
S. 846 SV. Nr. 39,2: *Statt* 5143-45 *lies* 5143-47
S. 846 SV. Nr. 40: *Statt 723 lies 726*
S. 875, 2. Spalte: *Statt* 920 *lies jeweils* 915

DATE DUE

TRENT UNIVERSITY
0 1164 0573736 6

ISBN 978-3-05-005783-8